6
Geometria dello spazio

Parte prima

Orientarsi nello spazio

Parte seconda

Volumi e aree

Sono soprattutto due i problemi della vita di tutti i giorni che potevano motivare ad uno studio della geometria solida:
– il problema della costruzione di abitazioni;
– il problema di determinare il contenuto di un recipiente.
Il primo porta a rendersi conto della posizione reciproca di rette e piani nello spazio, e conduce quindi a indagare su questioni di equilibrio e di stabilità in relazione alla forma della costruzione. Il secondo, invece, motiva alla ricerca di regole per calcolare il volume e l'area della superficie di un contenitore, regole che variano, ovviamente, a seconda della forma.

Vediamo quello che ci dice la storia: i più antichi documenti in cui sono riportati problemi di geometria dello spazio appartengono sia al mondo babilonese che a quello egizio, e risalgono al 2000-1600 a.C. Sia nelle tavolette babilonesi che nei papiri egiziani le questioni di geometria solida si riferiscono al secondo problema, quello della determinazione dei volumi. Nulla invece vi si trova relativamente al primo problema, quello che conduce allo studio della posizione degli elementi fondamentali che costituiscono lo spazio, e cioè rette e piani.

Quando poi arriviamo al periodo greco, si trova una trattazione della geometria piana estremamente ampia, dettagliata e rigorosa, mentre alla geometria dello spazio è riservato uno sviluppo assai meno diffuso e approfondito.

Vedremo in queste pagine che questo divario fra geometria del piano e quella dello spazio trova la causa – e sembra veramente strano – in un particolare tipo di società. Ma, rivolgiamo subito l'attenzione al trattato "d'oro": gli "Elementi" di Euclide. In questo libro, scritto nel 300 a.C., viene data un struttura razionale all'esposizione di tutte le proprietà matematiche fino allora scoperte: la trattazione della geometria è sviluppata secondo un sistema ipotetico-deduttivo; in questa trattazione l'ideale scientifico dei Greci, e cioè l'ordine e il rigore logico, ha trovato la sua più alta espressione. Non vi è, negli "Elementi", nessuna applicazione pratica; alla teoria non fa seguito nessuna utilizzazione. Si racconta, a questo proposito, che, avendo un allievo domandato a Euclide a che cosa potesse essere utile la geometria, questi avrebbe reagito rivolgendosi a un servo con queste parole: «Dà al giovane una moneta e mandalo via poiché egli vuole trarre profitto dalla scienza!».

Il racconto può essere senz'altro inventato ma rispecchia la mentalità di Euclide e l'influenza fortissima del pensiero di Platone. In molte opere di Platone risulta chiaro il suo atteggiamento nei confronti delle applicazioni della scienza; ascoltiamo un dialogo fra Socrate e Glaucone, tratto da "La Repubblica": «Bisogna imporre – dice Socrate – che i cittadini della tua città in nessun modo si astengano dalla geometria... Perché con l'insegnamento di questa disciplina si purifica nell'uomo un organo dell'anima [e cioè l'intelligenza], e lo si rinfiamma quando sia spento o ottenebrato da altre occupazioni; un organo che importa curare più di infiniti occhi, poiché soltanto per mezzo di esso si può conoscere la verità».

Ancora più chiaro si rivela il pensiero di Platone quando dice, nello stesso dialogo: «Quelli che si occupano di geometria – e si riferisce alla ***geometria piana*** *– si valgono di figure visibili, e ragionano su di esse, non ad esse pensando ma a quelle di cui queste sono le immagini, ragionando sul quadrato come idea, e sulla sua diagonale, e non su quello o quella che disegnano. E così tutte le figure che formano o disegnano, quasi ombre o immagini specchiate dall'acqua, tutte le adoperano come rappresentazioni, cercando di vedere attraverso di esse i loro originali [e cioè la loro essenza] che non sono visibili se non dall'intelligenza idealizzatrice».*

È solo con gli occhi della mente, insomma, che si deve concepire la figura geometrica, perché essa non ha spessore ed è dunque diversa da quella che appare in un disegno anche se, nell'eseguirlo, si è utilizzata una punta sottilissima.

Vediamo ora dove conduce questa concezione quando dal piano si passa allo spazio. Leggiamo ancora un passo di quel dialogo di Platone: «Dopo il piano – dice Socrate – si considera il solido quando è gia in moto, prima di studiarlo di per sé solo [cioè – intende dire –: si studia l'astronomia, o meglio la meccanica celeste, prima della geometria solida]. Mentre invece l'ordine vorrebbe che dopo la seconda estensione si studiasse la terza, e cioè quella che si riferisce ai cubi e alla profondità». «È vero – osserva Glaucone –, ma questa [e cioè la **la geometria solida***] è una scienza che pare non sia stata ancora inventata». «Una ragione – ribatte Socrate – è che nessuno Stato la ha in pregio, e quindi la si studia troppo debolmente in rapporto alla sua difficoltà... È per questo che, dato appunto il modo ridicolo con cui ora se ne tratta, dopo la geometria piana val meglio saltare all'astronomia, pensando che la scienza lasciata da parte [e cioè la scienza dei solidi] esisterà quando lo Stato vorrà bene occuparsene».*

Lo Stato: sembra quasi che ci si riferisca a dei programmi scolastici... Ma perché questa contrarietà ad approfondire lo studio della geometria dello spazio?

Riflettiamo: quando dalla geometria piana si passa a quella dello spazio, il disegno non basta più a dare un'immagine evocatrice, a dare cioè un'idea così chiara della figura da essere in grado di astrarre in modo da «guardare con gli occhi della mente». E il disegno non bastava certo all'epoca di Platone, dato che mancava anche il sostegno di accurate regole di prospettiva. Noi, a questa osservazione, si reagisce costruendo dei modelli, e così, quando il modello concreto l'abbiamo fatto proprio, riusciamo anche a "vederlo" col pensiero. Ma – e questo è il punto –, la costruzione di un modello concreto è un lavoro da eseguire con le mani, e, nella filosofia platonica, un tale lavoro non poteva essere di aiuto alla scienza: la scienza infatti, in quanto tale, rappresentava un mondo ideale completamente staccato dal lavoro dell'operaio e, anche, da applicazioni più nobili come quelle realizzate dall'architetto.

Riesce veramente difficile farsi un'idea di... queste idee. Ci si chiede: ma allora, l'uomo che, fin dalla preistoria, costruiva capanne e abitazioni primitive, l'operaio greco che edificava case a più piani, aveva, sulle figure solide e quindi sugli elementi che le formano, delle conoscenze più approfondite del grande matematico? E perché il matematico non poteva ispirarsi alle costruzioni monumentali come le piramidi d'Egitto o il Partenone, che avevano certamente a monte una seria progettazione?

I due mondi, quello della matematica pura e quello della matematica applicata, erano del tutto staccati uno dall'altro; erano i due mondi che caratterizzavano quel tipo di società.

C'erano però, anche al tempo di Platone, delle figure solide che affascinavano: i cinque poliedri regolari. L'interesse risiedeva, in questo caso, in qualcosa di mistico: la simmetria, l'armonia di queste figure doveva avere un riflesso nella costruzione dell'universo! E difatti, gli elementi, fuoco, aria, acqua, terra, con cui si pensava fossero costruite tutte le cose, trovarono la loro interpretazione rispettivamente nel tetraedro, nell'ottaedro, nell'icosaedro e nel cubo. L'esistenza del quinto poliedro regolare, il dodecaedro, viene così giustificata da Platone: «Essendovi ancora una quinta combinazione, Iddio se ne servì per decorare il disegno dell'Universo!».

Siamo veramente nel mondo delle idee, ma sono proprio queste idee che, successivamente, motivarono Euclide ad uno studio matematico approfondito sui poliedri regolari. Lo sviluppo che viene dato a questo argomento, nella sua geometria, e infatti molto grande rispetto agli altri capitoli dedicati alle figure solide.

Per una visione più chiara sugli elementi che costituiscono lo spazio bisognerà attendere molti secoli, e l'aiuto verrà dall'arte: sono infatti gli artisti che nel 1400-1500 si dedicarono allo studio della prospettiva, che, *volendo rappresentare col disegno le figure a tre dimensioni, furono obbligati ad analizzare in dettaglio la posizione reciproca delle rette e dei piani.*

Veniamo ora all'altro problema che costituisce una parte fondamentale della geometria solida: la determinazione dei volumi. È un problema, questo, che si è presentato fin dai tempi più antichi: quanta acqua può contenere quel recipiente? Qual è il peso di quel tronco d'albero?

È interessante osservare che mentre la matematica che riguardava le costruzioni rimase per lungo tempo staccata dalla teoria, la problematica pratica dei volumi trovò invece, anche nell'opera di Euclide, uno studio teorico corrispondente: la considerazione di figure equivalenti, la determinazione del volume di prismi, piramidi, cilindri, coni, tronchi di piramidi e di coni costituisce una parte molto curata negli "Elementi".

Per la determinazione del volume e della superficie della sfera si deve invece attendere il genio di Archimede. Ed è proprio con Archimede che scompare il contrasto fra matematica applicata e matematica pura: il «vedere con gli occhi della mente» è sostenuto ora dall'osservazione e dalla sperimentazione sul concreto. Sono le idee di Archimede che, riprese nel Rinascimento, motivarono la scuola galileiana a formulare dei principi generali per la determinazione dei volumi e delle aree di superficie curve. Oggi ci si vale ancora di queste idee; le troverete esposte nelle pagine dedicate all'argomento.

6. Parte prima

Orientarsi nello spazio

1. Il piano e lo spazio. Le dimensioni

Quando si passa dal piano allo spazio, cioè da figure a 2 dimensioni a figure a 3 dimensioni, tutto sembra più difficile. Eppure lo spazio costituisce proprio l'ambiente in cui viviamo! Perché queste difficoltà nel riconoscere la forma di figure solide anche ben note, se, per esempio, non sono disposte nel modo abituale? (fig. 1).

E perché, spesso, non riusciamo ad avere un'idea delle sezioni piane di un solido? Quale forma possono avere le sezioni piane del cubo? (figg. 2 e 3).

Cerchiamo di renderci conto di queste difficoltà attraverso osservazioni ed esperimenti che riguardano sia il piano che lo spazio.

Cominciamo con *le figure a due dimensioni*. Immaginiamo tanti poligoni ritagliati da un cartoncino e disposti su un tavolo. Se osserviamo questi poligoni dalla posizione in cui ci troviamo, cioè dall'alto, non abbiamo certo difficoltà a distinguere le varie forme: il triangolo dal quadrato o da altri poligoni.

Pensiamo adesso di chinarci fino a porre l'occhio a filo del piano del tavolo: quelle figure, siano esse triangoli o poligoni a un numero qualunque di lati, ci appaiono come segmenti; non riusciamo più a distinguere una dall'altra. Ciò è dovuto al fatto che stiamo osservando le figure dal loro stesso habitat: il piano. E, dal piano, non riusciamo a "dominarle", come avveniva quando si guardavano dall'alto, cioè dallo spazio a tre dimensioni.

Fig. 1

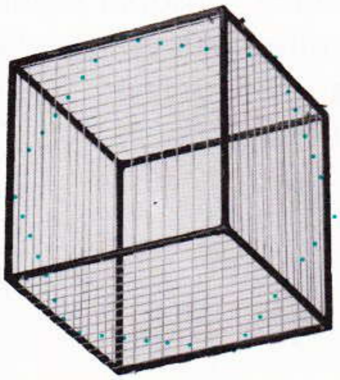


Fig. 2

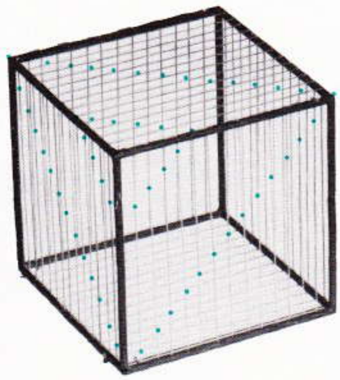


Fig. 3

È quanto accadrebbe a un animale piatto che vivesse su quel piano: l'animale, che non ha la possibilità di alzare la testa nemmeno di pochissimo, non riesce ad avere un'idea della forma delle figure; per rendersene conto, dovrebbe girarci intorno, oppure potrebbe rimanere nella sua posizione mentre ogni figura viene fatta ruotare su se stessa. L'animale osserverebbe così ogni figura "pezzo per pezzo", e, attraverso una sintesi intellettuale, si farebbe un'idea della sua forma.

Passiamo ora all'esame di *figure a tre dimensioni*. Un cubo, un parallelepipedo, una piramide, sono realizzati con dei modelli. Noi osserviamo queste figure, e, se ci troviamo allo stesso livello, ne vediamo una faccia o due facce collegate lungo uno spigolo. Non riusciamo a farcene un'idea, e questo proprio perché ci troviamo nello stesso spazio in cui sono immerse le figure.

Accade insomma, ora, un fatto analogo a quello che si verificava per le figure piane quando venivano osservate disponendo l'occhio a livello del tavolo; non riusciamo a "dominarle"; possiamo vedere bene solo la parte della figura che si affaccia verso di noi. Per avere l'idea della forma di ogni figura solida dovremmo uscire dallo spazio a tre dimensioni per salire a quello a quattro dimensioni... Oppure – cosa fattibile – dobbiamo girare intorno alla figura, o, anche, rimanendo sempre nella stessa posizione, far sì che ogni figura ruoti su se stessa; in tal modo, osservandola da ogni parte, possiamo averne, con una sintesi intellettuale, un'idea complessiva.

2. Analogie fra piano e spazio: rette nel piano e piani nello spazio. Angoli e diedri

La retta è un ente a 1 dimensione. È facile capire il significato di questa affermazione: fissato un punto origine O sulla retta, un verso e una unità di misura, ogni altro punto è individuato da un solo numero (fig. 4); si ha, per esempio, che:

P corrisponde a $+3$
Q corrisponde a -2.

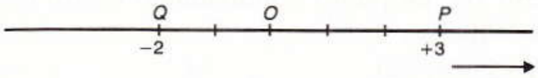


Fig. 4

Il piano è un ente a 2 dimensioni. Nel Cap. 1 abbiamo visto come, fissato un riferimento, ad esempio cartesiano (fig. 5), ogni punto del piano è individuato da due coordinate: x,y. Si ha, ad esempio:

$P(+2,+5)$.

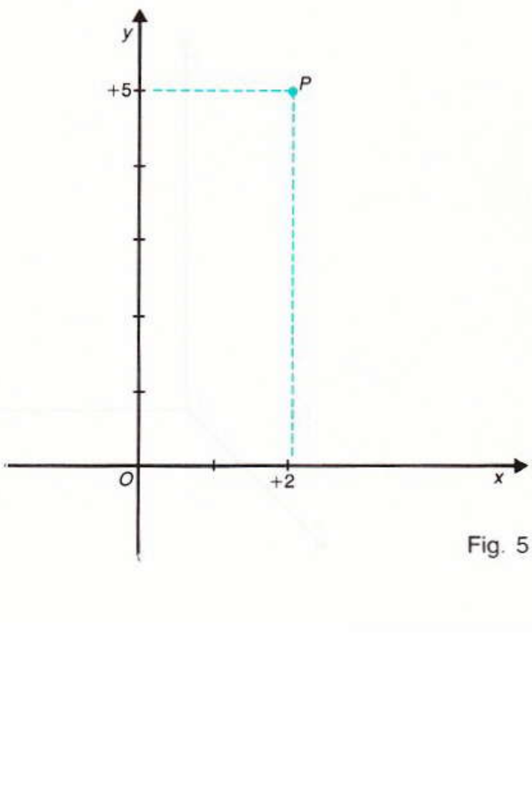


Fig. 5

Sappiamo che due rette nel piano possono trovarsi in tre posizioni reciproche (fig. 6): avere un punto in comune, essere parallele, essere coincidenti.

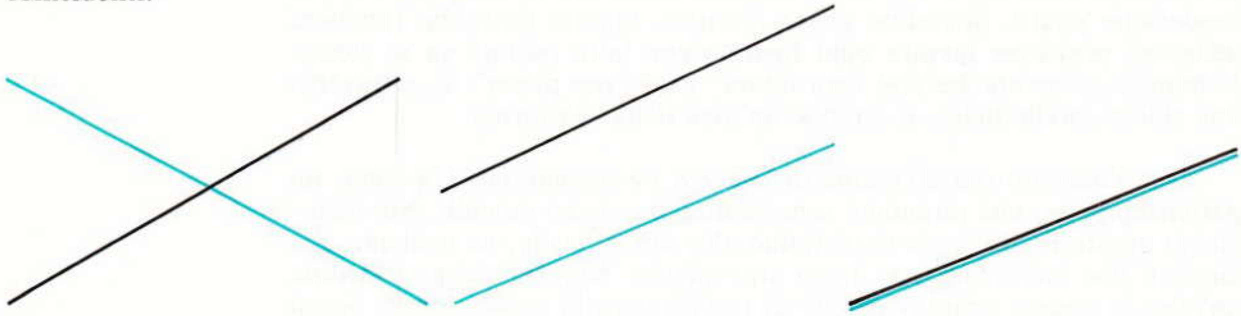


Fig. 6

Nel primo caso, le rette dividono il piano in 4 parti; ciascuna di queste è un angolo. **Angolo è** dunque **la parte di piano compresa fra due semirette che hanno la stessa origine** (fig. 7).

Passiamo ora dall'ambiente "il piano" all'ambiente "lo spazio".

Fig. 7

Lo spazio è a 3 dimensioni. Fissato un sistema di riferimento (Cap. 1, Complementi II), un punto è individuato da tre coordinate x,y,z (fig. 8); si ha per esempio

$$P(+2,+4,+3).$$

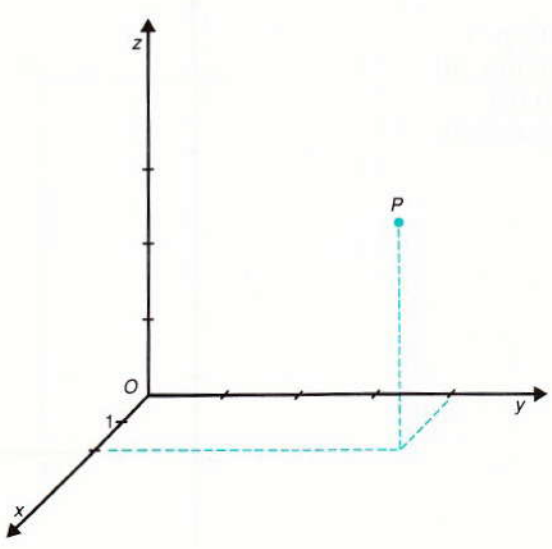


Fig. 8

Consideriamo, nello spazio, dei piani, cioè degli enti a 2 dimensioni. Possiamo ripetere per la posizione di due piani nello spazio le considerazioni fatte nei riguardi della posizione di due rette nel piano. Due piani possono trovarsi in tre posizioni reciproche (fig. 9): avere una retta in comune, essere paralleli, essere coincidenti.

Nel primo caso i piani dividono lo spazio in 4 parti (fig. 10); ciascuna di queste si chiama **angolo diedro** (dal greco *dis*=due e *hedra* =facce), o semplicemente **diedro**.

Diedro è dunque **la parte di spazio compresa fra due semipiani che hanno per origine lo stesso spigolo** (fig. 11).

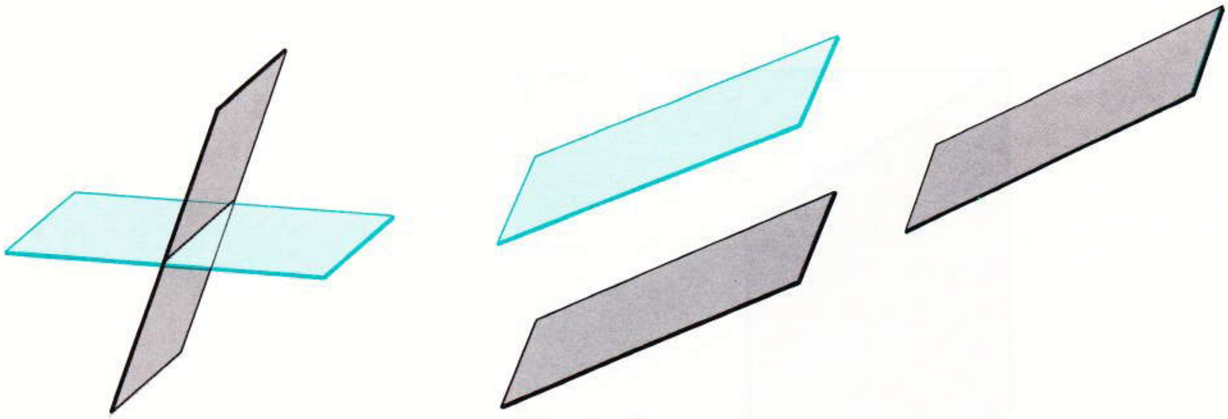


Fig. 9

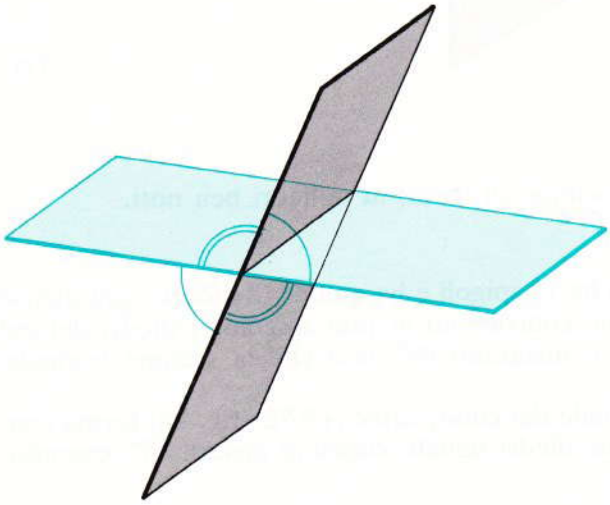


Fig. 10

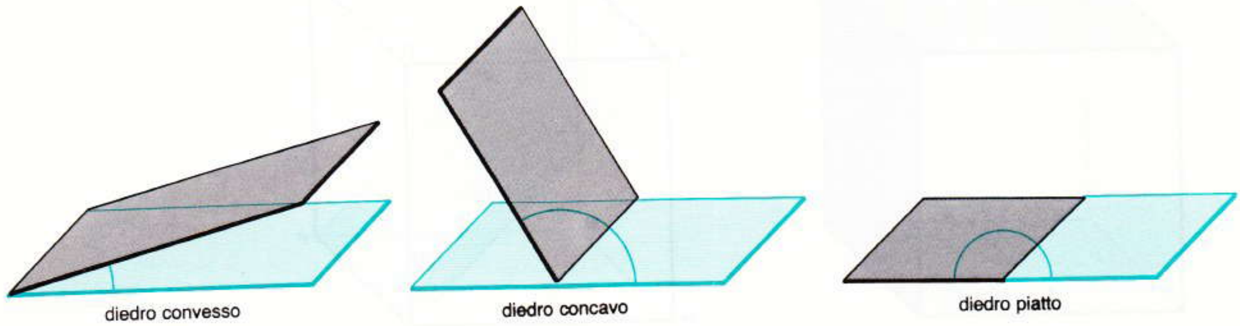


Fig. 11

È alla nozione di angolo che si ricorre per misurare e, quindi, confrontare l'ampiezza dei diedri. Si procede così (fig. 12): per un punto qualunque P dello spigolo r, origine dei semipiani α e β, si costruiscono due rette perpendicolari ad r, una, a, sul semipiano α e l'altra, b, sul semipiano β; le rette a e b giacciono su un piano perpendicolare ad r. L'ampiezza dell'angolo

$$\varphi=\widehat{ab}$$

rappresenta la misura del diedro $\widehat{\alpha\beta}$; questo angolo $\widehat{ab}$ si dice **sezione normale del diedro**. I diedri si confrontano dunque misurando gli angoli, loro sezioni normali.

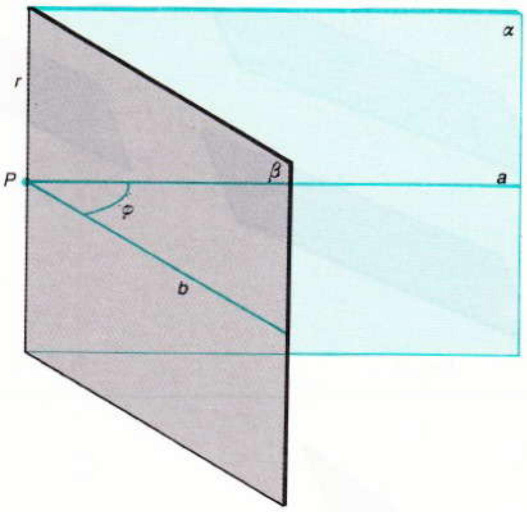


Fig. 12

Ecco qualche esempio di diedri in poliedri ben noti.

Diedri nel cubo

Il cubo (fig. 13) ha 12 spigoli e ha quindi 12 diedri; ogni diedro è formato da due facce che concorrono in uno spigolo. I diedri del cubo sono ovviamente uguali e misurano 90° dato che la sezione normale è sempre un angolo retto.

Un piano diagonale del cubo, come $ABFE$ (fig. 14) forma con le facce $EFCD$ e $EFGH$ due diedri uguali: ciascuno misura 45°, essendo la metà di un diedro retto.

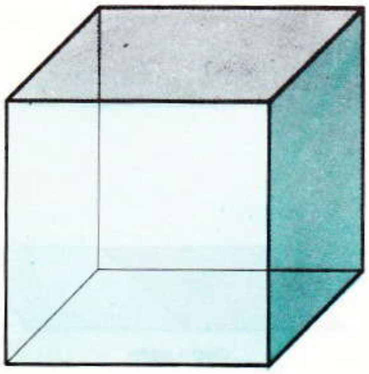


Fig. 13

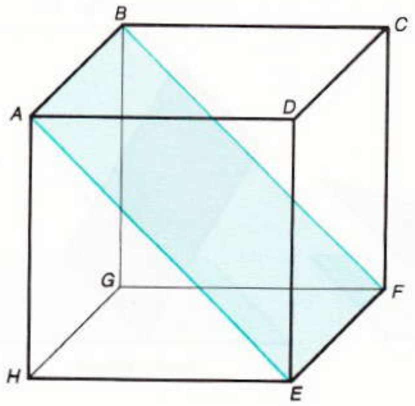


Fig. 14

Diedri nel tetraedro regolare

Il tetraedro regolare (*tetras*=quattro, *hedra*=facce) è una piramide la cui superficie è limitata da quattro triangoli equilateri uguali (fig. 15).

Se il tetraedro è regolare, i diedri formati da due facce che hanno uno spigolo comune sono uguali; e si capisce che ogni diedro è minore di uno retto.

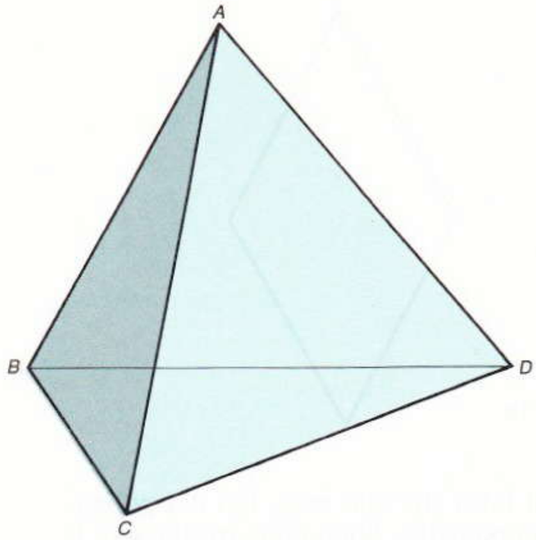


Fig. 15

3. Mancanza di analogie fra piano e spazio: somma degli angoli nei poligoni e somma dei diedri nei poliedri

Data la stretta analogia fra diedri e angoli, si potrebbe pensare che le proprietà sugli angoli "si traducessero" in proprietà riguardanti i diedri; ma basta un esempio per rendersi conto che ciò non si verifica sempre.

Per i poligoni convessi (fig. 16) si ha: *la somma degli angoli interni di un poligono di n lati è data da*

S=(n−2) angoli piatti.

In particolare, per il triangolo (fig. 17), essendo n=3, si ha:

S=1 angolo piatto.

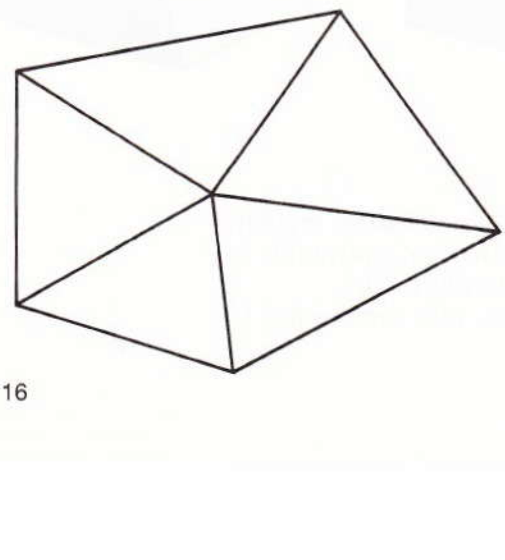


Fig. 16

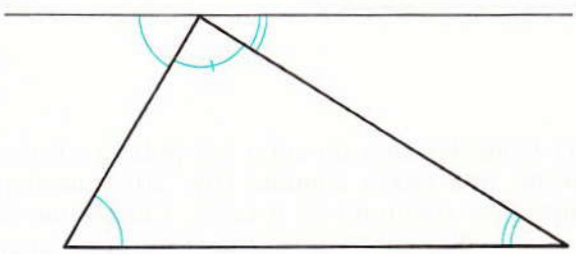


Fig. 17

La somma degli angoli di un poligono convesso dipende dunque, esclusivamente, dal numero n dei lati. Per esempio, il quadrato e il rombo di fig. 18 hanno la stessa somma di angoli; si ha:

$S=(4-2)$ angoli piatti $=2$ angoli piatti.

Nello spazio, l'analogo del poligono è **il poliedro**, cioè **il solido che ha la superficie formata da facce poligonali**.

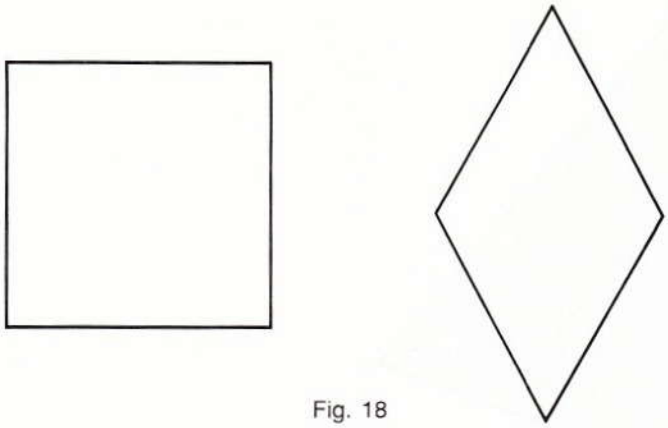


Fig. 18

L'analogia è determinata dal fatto che alle *rette*, lati del poligono, vengono sostituiti *i piani*, facce del poliedro. Sono poliedri: il cubo, il prisma, la piramide (fig. 19); non sono invece poliedri il cilindro, il cono, la sfera, dato che la loro superficie non è formata da poligoni.

Abbiamo visto, nel paragrafo precedente, come alla nozione di angolo corrisponda, nello spazio, quella di diedro. Calcoliamo allora, volendo seguire l'analogia, *la somma dei diedri di un poliedro.* Esaminiamo due casi:

A) poliedri limitati dallo stesso numero di facce;
B) variazione di un poliedro per continuità.

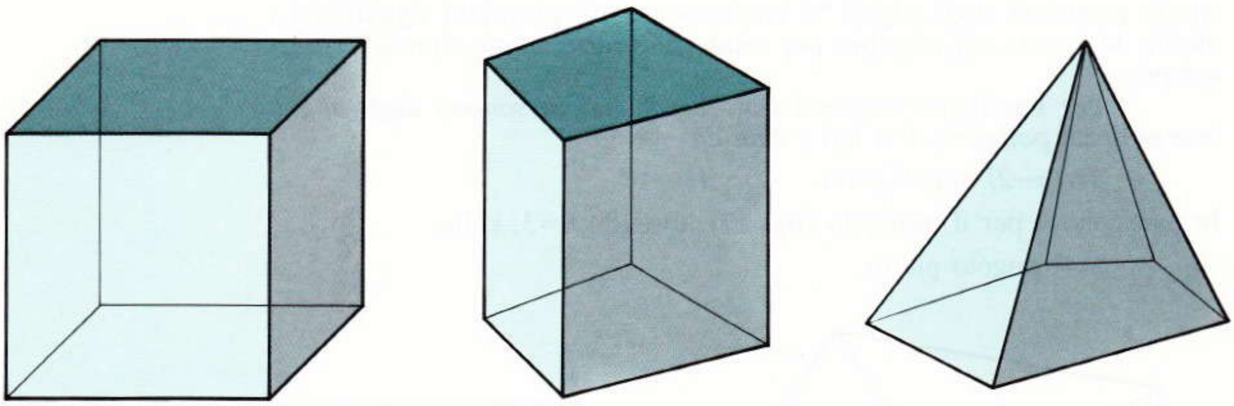


Fig. 19

A) Consideriamo un cubo e il poliedro formato da due tetraedri regolari aventi una faccia comune (fig. 20); questi poliedri hanno, entrambi, la superficie costituita da 6 facce. Calcoliamo la somma dei diedri.

Nel cubo, ogni diedro misura 1 angolo retto, e la somma dei 12 diedri risulta quindi uguale a:

$S=12$ angoli retti.

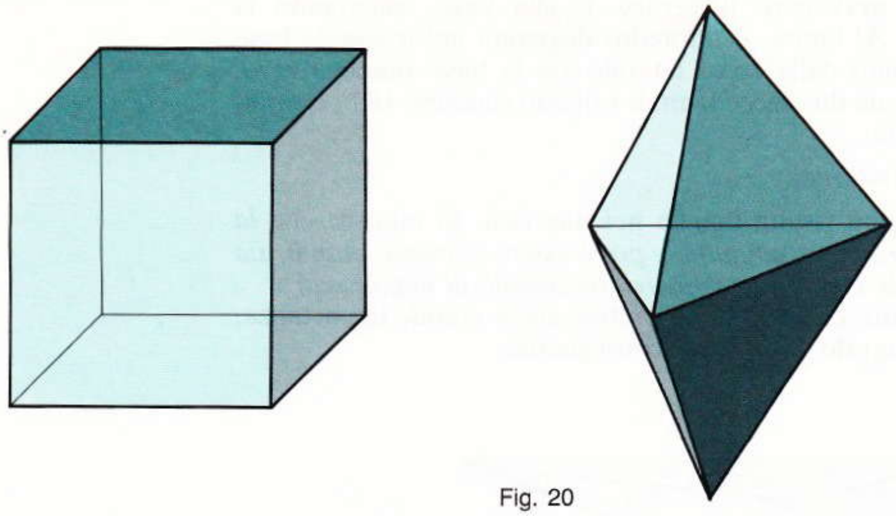


Fig. 20

Nel doppio tetraedraedro (fig. 21) i diedri sono complessivamente 9: di questi, 6 sono formati da due facce di uno stesso tetraedro (come ABC e DBC) e l'ampiezza α di ciascuno di questi diedri è certamente *minore di 1 retto*; gli altri 3 diedri, formati da facce (come ABC e EBC) appartenenti a tetraedri diversi, risultano ciascuno doppio dei precedenti, e quindi di ampiezza 2α. La somma di tutti i diedri è quindi:

$$S'=6\alpha+3\cdot 2\alpha=12\alpha.$$

Ora, dato che $\alpha<1$ angolo retto, risulta

$$S'<12 \text{ retti}, \qquad \text{cioè} \qquad S'<S.$$

La somma dei diedri in poliedri aventi lo stesso numero di facce non è dunque costante.

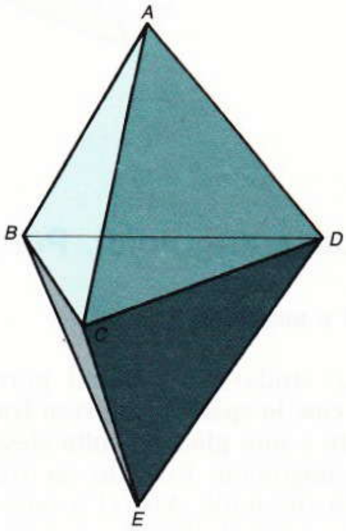


Fig. 21

B) Consideriamo una piramide avente per base un triangolo equilatero (fig. 22). Realizziamone un modello costruendo la base ABC con un materiale rigido e gli spigoli VA, VB, VC con dei fili elastici collegati in V. Aumentando o diminuendo la tensione dei fili si avranno delle piramidi – pensiamole rette – con altezza diversa.

Per una certa posizione del vertice V si otterrà *il tetraedro regolare*; in questo caso i 6 diedri sono uguali e ciascuno di essi ha un'ampiezza

$$\alpha \text{ minore di } 90°.$$

La somma dei diedri è dunque

$$6\alpha<6 \textit{ angoli retti.}$$

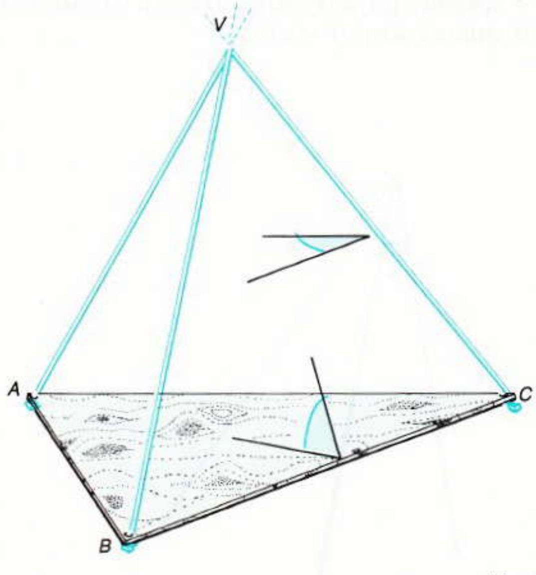


Fig. 22

Immaginiamo ora di avvicinare il vertice V alla base, allentando la tensione degli elastici. Al limite, il tetraedro degenera nel triangolo base (fig. 23): i diedri formati dalle facce laterali con la base vanno a zero, mentre i diedri formati da due facce laterali valgono ciascuno 180°; quindi, complessivamente, si ha:

3 angoli piatti=6 retti.

La somma dei diedri non risulta uguale nei due casi. Si intuisce che *la somma dei diedri varierà con continuità, e potrà essere espressa, quindi, sia da un numero razionale che da un numero irrazionale di angoli retti.*

Questo risultato, che non sembrerebbe avere grande importanza, si rivelerà invece (paragrafo 7) ricco di conseguenze.

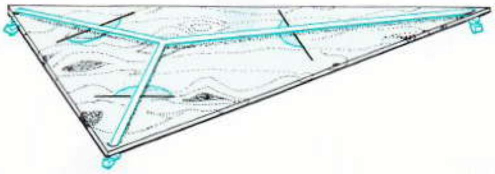


Fig. 23

4. Triedri e angoloidi. Poligoni regolari e poliedri regolari

A) Triedri e angoloidi

Lo studio dei poliedri porta a considerare, oltre ai diedri, **gli angoloidi, cioè lo spazio compreso fra tre o più semirette passanti per uno stesso punto e non giacenti sullo stesso piano** (fig. 24).

L'angoloide formato da tre semirette si dice **triedro**. Qualche esempio: la piramide $ABCD$ a base triangolare (fig. 25) ha 4 angoloidi (triedri) di vertici A,B,C,D, cioè tanti quanti sono i vertici. La piramide $ABCDE$ a base quadrangolare (fig. 26) ha 5 angoloidi: uno, di vertice A, ha 4 spigoli; gli altri sono triedri. Il cubo (fig. 27) ha 8 angoloidi uguali, tanti quanti sono i vertici.

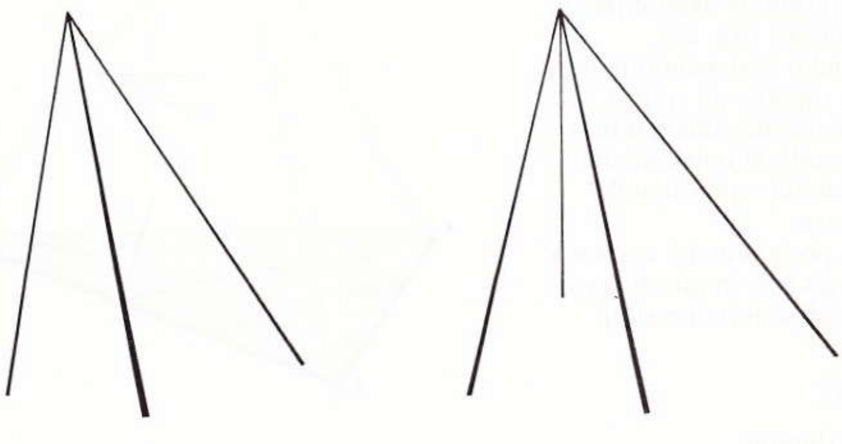


Fig. 24

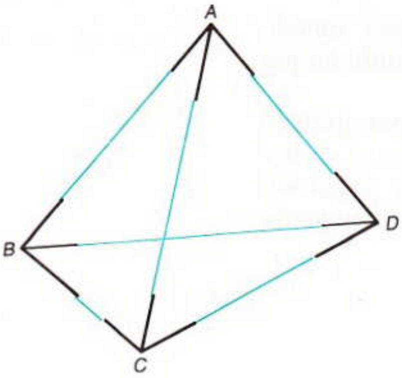


Fig. 25

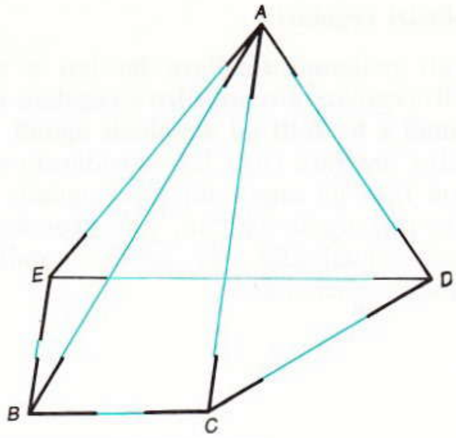


Fig. 26

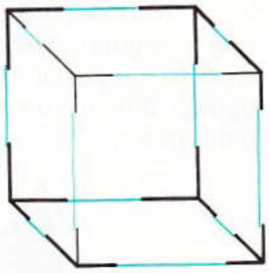


Fig. 27

Vogliamo ora considerare *la somma degli angoloidi* di una piramide. Ricorriamo anche adesso a un modello (fig. 28): costruiamo una piramide a base quadrata in cui la base sia realizzata con materiale rigido, e con quattro spigoli di filo elastico. Allontanando o avvicinando il vertice dalla base si ottengono tante piramidi. Abbiamo già osservato che varia l'ampiezza dei diedri. Varia anche l'ampiezza degli angoloidi, e precisamente: se l'altezza della piramide – immaginiamo che la piramide sia retta – aumenta (fig. 29), diminuisce l'angoloide al vertice mentre aumentano gli angoloidi alla base; se diminuisce l'altezza della piramide (fig. 30), aumenta l'angoloide al vertice mentre diminuiscono quelli alla base. È chiaro però – e ci riferiamo a quest'ultimo caso – che la somma degli angoli delle facce dell'angoloide al vertice non può raggiungere i 360°, perché la piramide verrebbe a "schiacciarsi" sulla base (fig. 31). Si ha quindi: **la somma delle facce di un angoloide deve essere sempre minore di 360°**[1].

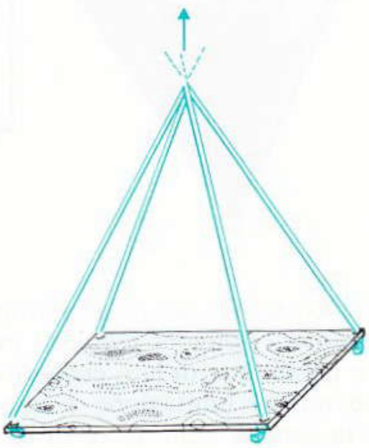


Fig. 28

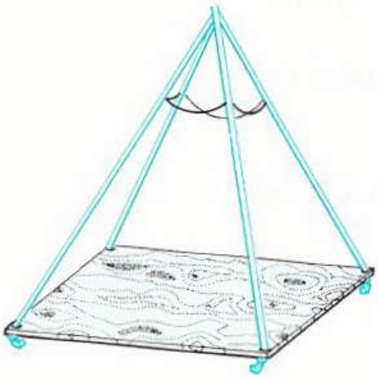


Fig. 29

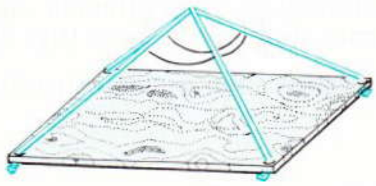


Fig. 30

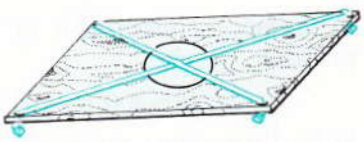


Fig. 31

[1] Chiamiamo, secondo l'uso, facce dell'angoloide gli angoli delle facce.

B) Poligoni regolari e poliedri regolari

Sappiamo che un poligono regolare ha lati e angoli uguali. Consideriamo ora i poliedri regolari. **Un poliedro è regolare quando ha per facce poligoni regolari uguali e ha tutti gli angoloidi uguali.**

Il doppio tetraedro regolare (fig. 32) considerato al paragrafo 3 *non è regolare* perché non tutti gli angoloidi sono uguali. E così *non è regolare* il parallelepipedo rettangolo perché, pur avendo gli angoloidi uguali, non ha tutte le facce uguali (fig. 33). Le due condizioni imposte dalla definizione sono dunque essenziali.

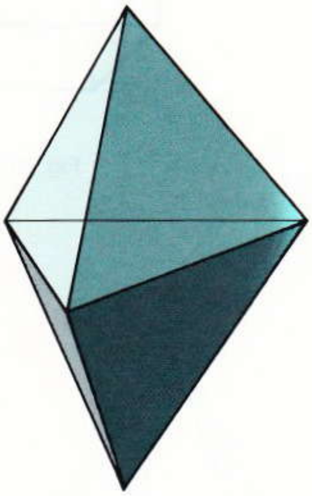


Fig. 32

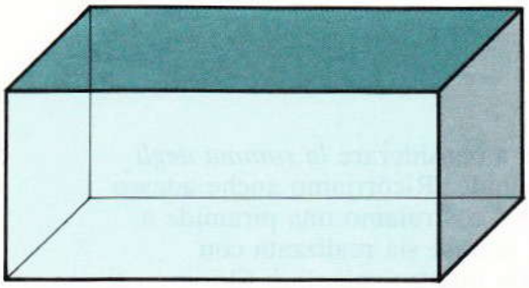


Fig. 33

Lo studio dei poliedri regolari porta a scoprire una mancanza di analogia con i poligoni regolari: mentre esistono poligoni regolari con un numero qualunque di lati, ci sono solo 5 tipi di poliedri regolari. Vedremo ora che questa limitazione è imposta dal vincolo che abbiamo trovato prima: la somma delle facce di un angoloide deve essere minore di 360°.

Cominciamo a costruire un poliedro avente per facce dei *triangoli equilateri*; ogni angolo è dunque di 60°. Si possono presentare i seguenti casi:

1) le facce concorrenti in un vertice sono 3; in questo caso è possibile costruire il poliedro perché

$$3 \cdot 60° = 180° < 360°.$$

Si ha **il tetraedro regolare**: è una piramide avente per facce quattro triangoli equilateri uguali (fig. 34);

2) in ogni vertice concorrono 4 facce; è ancora possibile costruire un poliedro regolare perché

$$4 \cdot 60° = 240° < 360°.$$

Si ha **l'ottaedro regolare**: è formato da due piramidi uguali a base quadrata, disposte simmetricamente rispetto alla base (fig. 35);

3) le facce concorrenti in ogni vertice sono 5; la costruzione è ancora possibile perché

$$5 \cdot 60° = 300° < 360°.$$

Si ha **l'icosaedro regolare**: ha 20 facce (fig. 36).

Non esistono altri poliedri aventi per facce dei triangoli equilateri: infatti se in un vertice convergono 6 triangoli, si ha

$$6 \cdot 60° = 360°,$$

e dunque le sei facce di un angoloide si trovano su un piano.

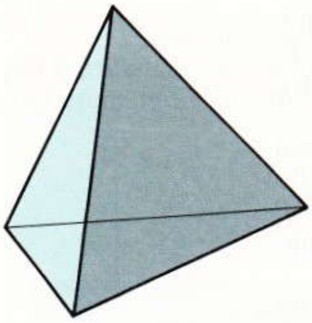


Fig. 34

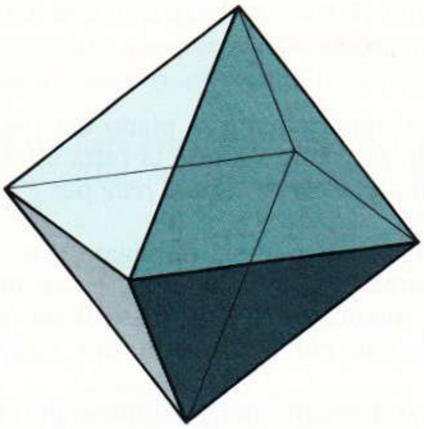


Fig. 35

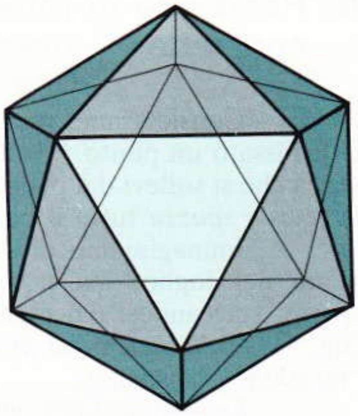


Fig. 36

Passiamo alla costruzione di poliedri regolari con *facce quadrate*. Si ha un solo caso:

4) in un vertice convergono 3 quadrati: si ha **il cubo, o esaedro regolare** (fig. 37). Non si possono avere altri casi perché, se in un vertice convergono 4 quadrati, la somma dei loro angoli risulta

$$4 \cdot 90° = 360°.$$

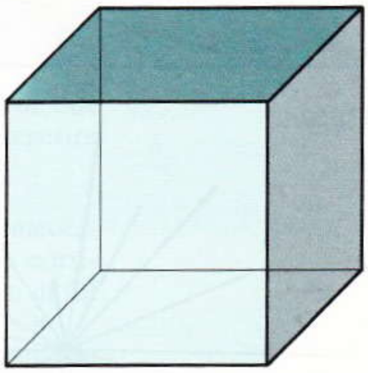


Fig. 37

5) Anche con pentagoni regolari è possibile costruire un solo poliedro regolare: **il dodecaedro** (fig. 38). La possibilità si deve al fatto che ogni angolo di un pentagono regolare vale 108° e

$$3 \cdot 108° = 324° < 360°.$$

Ci si rende conto facilmente che con poligoni regolari aventi un numero di lati maggiore di 5 non si può costruire un poliedro regolare; per esempio, se consideriamo gli esagoni, anche con tre esagoni convergenti in un vertice si ottiene un angolo giro:

$$3 \cdot 120° = 360°.$$

Si conclude che esistono **solo** 5 tipi di poliedri regolari: **il tetraedro, l'ottaedro**, l'**icosaedro**, il **cubo**, il **dodecaedro**. Ecco una tabella riassuntiva di quanto abbiamo scoperto:

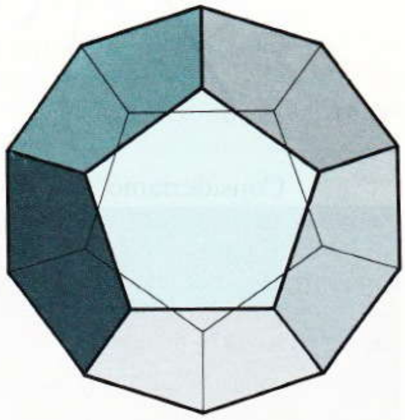


Fig. 38

tipo del poliedro	*tipo delle facce*	*numero delle facce per vertice*	*somma delle facce di un angoloide*
tetraedro	triangoli	3	$3 \cdot 60° = 180°$
ottaedro	triangoli	4	$4 \cdot 60° = 240°$
icosaedro	triangoli	5	$5 \cdot 60° = 300°$
esaedro o cubo	quadrati	3	$3 \cdot 90° = 270°$
dodecaedro	pentagoni	3	$3 \cdot 108° = 324°$

5. Posizione di rette nello spazio. Superficie curve realizzate con rette

Consideriamo una retta *r* appartenente al piano del foglio (fig. 39). Fissato un punto *P* sulla retta, facciamo ruotare la retta attorno a *P*, senza che si sollevi dal piano: si ha *un fascio di infinite rette* per *P* (fig. 40); la retta *r spazza* tutto il piano.

Immaginiamo ora che la retta *r* non sia obbligata a restare sul piano del foglio, ma possa assumere una qualunque posizione nello spazio, staccandosi dal piano ma rimanendo sempre fisso il suo punto *P* (fig. 41): si ha *una stella di infinite rette* per *P*. Le rette, ora, sono di più: "invadono" lo spazio.

Osserviamo che ogni piano passante per *P* contiene infinite rette (fig. 42); si hanno quindi infinite rette su ciascuno degli infiniti piani per *P*.

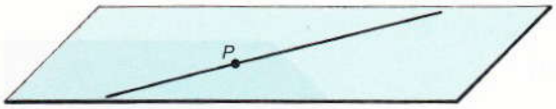


Fig. 39

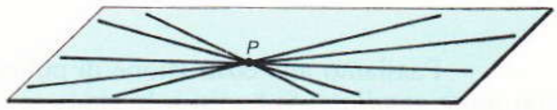


Fig. 40

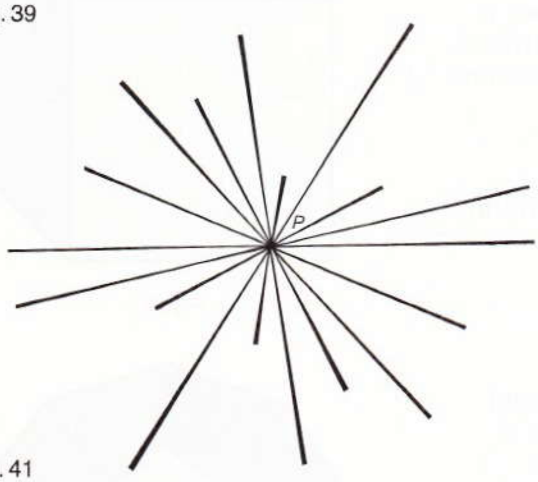


Fig. 41

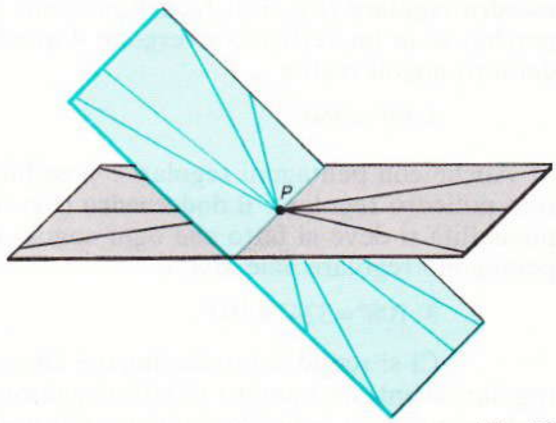


Fig. 42

Consideriamo ora due rette nello spazio (fig. 43): la retta *r* passante per un punto *P* e la retta *s* passante per un punto *Q*.

Si capisce che, in generale, una retta per *P* e una retta per *Q* non s'incontrano: per incontrarsi, dovrebbero giacere sullo stesso piano, cioè, per esempio, la retta *s* dovrebbe trovarsi su un piano che passa proprio per *P* (fig. 44).

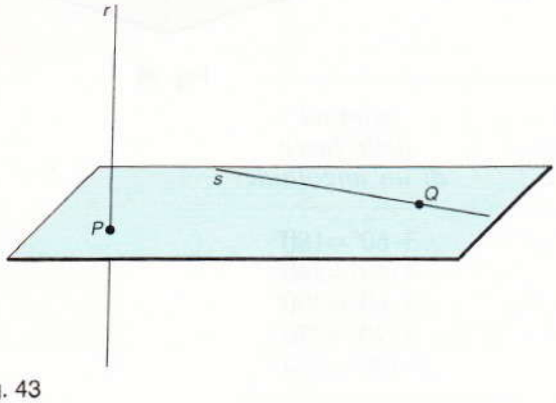


Fig. 43

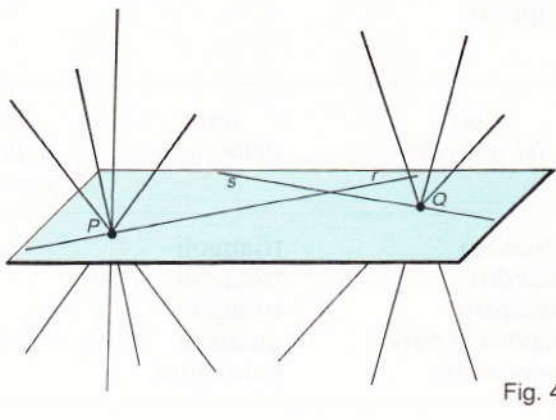


Fig. 44

Si conclude che, **in generale, due rette nello spazio non appartengono allo stesso piano, cioè non hanno punti comuni**; si dicono **sghembe** (fig. 45).

È dunque un caso particolare che due rette s'incontrino, e ancor più particolare che siano parallele (fig. 46), cioè che non s'incontrino pur appartenendo allo astesso piano.

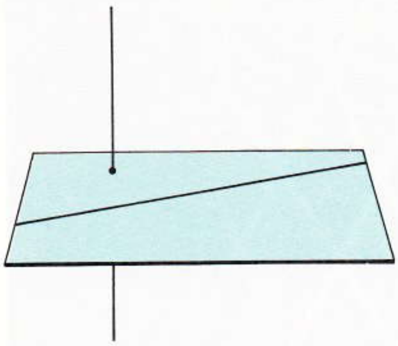


Fig. 45

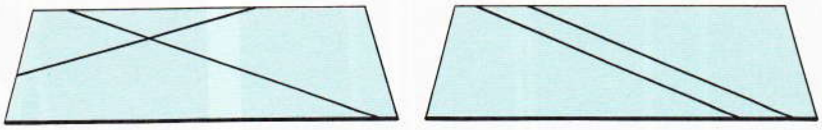


Fig. 46

È molto interessante vedere che è proprio la posizione di due rette sghembe, cioè la posizione che si verifica generalmente, a suggerire la costruzione di *superficie curve*. Portiamo due esempi.

a) Due sbarrette uguali, dotate di fori (come quelle del meccano) sono disposte in posizione parallela (fig. 47); attraverso i fori corrispondenti passa un filo elastico in modo da realizzare un'intelaiatura di fili paralleli.

Teniamo ora fissa, con una mano, la sbarra AB, e solleviamo la CD con l'altra mano (fig. 48), facendo in modo che l'estremo C rimanga nella posizione iniziale, e che i fili elastici siano sempre ben tesi. Le due sbarre non sono più parallele: sono sghembe; e vengono anche ad essere sghembi fra loro i fili elastici.

Quello che colpisce è che, ora, i fili danno luogo a una *superficie curva*. Si ottiene dunque una superficie curva che è formata da rette.

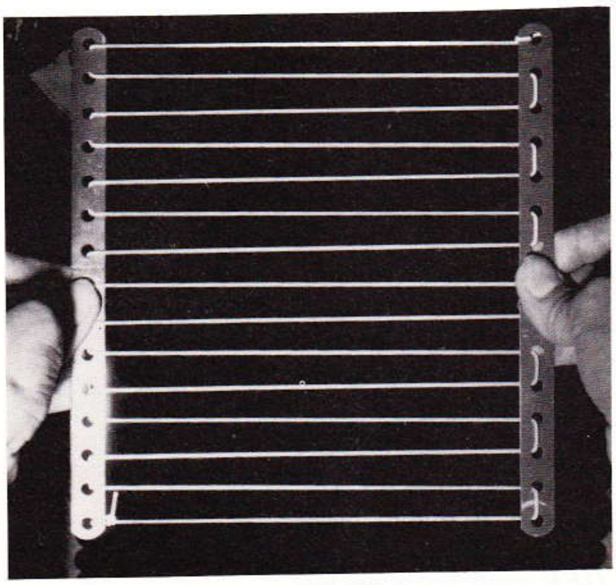


Fig. 47

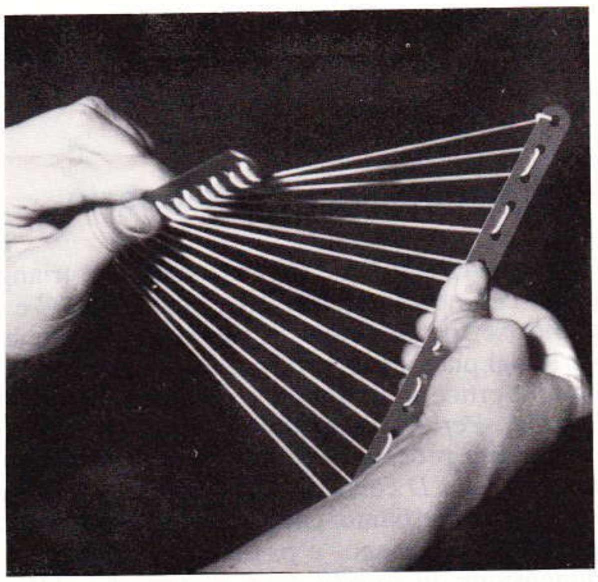


Fig. 48

Fig. 49

Fig. 50

b) Si costruisce un cilindro utilizzando due dischetti uguali, dotati di forellini lungo il bordo; le generatrici del cilindro sono realizzate con dei sottili bastoncini conficcati nei fori (fig. 49).

Teniamo fissa, con una mano, una base, per esempio l'inferiore, e, con l'altra, ruotiamo la base superiore sul suo stesso piano. Le generatrici non sono più parallele, ma diventano sghembe, e la forma cambia: dal *cilindro* si passa a un *iperboloide* (fig. 50); si tratta di una superficie curva che è, però, formata da rette.

Le superficie rigate, e cioè formate da rette, sono molto utilizzate in architettura, proprio perché la loro costruzione in cemento armato è estremamente semplice.

6. L'uguaglianza nello spazio

ABC e *DEF* (fig. 51) sono due triangoli uguali. È facile rendersi conto che non si riesce a sovrapporre *ABC* e *DEF* facendoli scivolare sul piano: se, per esempio, teniamo fisso *ABC* e slittiamo *DEF* senza sollevarlo dal piano, portando a coincidere *FD* con *AC* (fig. 52), ci accorgiamo che il vertice *E* non va a coincidere col vertice *B*.

Per far coincidere esattamente un triangolo con l'altro, siamo obbligati a procedere come è mostrato in fig. 53: dopo aver slittato *DEF* in modo che *D* coincida con *A* e *F* con *C*, si ribalta *DEF* attorno ad *AC*.

Riflettiamo che, operando un ribaltamento, il triangolo viene distaccato dal piano, e passa, sia pure per un istante, per lo spazio a tre dimensioni; in questo caso si dice che *ABC* e *DEF* sono *inversamente uguali*.

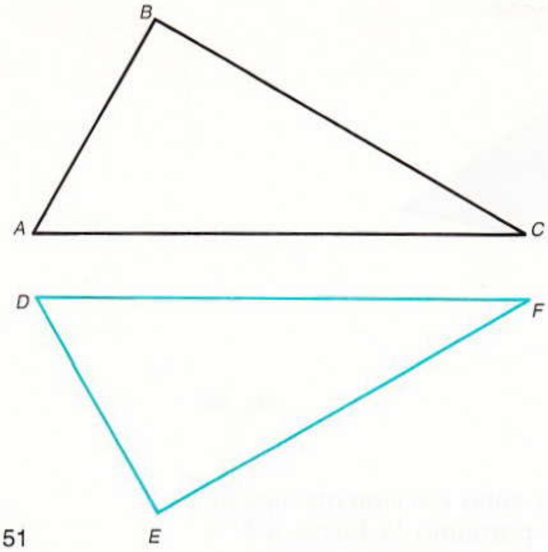


Fig. 51

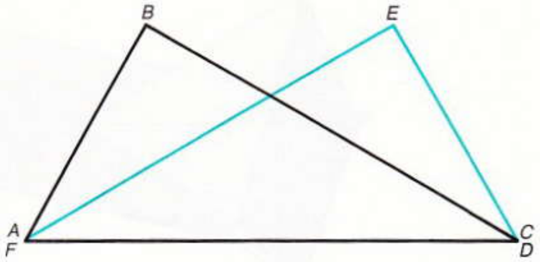


Fig. 52

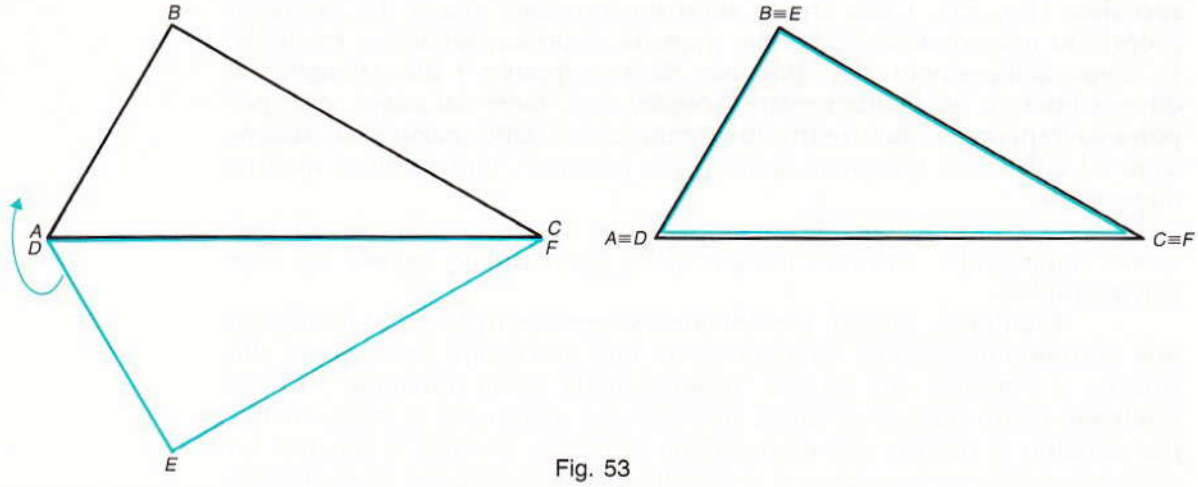


Fig. 53

Passiamo a un'esperienza analoga da eseguire, ora, su due figure solide, due triedri. Consideriamo il triedro formato dalle semirette *a*, *b*, *c*, e il suo opposto al vertice, che è formato dai prolungamenti *a'*, *b'*, *c'* di *a*, *b*, *c* (fig. 54). Per rendersi conto di come sono disposti questi due triedri, supponiamo che le semirette *a*, *b* (e quindi anche *a'*, *b'*) giacciano sul piano del foglio; accade allora che se la semiretta *c* è sollevata dal piano verso di noi, la *c'* si trova al di sotto del piano.

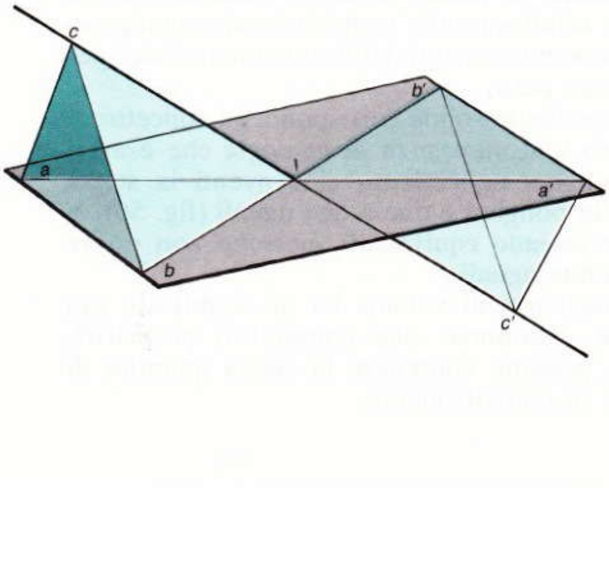


Fig. 54

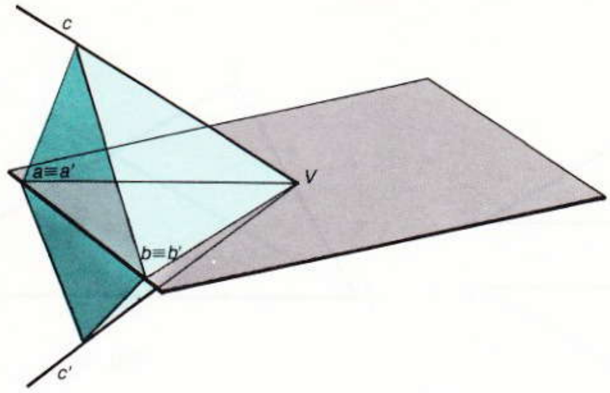


Fig. 55

Un triedro e il suo opposto al vertice sono ovviamente uguali, ma è impossibile sovrapporli; ecco perché: se portiamo la faccia $a'b'$ a coincidere con la faccia uguale ab, la semiretta c' non va a coincidere con la c, ma viene ad essere, rispetto al piano del foglio, la sua immagine speculare (fig. 55). I due triedri sono *inversamente uguali.* Ci troviamo proprio in una condizione analoga a quella di prima, relativa a triangoli. E, come nell'esempio di prima, per far sovrapporre i due triangoli, si doveva operare un ribaltamento, *uscendo, così, fuori dal piano*, ora, per poter sovrapporre i due triedri, dovremmo uscire dallo spazio a tre dimensioni ed entrare in un nuovo spazio "più potente", uno spazio a quattro dimensioni.

Si conclude che la sovrapposizione di due triedri uguali può essere impossibile. *Esistono dunque delle figure solide uguali, ma non sovrapponibili.*

È un fatto, questo, che abbiamo sempre sotto gli occhi, ma su cui non portiamo attenzione: la mano destra non può essere sovrapposta alla sinistra, e s'intende con questo "disposta nella stessa posizione". Ce ne rendiamo conto quando ci capita di avere due guanti per la stessa mano, per esempio la destra; non ne possiamo utilizzare uno per la sinistra! La cosa è possibile se riusciamo a rivoltarlo: quest'operazione equivarrebbe dunque ad uscire dalla terza timensione per entrare nella quarta!

7. L'equivalenza nello spazio

Due solidi sono equivalenti se hanno lo stesso volume. Questa definizione significa che se i due solidi sono dei recipienti essi contengono la stessa quantità di liquido; e, se sono costruiti dello stesso materiale, per esempio di argilla, hanno lo stesso peso.

Il concetto di volume per figure solide corrisponde al concetto di area per figure piane. Vi è però una *mancanza di analogia* che è assai riposta; questa: mentre due poligoni equivalenti, cioè aventi la stessa area, sono sempre scomponibili in poligoni a due a due uguali (fig. 56), si dimostra che **due poliedri, pur essendo equivalenti, possono non essere scomponibili in poliedri a due a due uguali**.

Ciò significa che l'uguaglianza di volume ha un significato più ampio della equiscomponibilità. Insomma, due contenitori poliedrici, come un cubo e un tetrapack, possono contenere la stessa quantità di liquido, ma non essere divisibili in poliedri uguali.

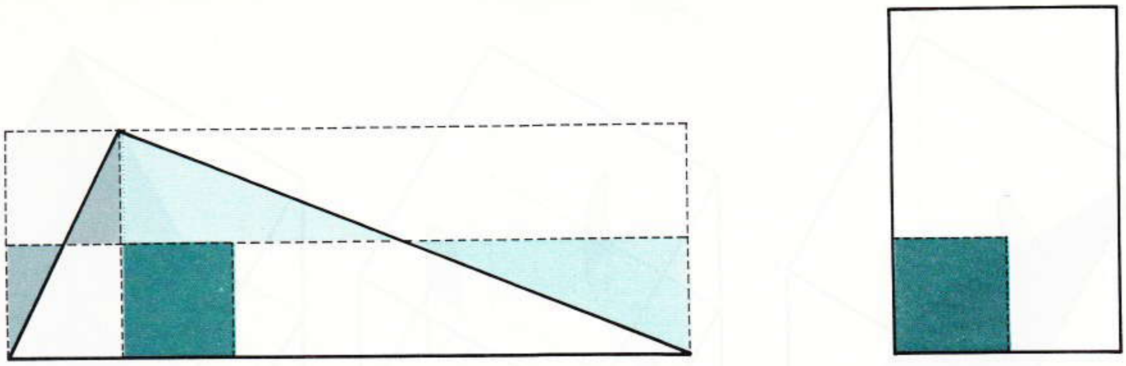


Fig. 56

La dimostrazione di questo *teorema "negativo"* è stata data in epoca relativamente recente (1901) dal matematico tedesco Max Dehn. Il fatto che a questa scoperta si sia arrivati da meno di un secolo, fa capire che la dimostrazione è assai riposta. Noi cercheremo di far cogliere il perché dell'impossibilità di una tale scomposizione fermando l'attenzione sulle ampiezze dei diedri.

Esaminiamo prima il caso di figure piane, considerando gli angoli di un poligono, per esempio di un quadrato. La somma S degli angoli di un quadrato è di 360°, cioè di 2 angoli piatti. Vediamo se questo valore viene alterato quando si divide il quadrato in più poligoni. Osserviamo i quadrati della fig. 57: nel caso 1) la divisione secondo una diagonale non altera la somma S degli angoli perché non si creano degli angoli in più; nel caso 2) la divisione operata con un asse mediano crea due angoli piatti ($\widehat{H}$ e $\widehat{K}$), e quindi la somma degli angoli è quella di prima (360°) aumentata di *2 angoli piatti*; nel caso 3) gli angoli da aggiungere sono $\widehat{H}+\widehat{K}=2$ angoli piatti e l'angolo giro $\widehat{O}$, e quindi in tutto *4 angoli piatti*.

Nei vari casi, dunque, una scomposizione o lascia invariata la somma S o la incrementa di un multiplo di angolo piatto, ossia di un numero intero di angoli retti.

Questo risultato si può facilmente generalizzare alla scomposizione in parti poligonali di qualunque poligono.

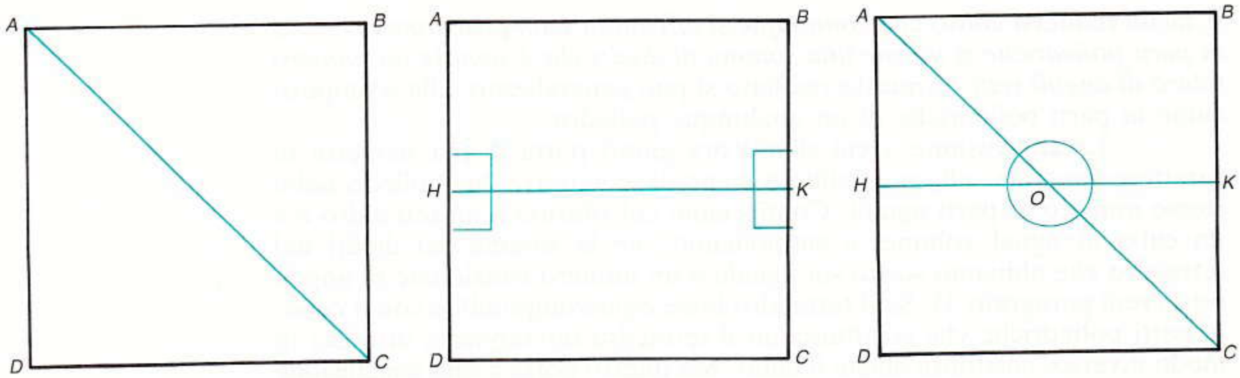


Fig. 57

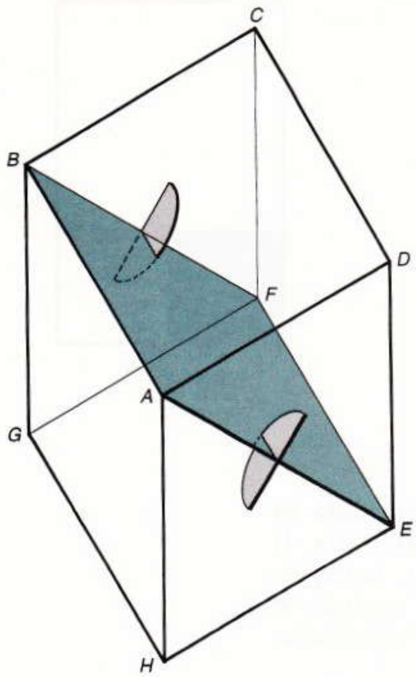


Fig. 58

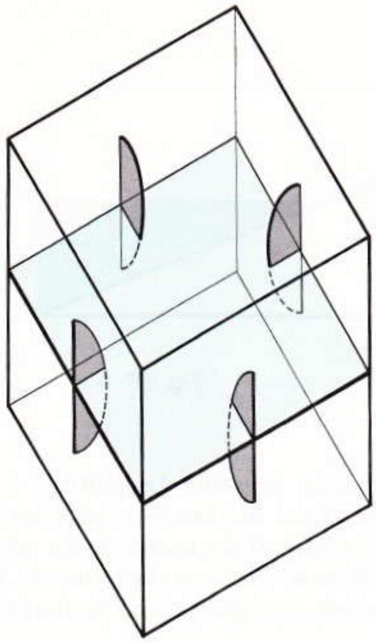


Fig. 59

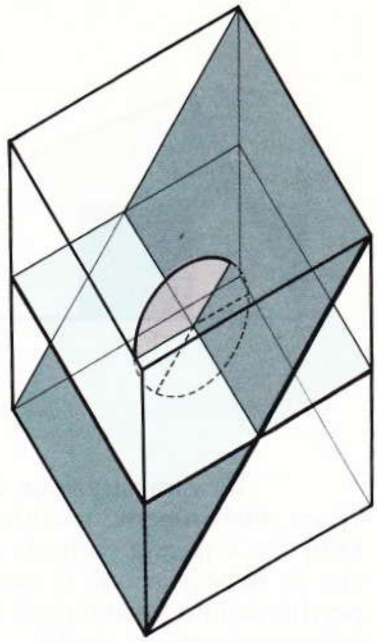


Fig. 60

Passiamo ora ai poliedri. Consideriamo un cubo. La somma S dei diedri del cubo è

$$S=12 \text{ angoli retti.}$$

Se dividiamo il cubo con un piano diagonale (fig. 58) non vengono alterati i diedri di spigoli AB ed EF, ma si creano dei nuovi diedri fra il piano diagonale e la faccia anteriore (due diedri la cui somma è 1 angolo piatto) e fra il piano diagonale e la faccia posteriore (due diedri la cui somma è 1 angolo piatto). Complessivamente, ad S si devono aggiungere *2 angoli piatti*, cioè *4 retti*.

Se dividiamo il cubo con un piano mediano (fig. 59) si creano *8 diedri retti in più* perché il piano sezione, in figura orizzontale, forma con ogni piano verticale 2 diedri retti.

Se poi il cubo è sezionato come in fig. 60, la somma S verrà aumentata di: 4 diedri retti (per il piano diagonale), 8 retti (per il piano orizzontale), e ancora 4 retti, che si creano nell'intersezione dei due piani sezione; complessivamente S aumenta di

$$4+8+4=16 \text{ retti.}$$

È facile rendersi conto che *comunque si effettui la scomposizione del cubo in parti poliedriche si ottiene una somma di diedri che è sempre un numero intero di angoli retti.* E questo risultato si può generalizzare alla scomposizione in parti poliedriche di un qualunque poliedro.

La conclusione a cui siamo ora giunti porta a una scoperta di carattere generale sulla possibilità o meno di scomporre due poliedri nello stesso numero di parti uguali. Cominciamo col riferirci a un tetraedro e a un cubo di ugual volume, e supponiamo che la somma dei diedri del tetraedro che abbiamo scelto sia uguale a un numero irrazionale di angoli retti (vedi paragrafo 3). Se il tetraedro fosse equiscomponibile con il cubo, le parti poliedriche che costituiscono il tetraedro dovrebbero, disposte in modo diverso, costituire anche il cubo. Ma questo porta a una conclusione assurda; ecco perché: la somma dei diedri è espressa, per il tetraedro, da un numero irrazionale (eventualmente aumentato di un numero intero di angoli retti) mentre per il cubo tale somma è espressa da 12 angoli retti (aumentata eventualmente di un numero intero). Accadrebbe allora che un numero irrazionale di angoli retti risulterebbe uguale a un numero intero di angoli retti!

La conclusione assurda è dovuta al fatto che abbiamo supposto che tetraedro e cubo fossero formati dalle stesse parti poliedriche disposte in modo diverso.

Vi sono dunque dei tetraedri non equiscomponibili con il cubo. Ora, siccome ogni poliedro convesso può scomporsi in tetraedri (fig. 61), si arriva al *teorema di Dehn*: **due poliedri equivalenti possono non essere equiscomponibili**.

Il concetto di equivalenza fra i poliedri ha dunque un significato più ampio della equiscomponibilità.

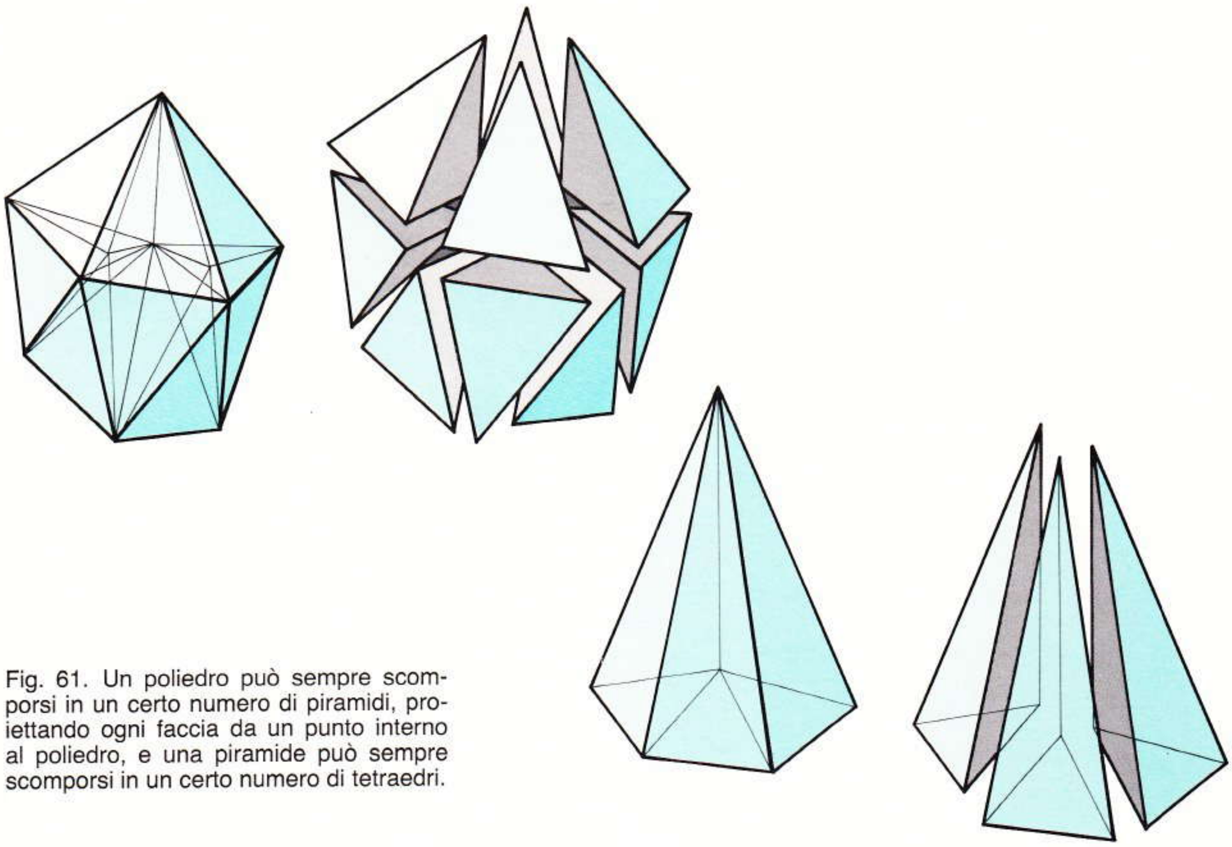


Fig. 61. Un poliedro può sempre scomporsi in un certo numero di piramidi, proiettando ogni faccia da un punto interno al poliedro, e una piramide può sempre scomporsi in un certo numero di tetraedri.

6. Parte seconda

Volumi e aree

1. Il Principio di Cavalieri
2. Parallelepipedo
3. Prisma
4. Cilindro
5. Piramide
6. Cono
7. Sfera
8. La sfera ha superficie minima a parità di volume

1. Il Principio di Cavalieri

In questa Parte seconda studieremo i due problemi:

a) determinazione dell'area della superficie di un solido[1];
b) determinazione del volume di un solido.

Consideriamo separatamente questi problemi.

a) Determinare l'area della superficie è facile solo in questi casi:
1) se la superficie è formata di poligoni, cioè se il solido è un *poliedro*; in tal caso infatti basta determinare l'area di ogni poligono, faccia del poliedro;
2) se la superficie è *sviluppabile sul piano*, come per esempio il cilindro (fig. 1). In questi casi il problema si riconduce a determinare l'area di una figura piana. Ma, in generale, una superficie non è sviluppabile sul piano – basta pensare alla sfera –, e quindi, spesso, la determinazione dell'area della superficie porta a problemi complessi.

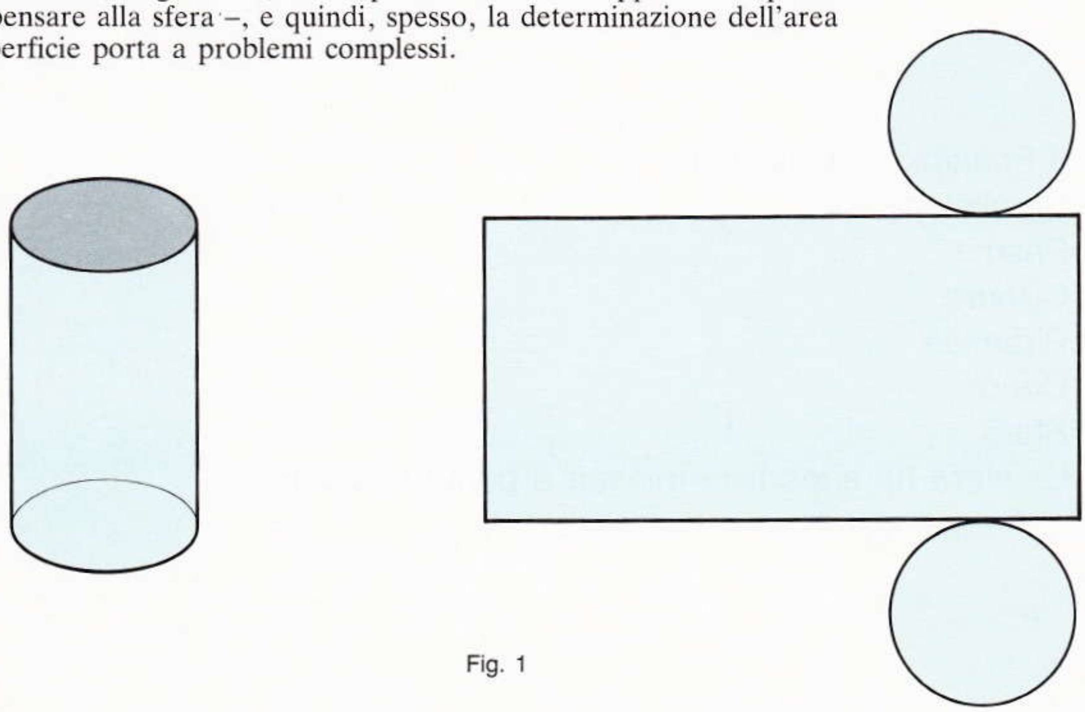


Fig. 1

B(Per il calcolo del volume ci varremo, spesso, di un *principio* che trova la sua motivazione in riflessioni di carattere concreto. I concetti che tratteremo, intuiti già da Archimede, trovano il loro pieno sviluppo nella scuola di Galileo, soprattutto per opera di Bonaventura Cavalieri (1598-1647) e di Evangelista Torricelli (1608-1647). L'idea viene dal considerare un solido come formato da tanti strati paralleli di spessore sottilissimo (fig. 2), quali – per usare proprio un'espressione di Cavalieri – «le pagine di un libro». Il volume del solido risulta, così, costituito dalla somma di questi strati.

Alla concezione statica di "somma di strati sottilissimi", il Cavalieri stesso sostituisce una concezione dinamica: quella di considerare il volume di un solido, per esempio di un parallelepipedo rettangolo, come "spazzato" dalla base che si sposta parallelamente a se stessa per tutta l'altezza (fig. 3), o, se si tratta per esempio di una piramide, dalla base che si sposta parallelamente a se stessa rimpicciolendosi opportunamente (fig. 4).

[1] È bene fare una precisazione: l'area è la misura di una superficie, così come la lunghezza è la misura di un segmento.

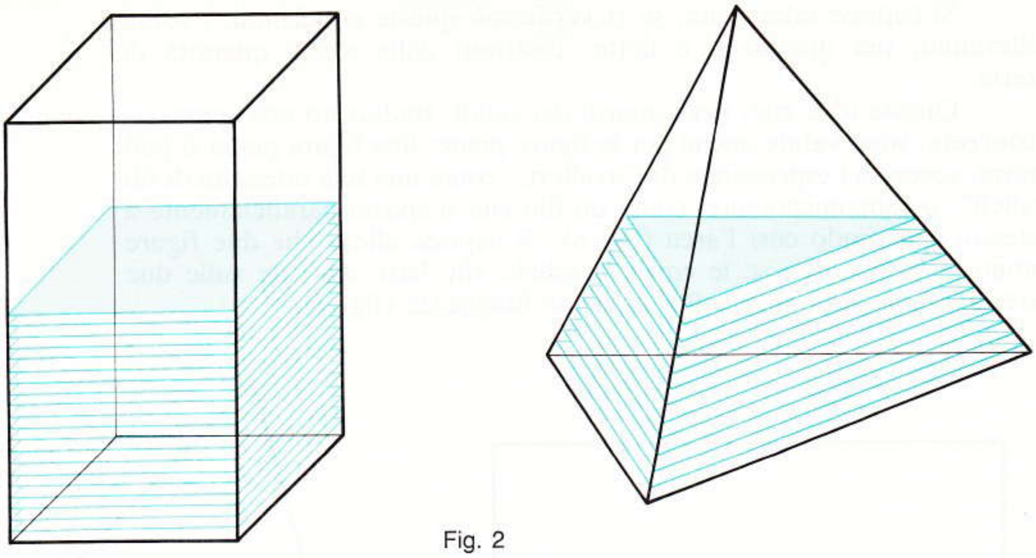


Fig. 2

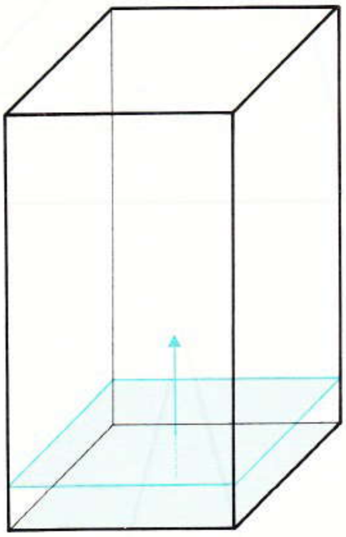


Fig. 3

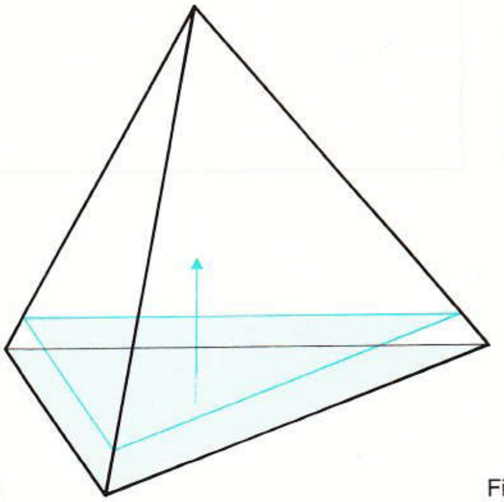


Fig. 4

A partire da queste considerazioni si può enunciare come proprietà di carattere evidente il **principio di Cavalieri: se più solidi, di uguale altezza e poggiati sullo stesso piano, sono tali che, segati con piani paralleli alla base, danno a qualunque livello figure di uguale area, allora i solidi hanno lo stesso volume** (fig. 5)[1].

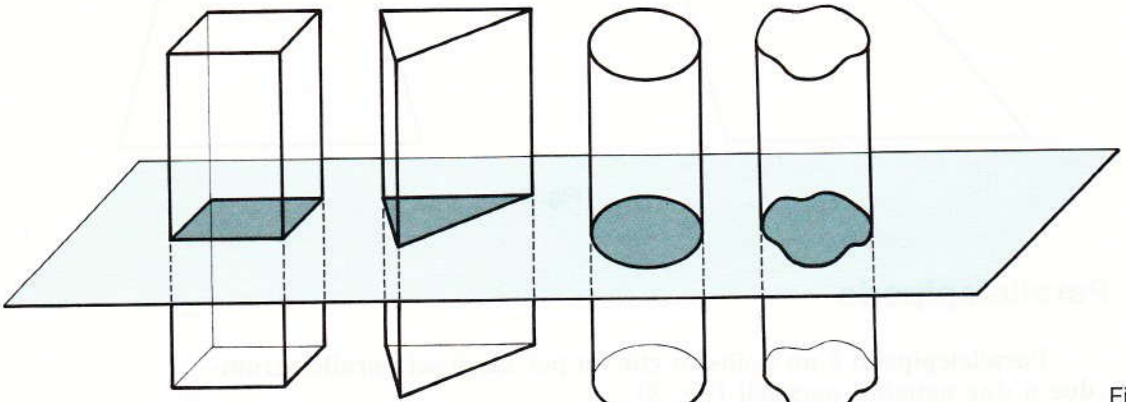


Fig. 5

[1] Si osserva che la condizione che i solidi abbiano uguale altezza è contenuta nel testo dell'enunciato, e si può quindi omettere.

Si capisce infatti che, se si verificano queste condizioni, i solidi risulteranno, per quanto si è detto, costituiti dalla stessa quantità di materia.

Queste idee che, nei riguardi dei solidi, traducono una sensazione concreta, sono valide anche per le figure piane: una figura piana si può pensare, secondo l'espressione di Cavalieri, "come una tela intessuta di fili paralleli", o, dinamicamente, come un filo che si sposta parallelamente a se stesso, spazzando così l'area (fig. 6). Si capisce allora che due figure avranno la stessa area se le corde parallele alle basi, staccate sulle due figure, avranno, ad ogni livello, la stessa lunghezza (fig. 7).

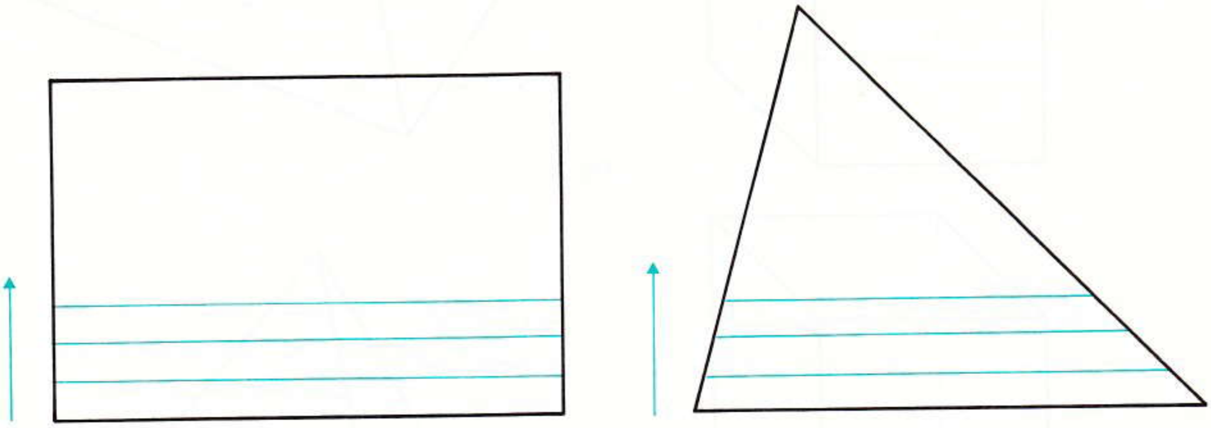


Fig. 6

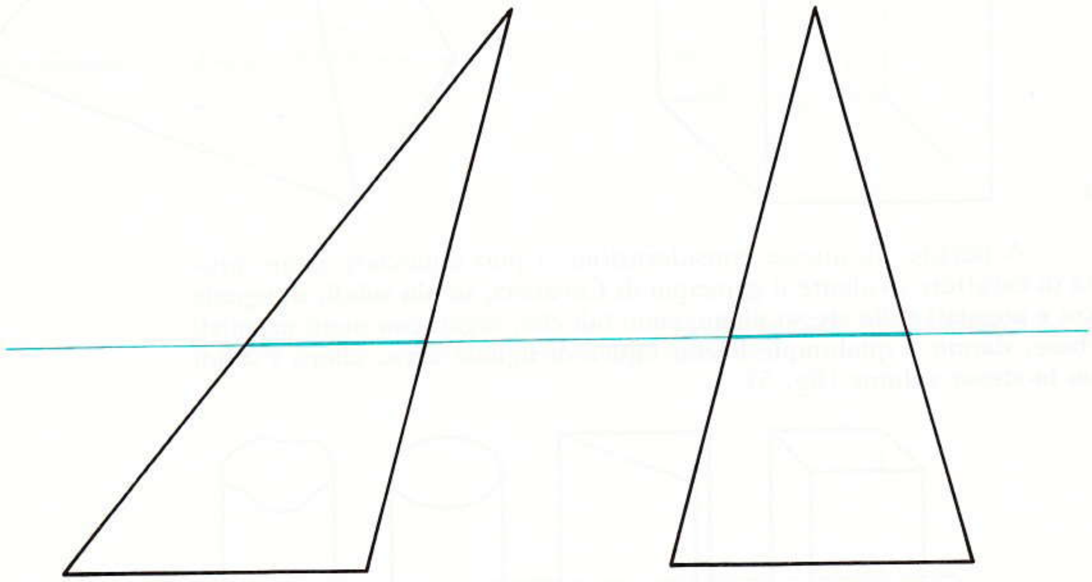


Fig. 7

2. Parallelepipedo

Parallelepipedo è un poliedro che ha per facce sei parallelogrammi a due a due uguali e paralleli (fig. 8).

Se gli spigoli di quattro facce sono perpendicolari ai piani delle altre due facce, il parallelepipedo si dice **retto**; in questo caso, quattro facce sono dei rettangoli (fig. 9).

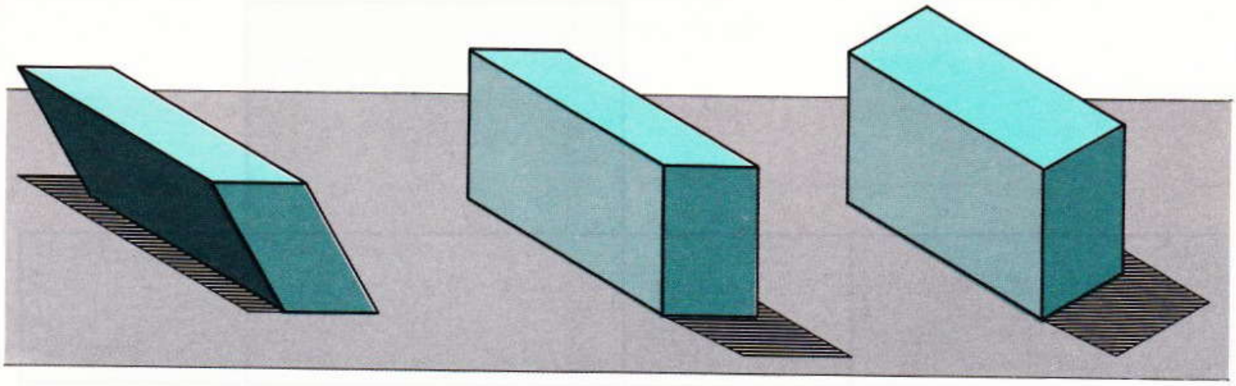


Fig. 8 Fig. 9 Fig. 10

Se poi tutti i parallelogrammi sono rettangoli, si ha il **parallelepipedo rettangolo** (fig. 10).

Il **cubo** è un parallelepipedo particolare: ha per facce dei quadrati (fig. 11).

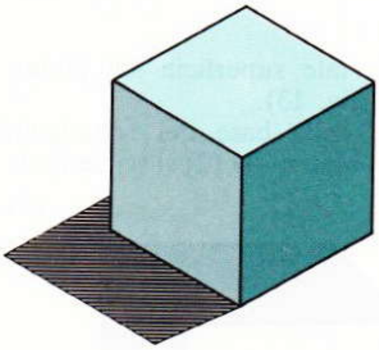


Fig. 11

A) Area della superficie

Cominciamo dal parallelepipedo retto a base rettangolare (fig. 12). È chiaro che la superficie è formata da 6 rettangoli a due a due uguali; perciò, se indichiamo con a,b,c la lunghezza dei tre spigoli, e con S_t l'area di tutta la superficie, si ha:

$$S_t=2ab+2ac+2bc. \tag{1}$$

Questa formula, scritta al modo seguente

$$S_t=(2a+2b)\cdot c+2ab, \tag{2}$$

fa capire che l'area della *superficie totale* del parallelepipedo rettangolo e retto, è data dall'area della *superficie laterale*

$$S_l=(2a+2b)\cdot c$$

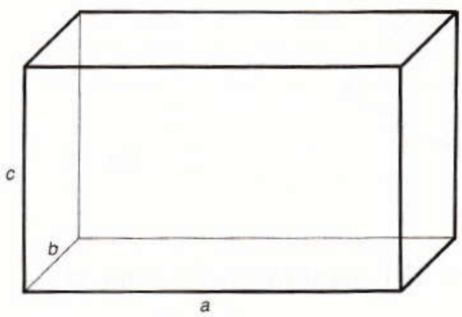


Fig. 12

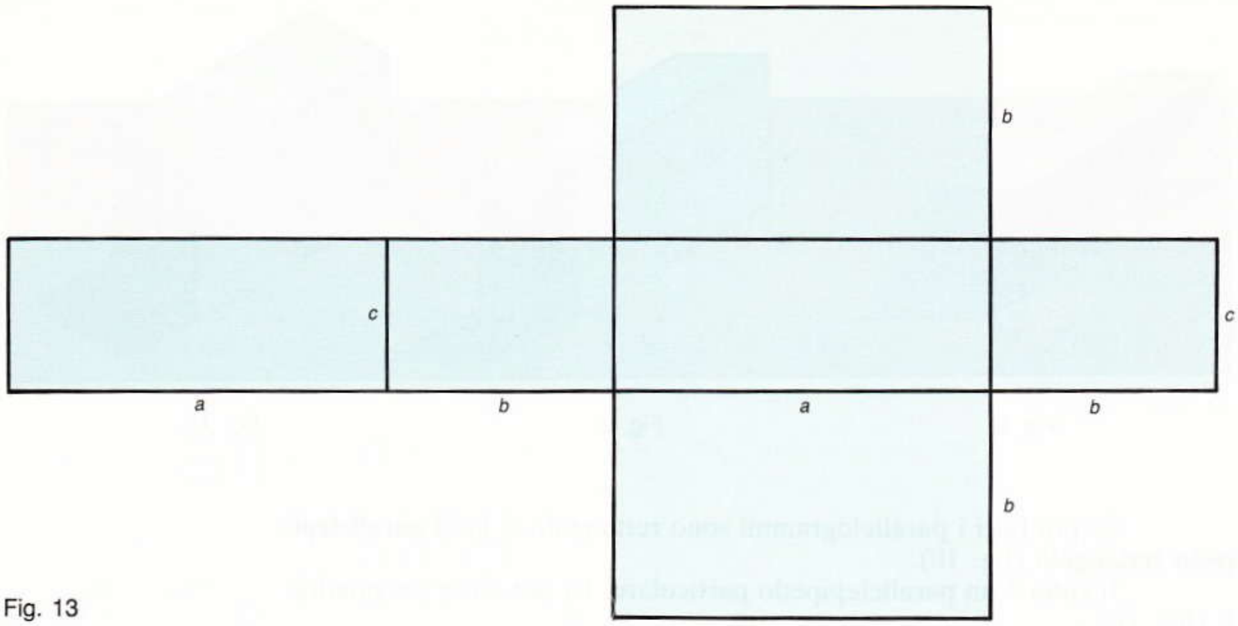


Fig. 13

e cioè dal rettangolo ottenuto sviluppando tale superficie sul piano, aumentata dell'area $2A=2ab$ delle due basi (fig. 13).

Se indichiamo con p il perimetro della base del rettangolo sviluppo della superficie laterale e con h la sua altezza, la (2) si scrive così:

$$S_t=ph+2A. \tag{3}$$

Nel caso del **cubo** (fig. 14), essendo

$$a=b=c,$$

la superficie S è espressa da

$$S=6l^2,$$

dove l indica la lunghezza del lato.

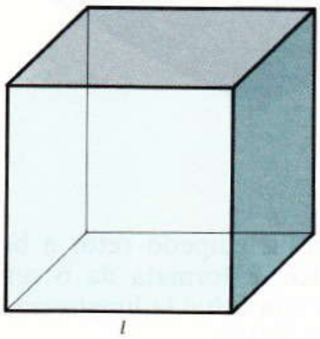


Fig. 14

Se *il parallelepipedo è obliquo* (fig. 15), le facce sono dei parallelogrammi, non dei rettangoli. La superficie non può essere espressa dalla formula (3) perché l'altezza delle varie facce non corrisponde alla lunghezza degli spigoli; si deve allora determinare l'altezza di ogni faccia.

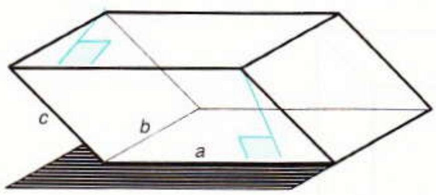


Fig. 15

B) Volume

Per la determinazione del volume del *parallelepipedo retto* ci basiamo sulle idee di Cavalieri.

Si ottiene il volume spostando, parallelamente a se stessa, la base lungo l'altezza (fig. 16); da questa concezione dinamica risulta che *il volume è dato dal prodotto dell'area A della base per l'altezza h*:

$$V=A\cdot h. \qquad (4)$$

Se il parallelepipedo ha base *rettangolare*, la (4) può scriversi così:

$$V=abc, \qquad (5)$$

dove a,b indicano le dimensioni del rettangolo base, e c indica l'altezza (fig. 17).

Nel caso del *cubo*, se l indica la lunghezza dello spigolo si avrà

$$V=l^3.$$

È facile rendersi conto che il volume del *parallelepipedo obliquo* è dato sempre dalla formula

$$V=A\cdot h. \qquad (4)$$

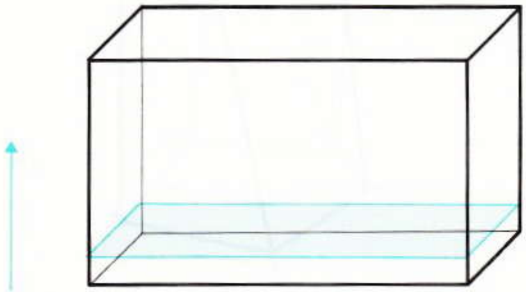


Fig. 16

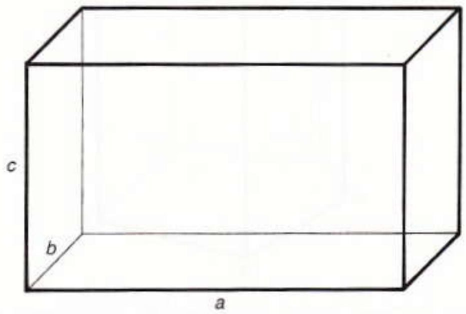


Fig. 17

Basta infatti, in base al principio di Cavalieri, confrontare il parallelepipedo obliquo con un parallelepipedo retto avente la stessa altezza e per base un parallelogramma equivalente al parallelogramma base dell'obliquo (fig. 18); risulta ovviamente che se i due solidi sono poggiati sullo stesso piano, le sezioni operate con piani paralleli alla base sono, per ciascuna delle due figure, uguali alle basi, e, quindi, risultano fra loro equivalenti.

Occorre fare attenzione al fatto che, ora, l'altezza h del parallelepipedo (fig. 19) non è lunga come uno spigolo: perciò, non ci si può valere della formula (5).

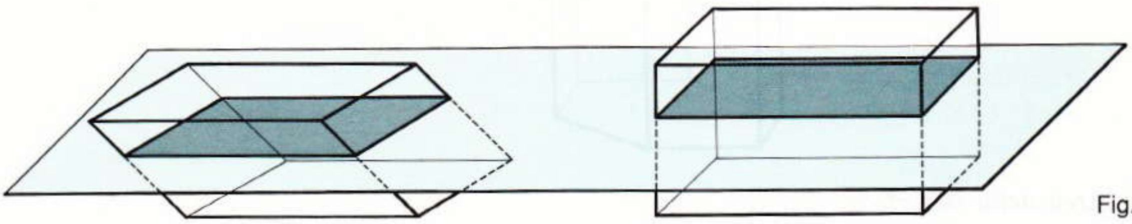


Fig. 18

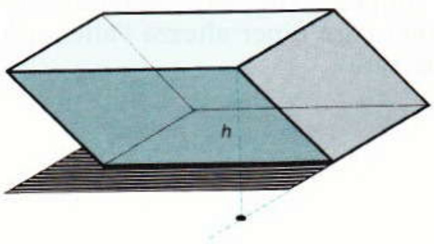


Fig. 19

3. Prisma

Prisma è un poliedro limitato da due poligoni uguali giacenti su piani paralleli (le basi del prisma) e da parallelogrammi aventi per lati opposti i lati corrispondenti delle basi (le facce del prisma) fig. 20.

La definizione è assai lunga, ma basta osservare la fig. 21 per rendersi conto che non si può omettere alcuna precisazione.

È chiaro che *il parallelepipedo è un prisma particolare*: i poligoni base sono dei parallelogrammi.

Un prisma è **retto** (fig. 22) se gli spigoli delle facce sono perpendicolari alle basi; in tal caso le facce sono dei rettangoli.

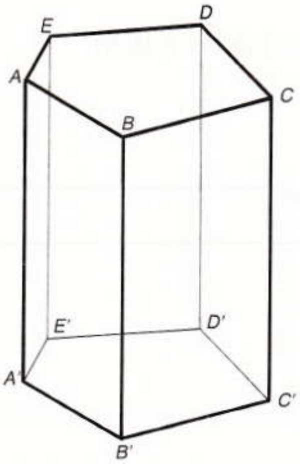


Fig. 20. Questo solido rappresenta un prisma a basi pentagonali.

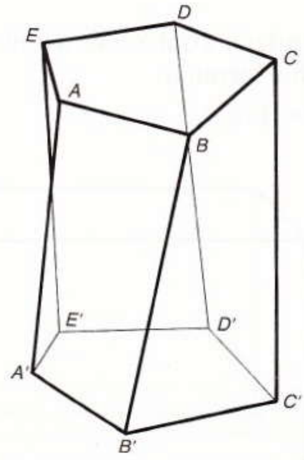


Fig. 21. Questo solido *non è* un prisma: i poligoni base sono uguali e appartengono a piani paralleli, ma le facce laterali non sono parallelogrammi; i lati opposti sono sghembi fra loro. È come se il prisma della fig. 20 avesse subito *una torsione*.

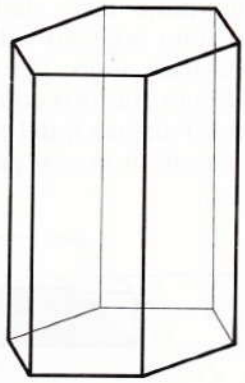


Fig. 22

A) Area della superficie

Riferiamoci al prisma retto (fig. 23). Siccome la superficie laterale del prisma è, quando si sviluppi sul piano (fig. 24), un rettangolo che ha per base il perimetro p del poligono base e per altezza l'altezza h del prisma, l'area della superficie laterale sarà

$$S_l = ph;$$

l'area della totale sarà

$$S_t = ph + 2A,$$

dove A è l'area del poligono base.

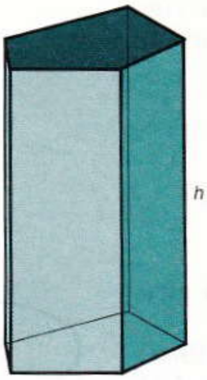


Fig. 23

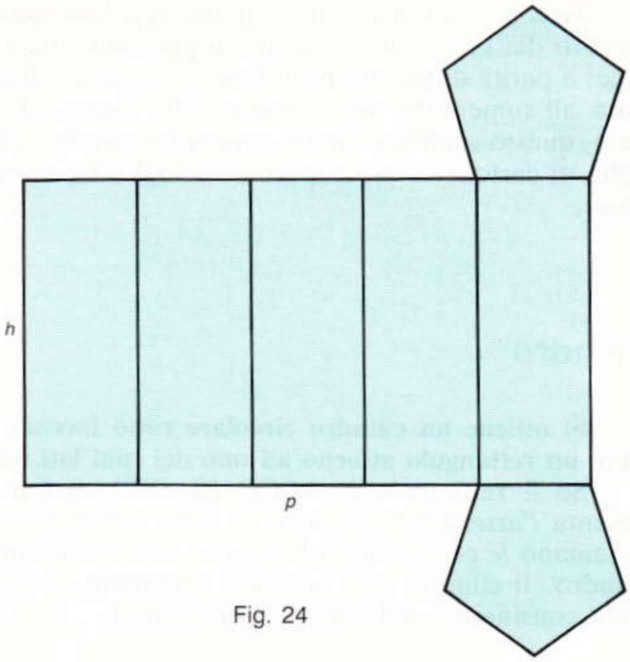


Fig. 24

B) Volume

Per la determinazione del volume basta confrontare un prisma con un parallelepipedo avente la stessa altezza e base equivalente (fig. 25) per rendersi conto, in base al principio di Cavalieri, della validità della formula

$$V = A \cdot h.$$

È interessante confrontare *il volume di prismi di uguale altezza e aventi per base poligoni regolari isoperimetrici* (fig. 26).

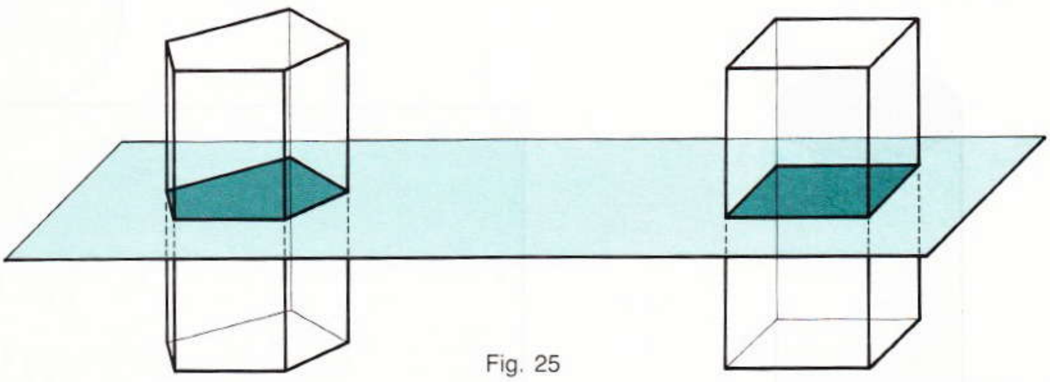


Fig. 25

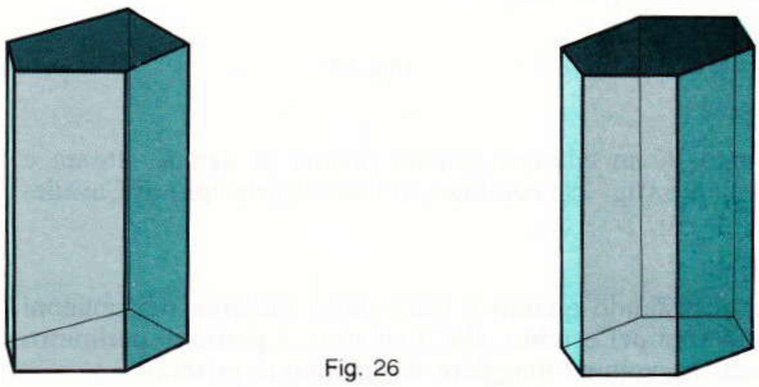


Fig. 26

Siccome l'area di un poligono regolare aumenta all'aumentare del numero dei lati, fermo restando il perimetro (cap. 5, paragrafo 5), si avrà che, a parità di perimetro di base e di altezza, il volume di un prisma aumenta all'aumentare del numero delle facce. Da un punto di vista concreto, questo significa che un contenitore di data altezza, costruito con un foglio di cartone, è più capace se il foglio ha un numero maggiore di piegature.

4. Cilindro

Si ottiene un cilindro circolare retto facendo ruotare di un giro completo un rettangolo attorno ad uno dei suoi lati tenuto fisso.

Se il rettangolo è $ABCD$ (fig. 27), il lato AB, tenuto fisso, rappresenta *l'asse* del cilindro, e le varie posizioni assunte dal lato CD rappresentano *le generatrici*; i lati AD e BC descrivono dei cerchi, *le basi* del cilindro. Il cilindro così ottenuto è **limitato**, a differenza del cilindro illimitato considerato nel Cap. 2, paragrafo 1.

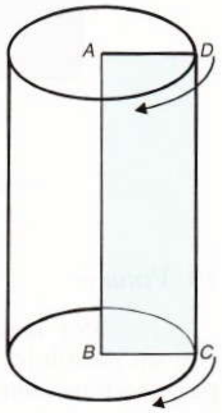


Fig. 27

A) Area della superficie

Per la determinazione dell'area della superficie di un cilindro si segue un ragionamento analogo a quello svolto per il prisma. Si immagina di tagliare il cilindro lungo una generatrice e di svilupparlo sul piano: si ha un rettangolo che ha per base la lunghezza della circonferenza e per altezza l'altezza del cilindro (fig. 28). L'area della superficie laterale risulta quindi

$$S_l = 2\pi r \cdot h,$$

dove r è il raggio e h l'altezza; la superficie totale avrà l'area

$$S_t = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2.$$

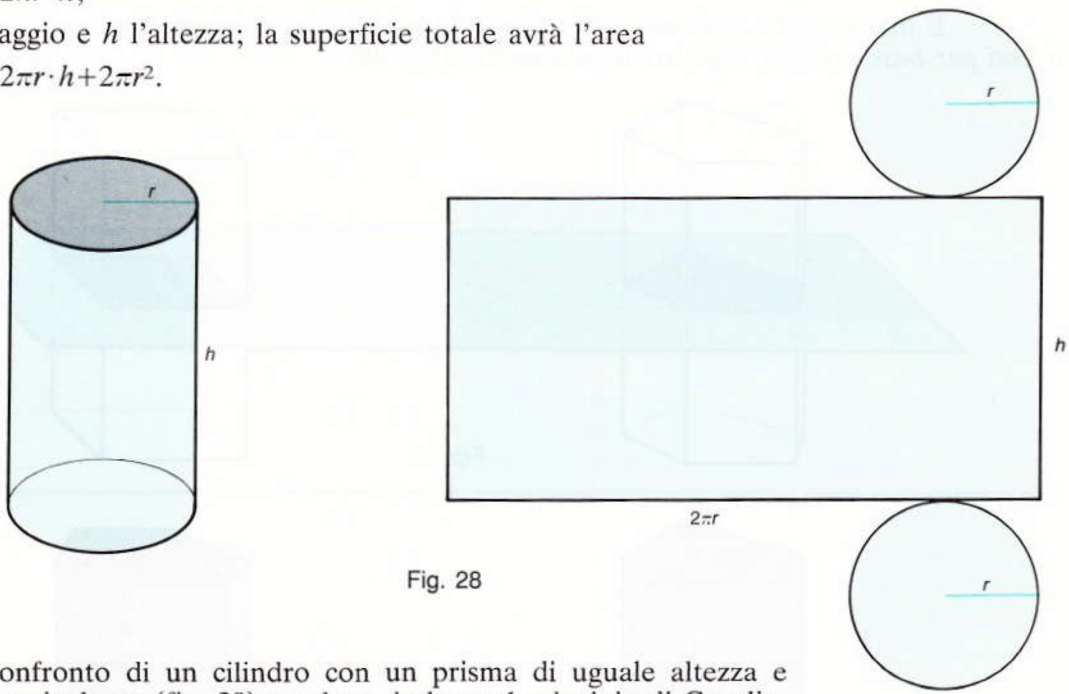


Fig. 28

B) Volume

Il confronto di un cilindro con un prisma di uguale altezza e avente base equivalente (fig. 29) conduce, in base al principio di Cavalieri, alla formula:

$$V = \pi r^2 \cdot h.$$

Si può osservare, ricordando quanto è stato detto sull'area dei poligoni isoperimetrici e sull'area del cerchio, che il cilindro, a parità di perimetro di base e di altezza, ha volume maggiore di qualunque prisma.

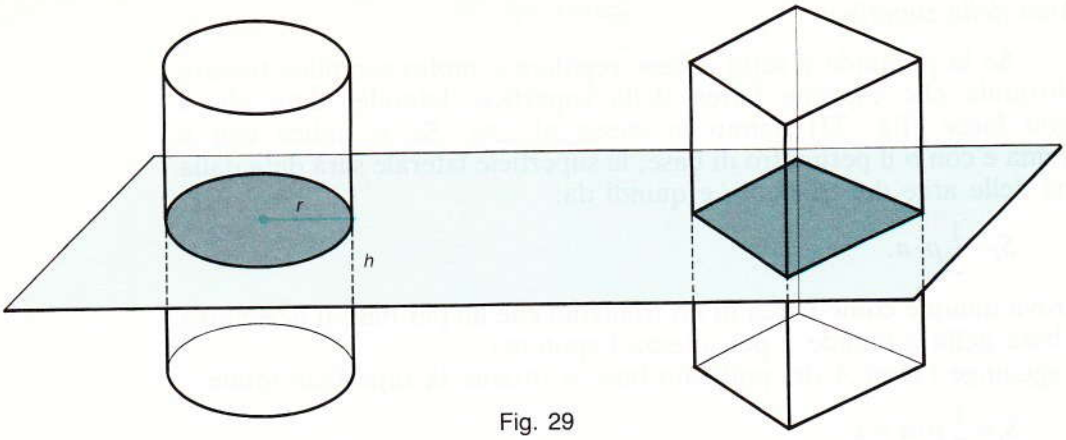


Fig. 29

5. Piramide

Piramide di vertice *V* è un poliedro limitato da un poligono, giacente in un piano non passante per *V*, e da triangoli aventi come vertice comune il punto *V* e come basi i singoli lati del poligono (fig. 30).

Se la base è un *poligono regolare* e se *l'altezza cade nel centro* della base (fig. 31), la piramide si dice **retta a base regolare**. I triangoli facce sono, in tal caso, uguali e isosceli; l'altezza di ogni triangolo si dice *apotema* della piramide.

Vogliamo ora vedere come si determina *l'area della superficie e il volume* di una piramide.

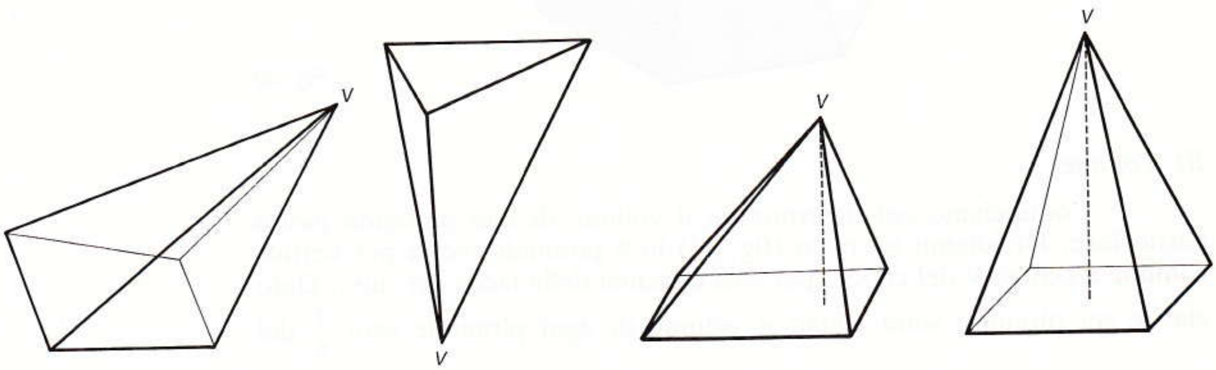


Fig. 30

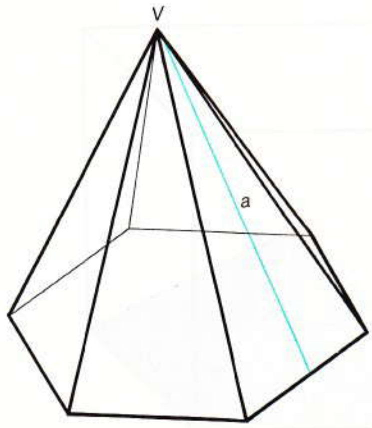


Fig. 31

A) Area della superficie

Se la piramide è retta a base regolare è molto semplice trovare una formula che esprima l'area della superficie laterale, dato che i triangoli facce (fig. 32) hanno la stessa altezza. Se si indica con a l'apotema e con p il perimetro di base, la superficie laterale sarà data dalla somma delle aree dei triangoli, e quindi da:

$$S_l=\frac{1}{2}p\cdot a.$$

S_l si trova dunque come l'area di un triangolo che ha per base il perimetro della base della piramide e per altezza l'apotema.
Se si aggiunge l'area A del poligono base si ottiene la superficie totale:

$$S_t=\frac{1}{2}p\cdot a+A.$$

È chiaro che se la facce triangolari non sono uguali, per avere la superficie laterale si dovranno calcolare separatamente le aree delle singole facce.

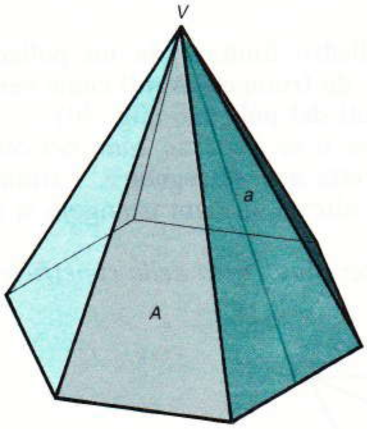


Fig. 32

B) Volume

Cominciamo col determinare il volume di una piramide molto particolare. Dividiamo un cubo (fig. 33) in 6 piramidi aventi per vertice comune il centro V del cubo e per basi ciascuna delle facce del cubo. Dato che le sei piramidi sono uguali il volume di ogni piramide sarà $\frac{1}{6}$ del

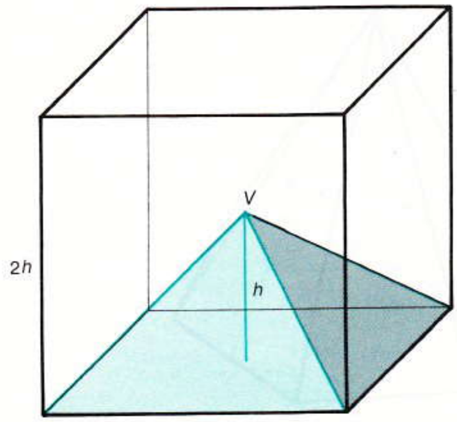


Fig. 33

volume del cubo. Ora, il volume del cubo è dato dal prodotto dell'area A della base per l'altezza, che indichiamo con $2h$; si avrà perciò:

$$V_{\text{pir.}}=\frac{1}{6}V_{\text{cubo}}=\frac{1}{6}A\cdot 2h,$$

e quindi il volume della piramide è dato da:

$$V=\frac{1}{3}A\cdot h.$$

Il volume di questa piramide particolare è dato dunque da $\frac{1}{3}$ dell'area della base per l'altezza.

Faremo vedere che questa formula vale per qualunque piramide. Ragioneremo in base al principio di Cavalieri. Cominciamo col dimostrare due proprietà.

1) Se si sega una piramide con un piano parallelo alla base, *il poligono sezione è simile al poligono base.*

Riferiamoci alla fig. 34: V è il vertice della piramide, $ABCDE$ è il poligono base e $A'B'C'D'E'$ è il poligono sezione. Per dimostrare che questi due poligoni sono simili occorre far vedere che:

- gli angoli corrispondenti $\widehat{A}$ e $\widehat{A}'$, $\widehat{B}$ e $\widehat{B}'$, ... sono uguali;
- i lati corrispondenti AB e $A'B'$, BC e $B'C'$, ... sono in proporzione.

La prima proprietà deriva immediatamente dal fatto che i lati corrispondenti dei due poligoni sono l'intersezione di una faccia della piramide con piani paralleli, e quindi

$$A'B'//AB, \qquad B'C'//BC, \ldots;$$

di conseguenza saranno uguali gli angoli formati da coppie di rette parallele, e cioè

$$\widehat{B}'=\widehat{B}, \qquad \widehat{C}'=\widehat{C}, \ldots$$

Per dimostrare la seconda proprietà riferiamoci alla fig. 35. Si osserva subito che i triangoli

$$VAB \text{ e } VA'B'; \qquad VBC \text{ e } VB'C', \ldots$$

sono simili perché hanno angoli corrispondenti uguali; di conseguenza i lati corrispondenti saranno in proporzione, e cioè:

$$A'B':AB=B'C':BC=\ldots$$

Si conclude che il poligono sezione è simile al poligono base.

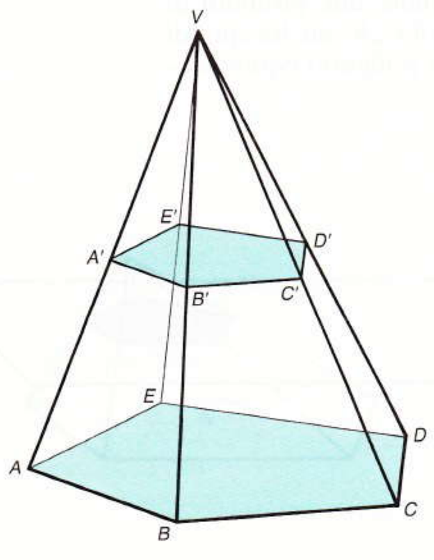


Fig. 34

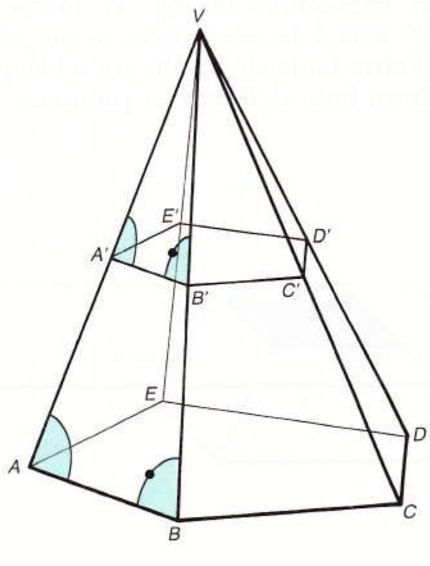


Fig. 35

2) Vogliamo ora dimostrare che *le aree S e S' dei poligoni simili ABCDE e A'B'C'D'E' stanno fra loro come i quadrati delle altezze delle due piramidi che hanno tali poligoni come basi* (fig. 36). Ciò discende dal fatto che le aree di poligoni simili stanno fra loro come i quadrati di due lati corrispondenti; si ha, ad esempio

$$S:S'=AB^2:A'B'^2.$$

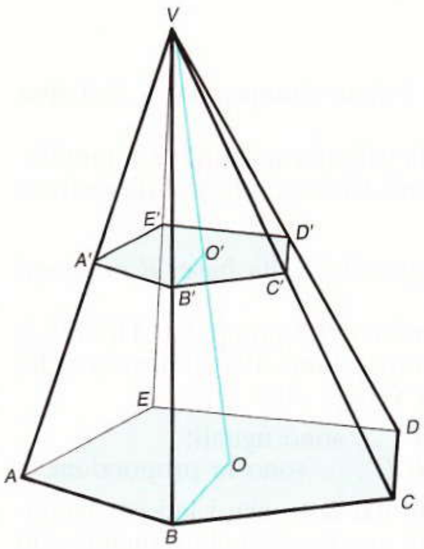


Fig. 36

Si ha poi:

dai triangoli simili $VAB, VA'B'$: $\quad AB:A'B'=VB:VB'$
dai triangoli simili $VOB, VO'B'$: $\quad VB:VB'=VO:VO'$,

e quindi:

$$AB:A'B'=VO:VO',$$

e finalmente

$$S:S'=VO^2:VO'^2. \qquad (1)$$

È proprio in base alla proprietà (1) che si riesce a dimostrare che il volume di una piramide è dato dalla stessa formula che abbiamo trovato per la piramide sesta parte del cubo, e cioè che vale sempre la formula:

$$V=\frac{1}{3}A\cdot h.$$

Allo scopo, riferiamoci alla fig. 37, in cui sono disegnate due piramidi di basi Q e P: una è la sesta parte di un cubo di spigolo $2h$, ed ha quindi altezza h; l'altra ha la stessa altezza ed ha per base un poligono equivalente al quadrato base della prima piramide.

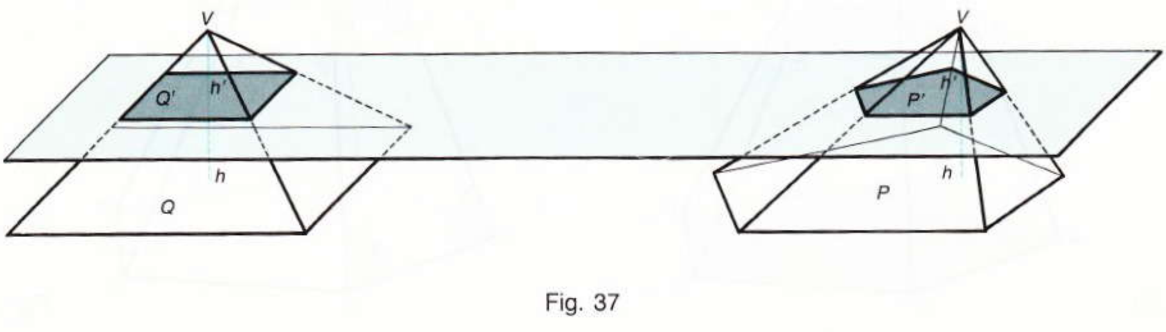


Fig. 37

Vogliamo dimostrare che le due piramidi, segate con un piano parallelo alla base condotto a una qualunque distanza h' dal vertice, danno luogo a sezioni Q' e P' equivalenti; se si verifica questa equivalenza, allora le due piramidi, in base al principio di Cavalieri, avranno lo stesso volume.

Per la proprietà 2) si ha:

$$Q:Q'=h^2:h'^2$$

e

$$P:P'=h^2:h'^2.$$

Risulta quindi

$$Q:Q'=P:P'$$

ossia

$$Q':P'=Q:P.$$

Ora, siccome per ipotesi è

$$Q=P,$$

risulterà anche

$$Q'=P'.$$

Si conclude che il volume di una qualunque piramide è dato da:

$$V=\frac{1}{3}A\cdot h.$$

Un'attenta lettura della formula ottenuta ci dice che il volume di una piramide risulta $\frac{1}{3}$ del volume di un prisma che ha la stessa base e la stessa altezza, e questo perché il volume di un prisma è dato da

$$V=A\cdot h.$$

La formula mette dunque in evidenza una proprietà che è difficile vedere a occhio: un prisma si compone di tre piramidi equivalenti (fig. 38).

Anche a proposito delle piramidi vale la stessa osservazione fatta a proposito dei prismi di uguale altezza e aventi per base poligoni isoperimetrici: il volume di una piramide aumenta all'aumentare del numero dei lati del poligono base, ferma restando l'altezza e il perimetro del poligono. Riprenderemo questa osservazione a proposito del cono.

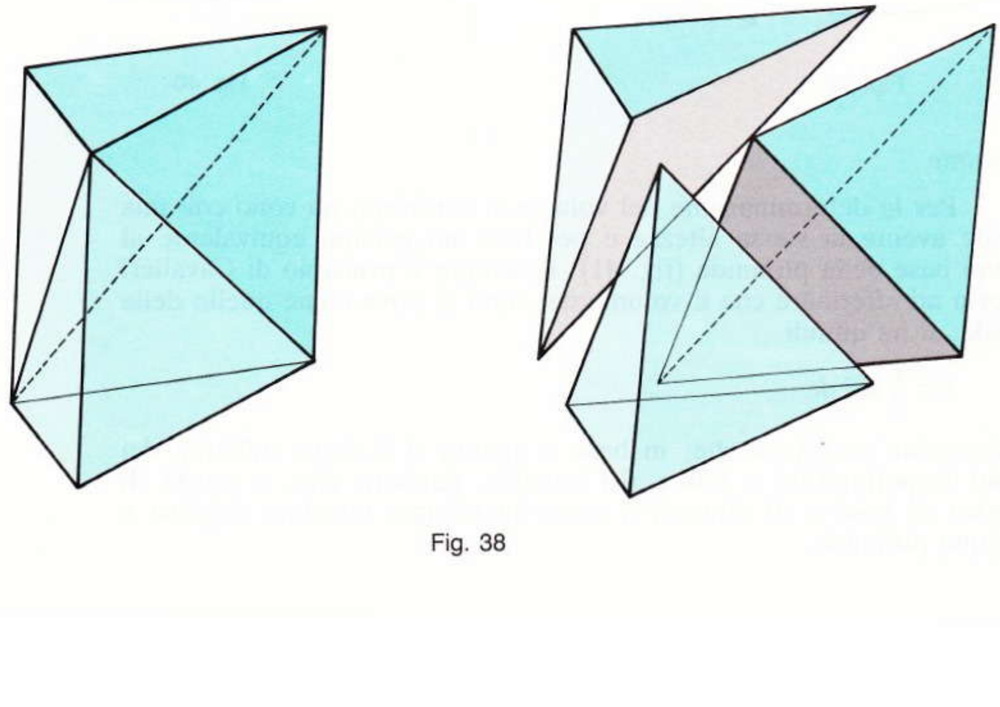


Fig. 38

6. Cono

Si ottiene un cono circolare retto facendo ruotare di un giro completo un triangolo rettangolo attorno a uno dei cateti tenuto fisso.

Se il triangolo rettangolo è ABC (fig. 39), il cateto AB, tenuto fisso, è *l'asse* del cono, e le varie posizioni assunte dall'ipotenusa AC rappresentano *le generatrici*; il cateto BC descrive un cerchio, *la base* del cono.

Il cono così ottenuto è **limitato**, a differenza del cono illimitato, considerato nel Cap. 2, paragrafo 1.

B) Area della superficie

Se si immagina di tagliare la superficie del cono lungo una generatrice e di svilupparla sul piano si ha *un settore circolare* (fig. 40). L'arco del settore corrisponde alla lunghezza della circonferenza e il raggio del settore corrisponde all'apotema a del cono. L'area della superficie laterale del cono è dunque uguale all'area del settore, ossia è uguale all'area di un triangolo che ha per base la lunghezza dell'arco, e cioè $2\pi r$, e per altezza l'apotema a; si ha:

$$S_l = \frac{1}{2} 2\pi r \cdot a = \pi r a.$$

L'area della superficie totale si otterrà aggiungendo alla laterale l'area del cerchio base; si ha:

$$S_t = \pi r a + \pi r^2.$$

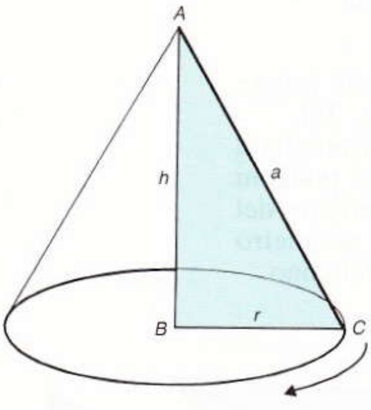


Fig. 39

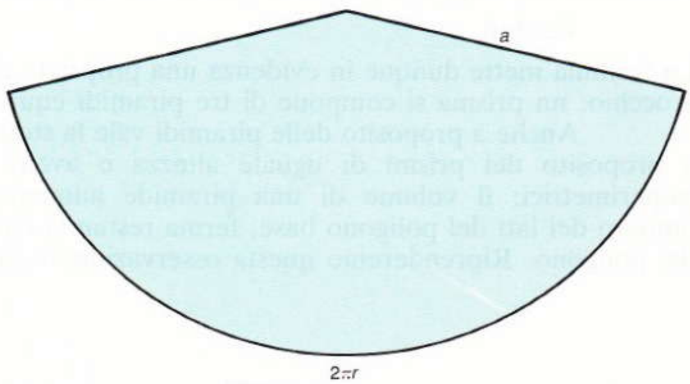


Fig. 40

B) Volume

Per la determinazione del volume si confronta un cono con una piramide avente la stessa altezza e per base un cerchio equivalente al poligono base della piramide (fig. 41). È sempre il principio di Cavalieri che porta ad affermare che il volume del cono si trova come quello della piramide; si ha quindi

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h.$$

È interessante osservare che, in base a quanto si è detto sull'area dei poligoni isoperimetrici e l'area del cerchio, risulterà che, a parità di perimetro di base e di altezza, il cono ha volume massimo rispetto a qualunque piramide.

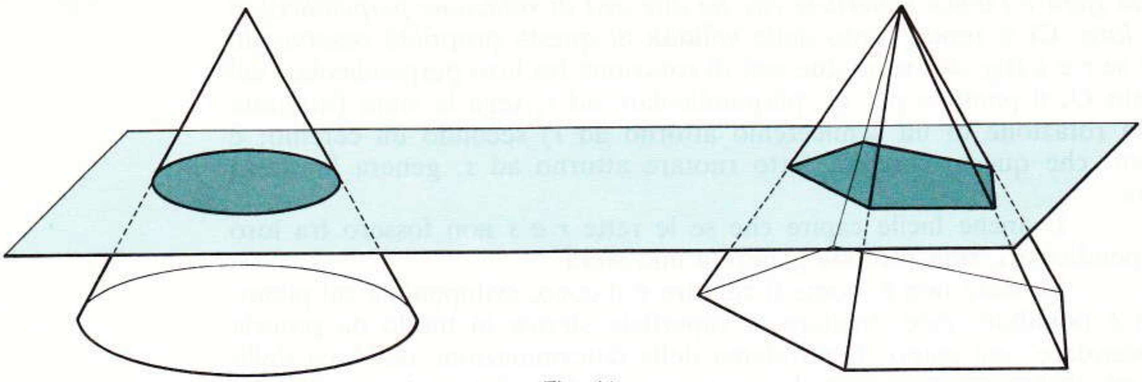


Fig. 41

7. Sfera

Si ottiene una sfera facendo ruotare di un giro completo un semicerchio attorno al diametro (fig. 42).

Ogni punto del semicerchio descrive una circonferenza situata in un piano perpendicolare all'asse di rotazione r (fig. 43).

Dalla definizione ora data discendono due proprietà, caratteristiche della sfera, e che possono quindi essere prese come altre definizioni:

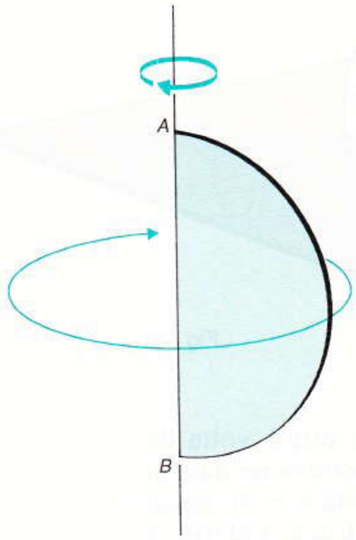


Fig. 42

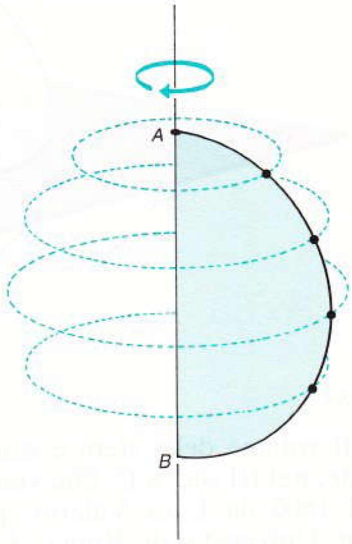


Fig. 43

1) *tutti i punti della superficie sferica sono ugualmente distanti da un punto, il centro della sfera*. Riferiamoci alla fig. 44: segando la superficie sferica con un qualunque piano che contiene l'asse r (per esempio con il piano del foglio) si ottiene una circonferenza, e i punti della circonferenza sono – come sappiamo – ugualmente distanti dal centro (fig. 45).

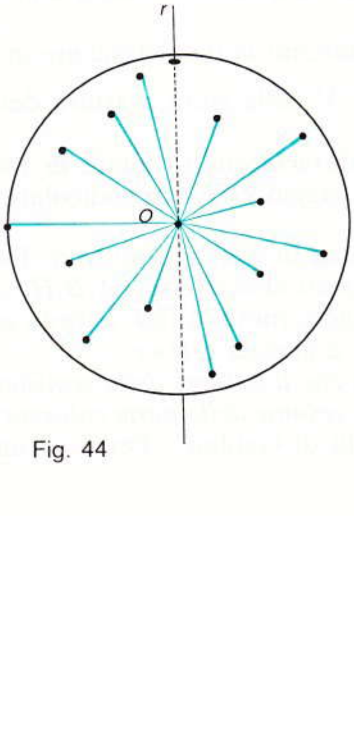


Fig. 44

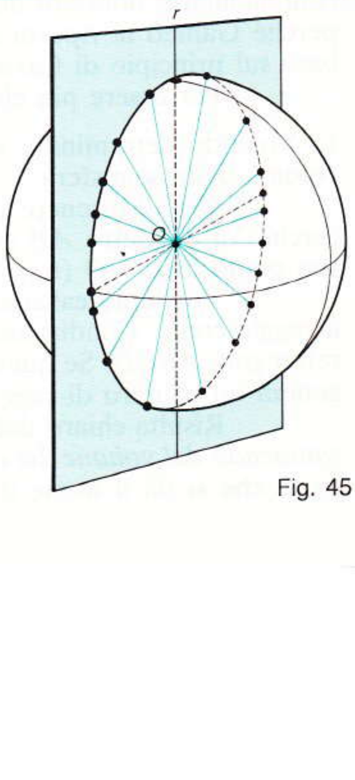


Fig. 45

2) *la sfera è l'unica superficie che ha due assi di rotazione perpendicolari fra loro*. Ci si rende conto della validità di questa proprietà osservando che se r e s (fig. 46) sono due assi di rotazione fra loro perpendicolari nel punto O, il piano α per O, perpendicolare ad r, sega la sfera (ottenuta dalla rotazione di un semicerchio attorno ad r) secondo un cerchio; è chiaro che questo cerchio, fatto ruotare attorno ad s, genera la stessa sfera.

È anche facile capire che se le rette r e s non fossero fra loro perpendicolari, non sarebbe generata una sfera.

La sfera non è, come il cilindro e il cono, sviluppabile sul piano: non è possibile, cioè, tagliare la superficie sferica in modo da poterla "distendere" sul piano. Il problema della determinazione dell'area della superficie è perciò più complesso, non potendosi riportare a quello del calcolo di un'area piana.

Noi determineremo prima il volume, basandoci sul principio di Cavalieri, e poi, conoscendo la formula del volume, riusciremo a determinare l'area della superficie sferica.

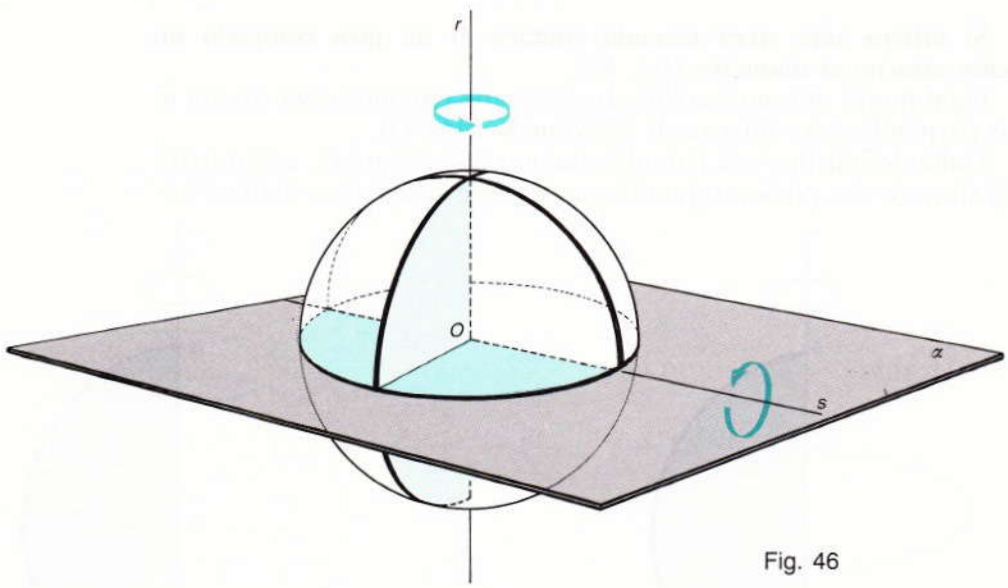


Fig. 46

A) Volume

Il volume della sfera è stato determinato per la prima volta da Archimede, nel III sec. a.C. Qui viene riportata una dimostrazione data ai primi del 1600 da Luca Valerio, professore di matematica e di greco nell'antica Università di Roma. La dimostrazione di Luca Valerio è comunemente nota col nome di *dimostrazione della scodella* di Galileo, perché Galileo la riporta in uno dei suoi scritti. Questa dimostrazione si basa sul principio di Cavalieri.

Per essere più chiari divideremo la dimostrazione in tre parti.

1) Volendo determinare il volume V della sfera, basterà determinare il volume della semisfera.

Si può ottenere una semisfera facendo ruotare di 180° un semicerchio di diametro AB attorno al raggio OH perpendicolare ad AB nel suo punto medio O (fig. 47).

Vogliamo calcolare il volume di questa semisfera. Indichiamone il raggio con r. Conduciamo le tangenti al cerchio in A,B,H; otterremo il rettangolo $ABCD$. Se questo rettangolo ruota di 180° attorno ad OH, esso genera un cilindro di raggio $HC=r$ e altezza $OH=r$.

Risulta chiaro dalla fig. 48 che *il volume della semisfera si ottiene sottraendo dal volume del cilindro il volume della parte colorata*; è a questa parte che si dà il nome di "scodella di Galileo". Per farsi un'idea della

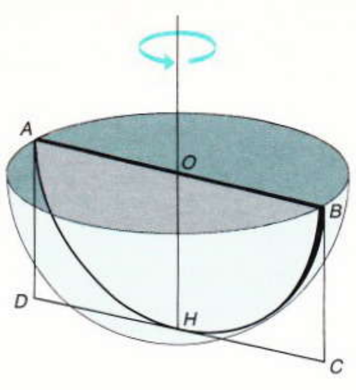


Fig. 47

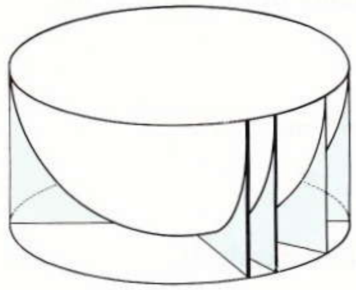


Fig. 48

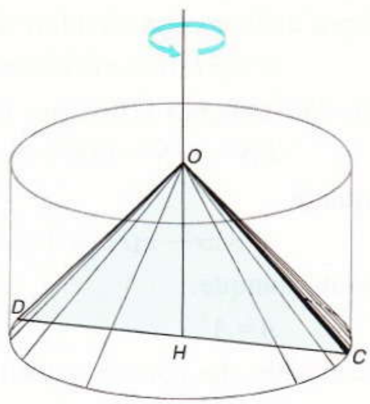


Fig. 49

forma di questa zona basta pensare a un bicchiere cilindrico tale che lo spessore del vetro vada assottigliandosi verso i bordi.

2) Il volume del cilindro sappiamo calcolarlo, ma non sappiamo invece determinare quello della scodella. È la formidabile intuizione di Luca Valerio che ha portato a scoprire, in base al principio di Cavalieri, che la scodella ha lo stesso volume del cono ottenuto facendo ruotare di 180° il triangolo OCD attorno ad OH (fig. 49).

Ecco da quali considerazioni è motivata l'intuizione di Luca Valerio: si osserva che segando il cono con un piano parallelo alla base si ha *un cerchio* e che l'area di questo cerchio diminuisce con continuità a mano a mano che il piano sezione, a partire dal livello base del cono, si avvicina ad O. Si osserva anche che, segando la scodella con lo stesso piano, si ha una *corona circolare* (per farsene un'idea si pensi allo spessore del vetro quando il bicchiere, di cui abbiamo parlato prima, viene segato), e l'area di questa corona diminuisce con continuità dal valore uguale all'area del cerchio base del cono fino al valore zero quando il piano passa per O (in tal caso infatti si ottiene una linea, il bordo del bicchiere).

Lasciamo ora queste considerazioni intuitive per dimostrare, algebricamente, che cerchio e scodella hanno in effetti sezioni di uguale area a qualunque livello.

Riferiamoci alla fig. 50. Indichiamo con a la distanza del piano sezione dal punto O. L'area del cerchio di centro E e raggio EF è data da

$$A=\pi\cdot EF^2,$$

dove

$$EF=OE \qquad \text{perché} \qquad E\hat{O}F=E\hat{F}O=45°$$

quindi

$$A=\pi OE^2=\pi a^2.$$

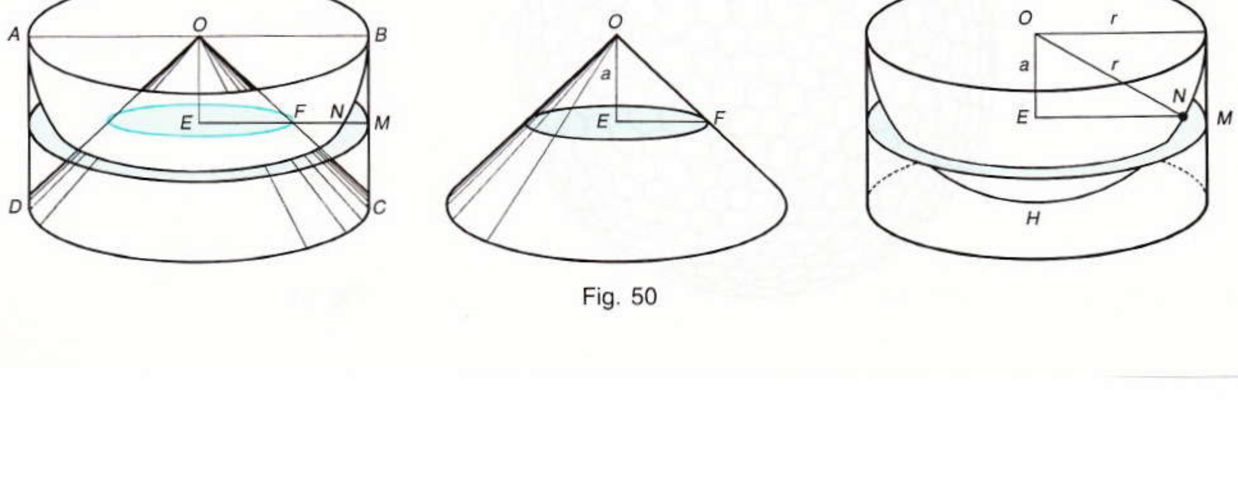


Fig. 50

L'area della corona circolare è data da

$$A'=\pi EM^2-\pi EN^2=\pi r^2-\pi EN^2;$$

ora, dal triangolo OEN, per il teorema di Pitagora, si ha:

$$EN^2=ON^2-OE^2=r^2-a^2,$$

e quindi

$$A'=\pi r^2-\pi(r^2-a^2)=\pi r^2-\pi r^2+\pi a^2=\pi a^2.$$

Risulta dunque:

$$A=A';$$

si conclude che cono e scodella sono equivalenti.

3) Il volume della semisfera è dunque:

$$V'=V'' \text{ (volume cilindro)}-V''' \text{ (volume cono)}=$$
$$=\pi r^2\cdot r-\frac{1}{3}\pi r^2\cdot r=\pi r^3-\frac{1}{3}\pi r^3=\frac{2}{3}\pi r^3.$$

Quindi il volume della sfera sarà:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Il volume della sfera si ottiene prendendo i $\frac{4}{3}$ del prodotto di π per il cubo del raggio.

Riportiamo qui i punti fondamentali di questa lunga dimostrazione:

1) si osserva che il volume della semisfera è la differenza fra il volume del cilindro e quello della scodella;
2) si dimostra che la scodella è equivalente a un cono che ha la stessa base e la stessa altezza del cilindro;
3) si calcola il volume della semisfera sottraendo al volume del cilindro il volume del cono.

B) Area della superficie

La determinazione dell'area della superficie sferica non è così semplice come quella dei solidi finora considerati, e questo perché – come abbiamo già detto – la sfera non è sviluppabile sul piano.

Noi determineremo la formula dell'area della superficie sferica mettendo a confronto la formula che dà il volume, e che abbiamo ora trovato, con una formula che dà sempre il volume ma che fa intervenire l'area della superficie sferica.

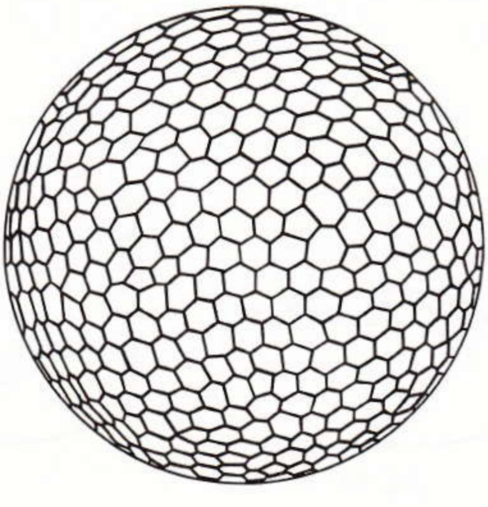


Fig. 51

Si considera *la sfera come suddivisa in tante sottili piramidi aventi tutte il vertice nel centro di essa e con le basi disposte in modo da formare un poliedro inscritto con un numero grandissimo di facce* (fig. 51). Abbiamo così una sfera "sfaccettata".

Il volume di questo poliedro è certamente minore di quello della sfera, ma si intuisce che aumentando il numero delle faccette il *volume del poliedro tende a quello della sfera*; ogni piramide "si assottiglia" e la *propria altezza tende al raggio*. La somma dei volumi di tutte le piramidi tende perciò al volume di una piramide che ha per altezza il raggio r della sfera e per base la superficie S della sfera. Si avrà:

$$V=\frac{S\cdot r}{3}.$$

Ma noi abbiamo trovato che il volume della sfera è dato da:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Dovrà quindi essere:

$$\frac{S\cdot r}{3}=\frac{4}{3}\pi r^3,$$

ossia:

$$S\cdot r=4\pi r^3,$$

da cui:

$$S=4\pi r^2.$$

L'area della superficie della sfera si ottiene moltiplicando per 4 quella di un cerchio massimo.

È interessante notare che la formula ora trovata mette in luce una proprietà geometrica che non appare certo evidente: *l'area della superficie sferica risulta uguale a quella della superficie laterale del cilindro circoscritto alla sfera*. Infatti (fig. 52), il raggio del cilindro è r e la sua altezza è $2r$, e quindi l'area della superficie laterale del cilindro è data da:

$$S_l=2\pi r\cdot 2r=4\pi r^2.$$

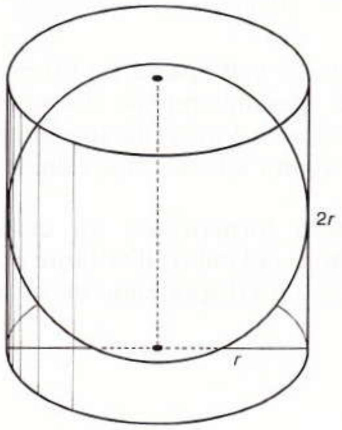
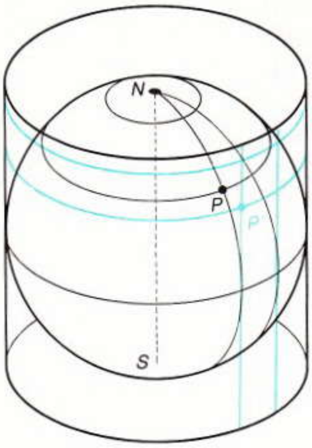


Fig. 52

È proprio questa osservazione che ha suggerito ai geografi una particolare proiezione cartografica: la proiezione su cilindro. Si proiettano i punti della superficie sferica sul cilindro per mezzo di rette che si appoggiano



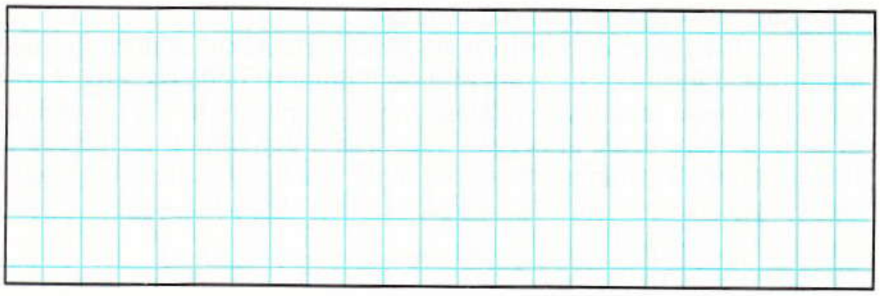


Fig. 54

Fig. 53

all'asse del cilindro e che sono ad esso perpendicolari (fig. 53): a un punto P della sfera corrisponde un punto P' sul cilindro. La corrispondenza è *biunivoca* ad eccezione dei "poli" della sfera, a cui corrispondono le circonferenze di base del cilindro.

Quando poi si sviluppa il cilindro sul piano, si ottengono delle rette parallele che corrispondono ai paralleli, e delle rette perpendicolari a queste, che corrispondono ai meridiani (fig. 54).

Vedremo negli Esercizi (110) che la proprietà di mantenere le aree (area sfera=area laterale del cilindro) è valida anche "in piccolo": cioè, quando si proietta una zona della sfera sul cilindro, la forma della figura cambia ma l'area non viene alterata. È proprio questa osservazione che condurrà facilmente alla determinazione dell'area di una **calotta sferica**.

8. La sfera ha superficie minima a parità di volume

Divideremo questo paragrafo in due parti: nella parte A) faremo vedere che il cubo ha superficie minore di parallelepipedi di ugual volume; nella parte B) dimostreremo che è la sfera ad avere la superficie minore di quella del cubo e di qualunque altra figura ad essa equivalente.

Fig. 55

A) Consideriamo un parallelepipedo rettangolo formato da un certo numero n di cubi. Se l è la lunghezza dello spigolo del cubo, il volume del cubo sarà l^3. E il volume del parallelepipedo costruito disponendo un cubo sopra l'altro (fig. 55) sarà

$$V=nl^3.$$

Se supponiamo $l=1$ si avrà

$$V=n.$$

Per calcolare la superficie del parallelepipedo, premettiamo questa osservazione: se i cubi che formano il parallelepipedo non fossero a contatto, come nella fig. 56, la superficie complessiva degli n cubi risulterebbe

$$S=n\cdot 6\cdot l^2=6n.$$

Fig. 56

Se ora disponiamo i cubi a contatto in modo da ottenere il parallelepipedo di fig. 55, l'area S della superficie si otterrà sottraendo alla superficie prima ottenuta le aree dei quadrati di contatto, cioè di quei quadrati che, trovandosi internamente "non cooperano" alla formazione della superficie. Calcoliamo il numero di questi quadrati "interni". Riflettiamo che di ogni cubo interno non si devono considerare due quadrati di contatto, e che ai due cubi che si trovano agli estremi si deve togliere solamente un quadrato (fig. 56).

Con un ragionamento di questo tipo si possono confrontare le superficie dei vari parallelepipedi costruiti con n cubi. Si arriva alla conclusione che il cubo, formato da n cubetti, ha la superficie di area minima. Risultato, questo, che corrisponde ad una immediata percezione.

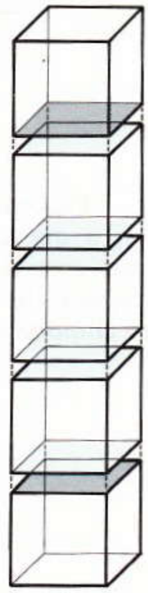


Fig. 57

B) Ci si chiede: sarà sempre il cubo ad avere, a parità di volume, la superficie minore di qualunque altro solido?

Cominciamo con alcune considerazioni di carattere concreto: per avere la possibilità di costruire solidi di forme diverse dobbiamo valerci di un materiale che si possa manipolare, come, per esempio, dell'argilla. Se con questa argilla costruiamo un cubo, ci viene spontaneo di comprimere questo cubo fra le mani in modo da realizzare un solido ancora più compatto. Eserciteremo una forza che agirà ora in direzione orizzontale ora in direzione verticale; poi, ricominceremo con una compressione orizzontale seguita da una in direzione verticale, e così via. Modellando il nostro cubo d'argilla in questo modo, "si sente" che a poco a poco si ottengono superficie sempre più "arrotondate" e che, quindi, ci si avvicina alla sfera. Dimostreremo ora la validità matematica di questa percezione.

Partiamo dunque da un cubo, e operiamo su questo una trasformazione al fine di "arrotondarlo", cioè facciamo in modo che la nuova superficie abbia un asse di rotazione, in una direzione scelta a piacere. Prendiamo per esempio come asse di rotazione una retta r perpendicolare a una faccia del cubo (fig. 58).

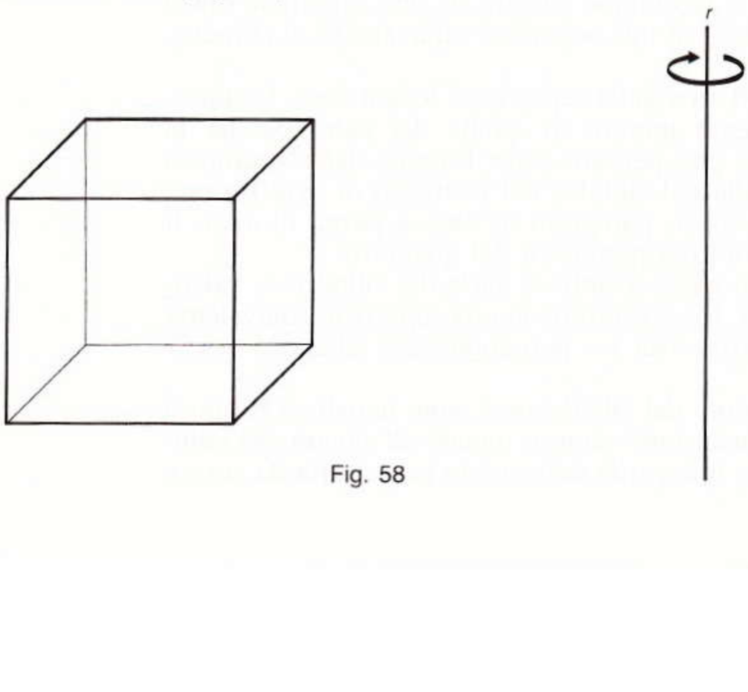


Fig. 58

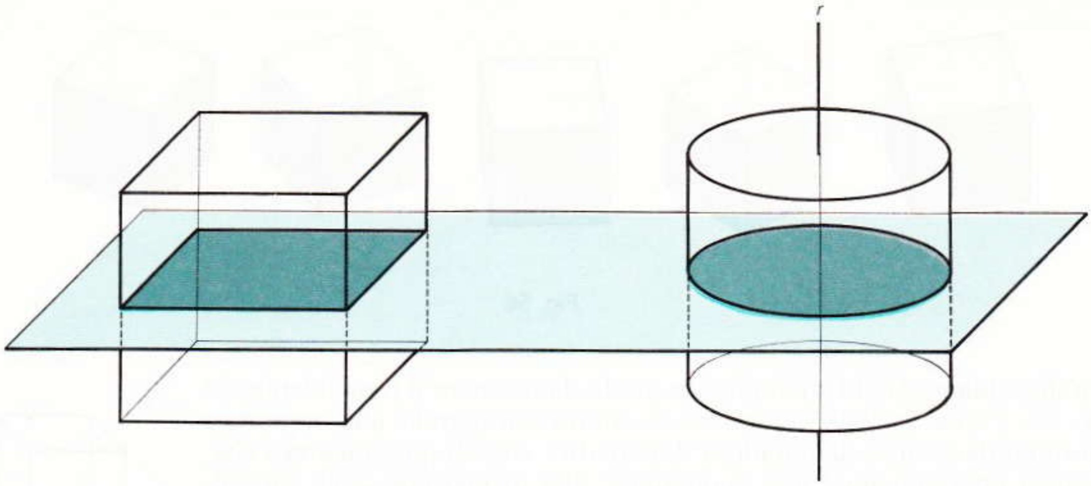


Fig. 59

Procediamo così: seghiamo il cubo (fig. 59) con dei piani perpendicolari a questa retta; si ottengono dei quadrati uguali. Ora, ad ogni quadrato sostituiamo un cerchio equivalente che abbia il centro sulla retta r. Si capisce che il cubo sarà sostituito da un cilindro della stessa altezza; e questo cilindro avrà lo stesso volume del cubo per il principio di Cavalieri.

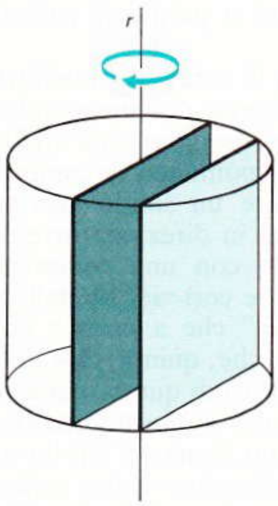


Fig. 60

Questa operazione ci fa dunque passare da una superficie senza assi di rotazione, come il cubo, ad una superficie equivalente, il cilindro, che ha un asse di rotazione.

Che cosa accade dell'area della superficie? Riflettiamo: la superficie del cilindro è certamente minore di quella del cubo perché la superficie laterale del cubo si può pensare come formata dal contorno di ogni sezione quadrata e quella del cilindro dal contorno di ogni sezione circolare, e noi sappiamo (cap. 5, paragrafo 5) che, a parità di area, il perimetro del cerchio è minore del perimetro del quadrato.

E adesso, ancora un passo avanti: si parte dal cilindro e, valendosi del principio di Cavalieri, lo si trasforma in una superficie equivalente che abbia un asse di simmetria – sia s – perpendicolare all'antico asse r (fig. 60).

Questa volta, le sezioni del cilindro non sono uguali: si tratta di rettangoli che hanno una dimensione sempre uguale all'altezza del cilindro; l'altra dimensione, che è una corda del cerchio base, varia da zero a

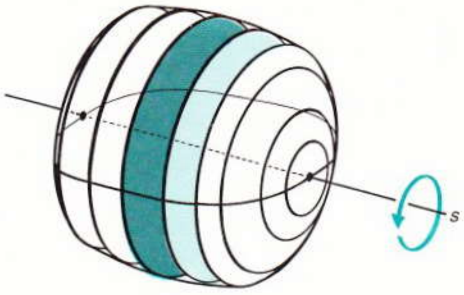


Fig. 61

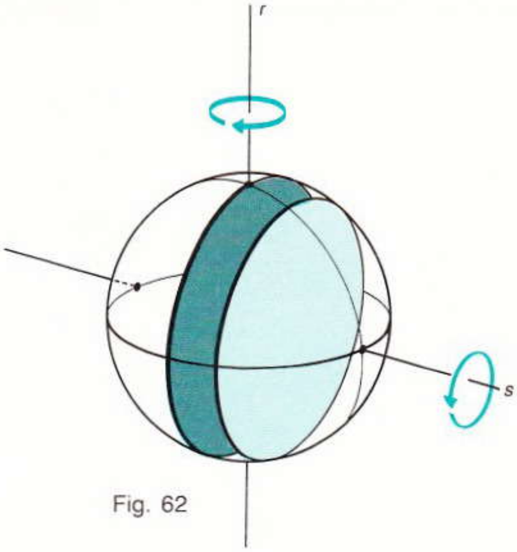


Fig. 62

una lunghezza massima che corrisponde al diametro del cerchio base. Otteniamo una superficie, di rotazione attorno alla retta s, formata da cerchi di cui il più grande è equivalente al rettangolo sezione massima del cilindro (fig. 61).

Dal punto di vista percettivo, si capisce che questa superficie ha una forma "più arrotondata" del cilindro equivalente; dal punto di vista matematico possiamo affermare che l'area di questa superficie è minore di quella del cilindro perché a rettangoli si sono sostituiti dei cerchi equivalenti.

Il procedimento continua con lo stesso metodo: si prende come nuovo asse l'antica retta r, che è perpendicolare ad s, e si costruisce una superficie equivalente alla precedente, e così via. Si ottiene in questo modo una successione di superficie equivalenti e che hanno un'area sempre più piccola. Il processo terminerà quando si arriva ad una superficie che ha come asse di rotazione sia r che s; e *questa superficie non può essere che la sfera dato che è la sfera l'unica superficie ad avere due assi di rotazione perpendicolari fra loro* (fig. 62).

La sfera occupa dunque, fra le figure solide, la stessa posizione che ha il cerchio nei confronti delle figure piane.