6. Complementi

I teoremi di Guldino

1. Storia. Enunciato dei due teoremi

Sono noti con il nome di Guldino dei teoremi che, basandosi sulla nozione di baricentro, permettono di determinare il volume e l'area della superficie di un solido di rotazione.

Paul Guldin era un matematico svizzero del 1600. L'enunciato di quei teoremi si trova però in un'opera di molti secoli prima: nell'opera del matematico greco Pappo, vissuto in Alessandria fra il III e il IV secolo dopo Cristo. È chiaro che Guldino non era a conoscenza del lavoro di Pappo.

Cominciamo col descrivere brevemente l'ambiente in cui visse Pappo, proprio per mettere in rilievo questi suoi lavori che si differenziano notevolmente dallo spirito astratto che ha caratterizzato molti matematici greci.

Con le successive conquiste territoriali da parte di Alessandro Magno, re di Macedonia, andarono cambiando, a partire dal 325 a.C., non solo le condizioni politico-sociali della Grecia e del Vicino Oriente, ma anche la visione che si aveva della scienza e in particolare della matematica.

Fondata la città di Alessandria d'Egitto, Alessandro Magno aveva trasferito la capitale del mondo antico da Atene a questa nuova città. Da una fusione di culture, provenienti da popoli tanto diversi come i Greci, i Persiani, gli Arabi..., sorse una nuova civiltà, e Alessandria divenne, soprattutto per opera del generale Tolomeo I, il vero centro intellettuale del nuovo mondo, un centro dove alla cultura greca era dato giustamente il posto d'onore.

Ma, insieme alla venerazione del pensiero astratto, gli interessi commerciali degli Egizi, certamente più sentiti di quelli degli Ateniesi, portarono in primo piano problemi di geografia e di navigazione; gli studiosi furono così condotti a coltivare, oltre a studi teorici, anche i più vari campi tecnici, e in particolare la meccanica.

È in questo ambiente di ampie vedute, dove scienza e tecnica erano spesso collegate, che si sviluppa il genio di Archimede; ed è proprio Archimede a riassumere nel modo più alto il carattere della cultura alessandrina. La nuova matematica misurava il numero dei granelli di sabbia che potevano riempire l'universo, misurava la distanza delle stelle più lontane; la matematica greca precedente, invece, rifiutava di misurare, invitando i matematici a lavorare solo su concetti astratti.

È alla fine del lungo declino del periodo alessandrino che svolge la sua opera il matematico Pappo, vissuto in Alessandria nel 300 d.C., noto come "ingegnere" fin dall'antichità per la sua particolare intuizione nei problemi di matematica applicata. A questa sua sensibilità concreta si deve l'enunciato del **1° teorema**:

il volume generato dalla rotazione di una figura piana attorno a una retta situata nel piano e che non l'attraversa è dato dal prodotto dell'area della figura per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo baricentro (fig. 1).

A questo teorema fa seguito il teorema riguardante l'area della superficie di un solido di rotazione, noto come **2° teorema**:

l'area della superficie generata da una linea piana che ruota attorno ad un asse, situato nel piano e che non l'attraversa, è data dal prodotto della lunghezza della linea per quella della circonferenza descritta dal baricentro (fig. 2).

Questi teoremi sono noti – come abbiamo detto – sotto il nome di 1° e 2° teorema di Guldino. Noi li ammettiamo intuitivamente, riservandoci di darne una dimostrazione quando avremo a disposizione i metodi del calcolo integrale.

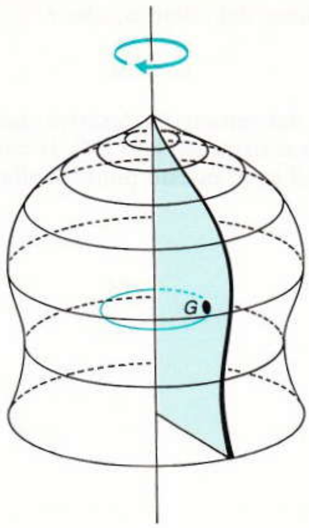

Fig. 1

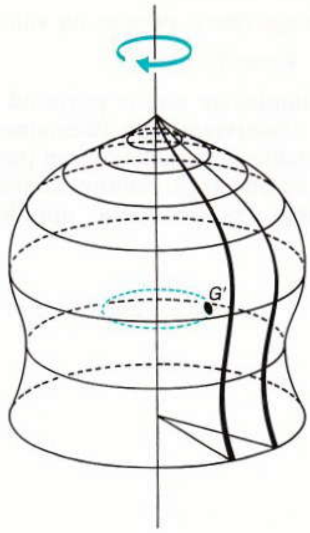

Fig. 2

2. Esempi di determinazione del volume e dell'area di una superficie

A) Volume del cilindro

Per renderci conto del significato dei due teoremi di Guldino riferiamoci a una figura particolare: un rettangolo che ruota di un giro completo attorno a uno dei suoi lati tenuto fisso (fig. 3).

Per la definizione data nel cap. 6, Parte seconda, paragrafo 4, il rettangolo genera un cilindro. Fissiamo ora l'attenzione sul volume di questo cilindro.

Abbiamo trovato che il cilindro di raggio r e altezza h è dato da

$V=\pi r^2 \cdot h.$

A questa formula siamo arrivati in base al principio di Cavalieri, confrontando il cilindro con un prisma di uguale altezza e base equivalente. Si considera dunque il volume del cilindro come ottenuto dallo spostamento della base parallelamente a se stessa lungo l'altezza (fig. 4). Ora, si capisce che un altro modo dinamico per avere il volume del cilindro consiste nel valutare l'area del rettangolo generatore (fig. 5); il volume sarà dato dall'area di questo rettangolo "ripetuta tante volte", cioè moltiplicata per la circonferenza percorsa da un punto del rettangolo.

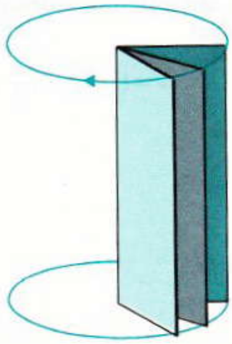

Fig. 3

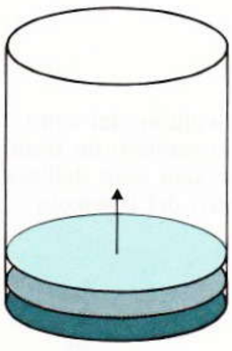

Fig. 4

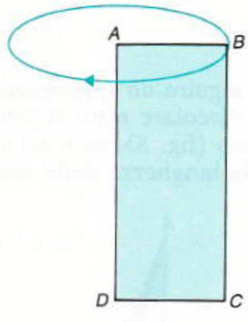

Fig. 5

Ma – ci si chiede – a quale punto del rettangolo si deve fare riferimento? Si è portati a pensare che la circonferenza deve essere quella descritta da un punto del lato del rettangolo opposto al lato fisso, per esempio dal punto B. In tal caso, il volume del cilindro sarebbe dato da

area rettangolo $\times$ circonf. descritta da B,

e cioè da

$(r \cdot h) \cdot (2\pi r)=2\pi r^2 \cdot h.$

Ci si accorge che si ottiene un valore esattamente doppio del volume del cilindro, che è

$$V=\pi r^2 h.$$

Perché l'intuizione non ci porta ad una formula esatta?

Osserviamo più attentamente: non è vero che ogni punto del rettangolo descriva, nella rotazione, un cerchio di raggio r! Se un punto, per esempio E (fig. 6), non si trova sul lato BC, la circonferenza descritta ha un raggio minore; se poi il punto – sia P – appartiene all'asse, questo punto, nella rotazione, rimane fisso, "non coopera" quindi alla formazione del volume.

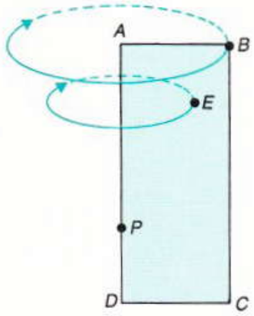

Fig. 6

Quale circonferenza, allora, si deve scegliere? Quale punto va "privilegiato"? Riflettiamo: si capisce che il punto da "privilegiare" sarà quello che, nella rotazione, dà una circonferenza *media* fra tutte le circonferenze descritte: sarà dunque il centro del rettangolo, ossia, pensando a un rettangolo materiale, sarà il suo **baricentro** G (fig. 7). Ora, se moltiplichiamo l'area del rettangolo per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro, e il cui raggio è quindi $\frac{r}{2}$, si ha la formula del volume del cilindro:

$$V=(r\cdot h)\cdot 2\pi\frac{r}{2}=\pi r^2\cdot h.$$

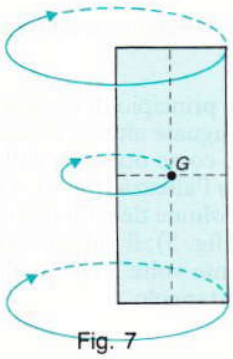

Fig. 7

B) Volume del cono

Si può seguire un ragionamento analogo per determinare il volume del cono.

Il cono circolare retto si ottiene facendo ruotare di un giro completo un triangolo rettangolo attorno a un cateto (fig. 8). In base al teorema di Guldino, il volume sarà dato dall'area del triangolo moltiplicata per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro del triangolo.

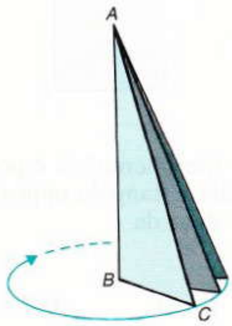

Fig. 8

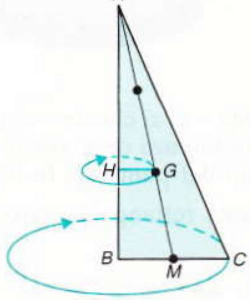

Fig. 9

Ora, noi sappiamo che il baricentro del triangolo è il punto d'incontro delle mediane, e divide ogni mediana, per esempio AM (fig. 9), in due parti AG e GM di cui una è doppia dell'altra. È facile perciò determinare il tratto GH, raggio della circonferenza descritta dal baricentro, quando il triangolo ruota attorno al cateto AB; si ha, per la similitudine dei triangoli ABM, AHG:

$$HG:BM=AH:AB.$$

Se sono dati

$$\overline{AB}=h \qquad \text{e} \qquad \overline{BC}=r$$

si ha

$$\overline{HG}:\frac{r}{2}=\frac{2}{3}h:h$$

da cui

$$\overline{HG}=\frac{r}{3}.$$

Il volume del cono sarà quindi dato da:

$$V=\frac{1}{2}rh\cdot 2\pi\frac{r}{3}=\frac{1}{3}\pi r^2h,$$

formula che abbiamo ottenuto con un altro metodo (cap. 6, Parte seconda, paragrafo 6).

C) Area della superficie laterale del cilindro

Consideriamo il cilindro generato dalla rotazione del rettangolo $ABCD$ attorno al lato AD, tenuto fisso (fig. 10).

Il lato BC, durante la rotazione, occupa successivamente la posizione delle varie generatrici (fig. 11), e genera così la superficie laterale.

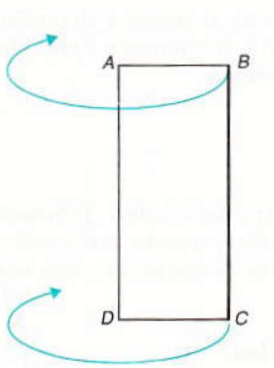

Fig. 10

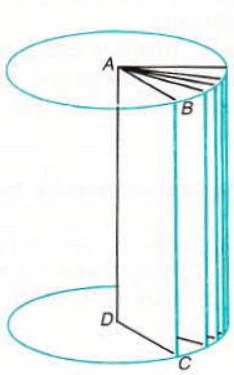

Fig. 11

L'area della superficie laterale sarà data, per il 2° teorema di Guldino, dal prodotto della lunghezza del lato BC – sia h – per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro del segmento BC, cioè dal suo punto medio M (fig. 12). Se sono dati $\overline{BC}=h$ e $\overline{DC}=r$, si ha:

$$S=\overline{BC}\cdot 2\pi r=2\pi rh.$$

Si ottiene così la formula già nota.

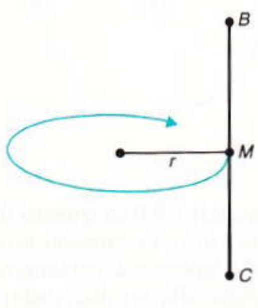

Fig. 12

D) Area della superficie laterale del cono

In questo caso (fig. 13) si tratta di moltiplicare la lunghezza dell'apotema AC – sia a – per la lunghezza della circonferenza descritta dal punto medio M di AC. Se è dato $\overline{BC}=r$ tale circonferenza ha ovviamente il raggio uguale a $\frac{r}{2}$. Si ha quindi

$$S=\overline{AC}\cdot 2\pi\frac{r}{2}=\pi ra.$$

Si ottiene così la formula già nota.

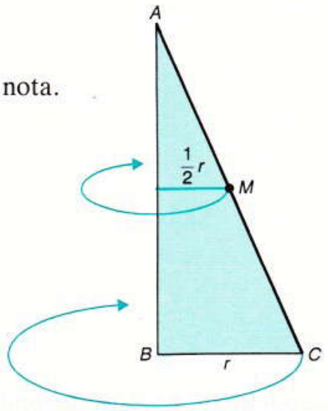

Fig. 13

3. Applicare i teoremi di Guldino per la determinazione della posizione del baricentro

Il metodo dei teoremi di Guldino per la determinazione del volume e dell'area della superficie di un solido porta al problema di individuare la posizione del baricentro, problema che, spesso, presenta delle notevoli difficoltà.

È, invece, proprio basandosi sui teoremi di Guldino, che si riesce a determinare la posizione del baricentro di una figura piana, quando si conosca, per altra via, il volume o l'area della superficie del solido di rotazione. Diamo qui due esempi che riguardano il cerchio.

Baricentro di una circonferenza e baricentro di un cerchio

È evidente che il baricentro è, in entrambi i casi, il centro del cerchio. È bene riflettere che, nel caso della circonferenza, il baricentro viene a trovarsi nel «vuoto»; questo fatto può sembrare un po' curioso dato che la nozione di baricentro è legata a qualche cosa di materiale, alla massa.

Baricentro di una semicirconferenza e baricentro di un semicerchio

Pensiamo ad una circonferenza realizzata con un filo metallico: il suo baricentro è il centro O (fig. 14).

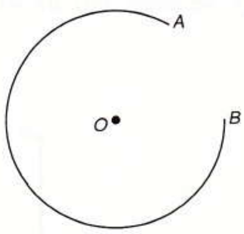

Fig. 14

Si capisce che se si taglia via un archetto AB di questo filo, la posizione del baricentro cambierà e si allontanerà dall'archetto AB dato che, ora, la circonferenza pesa di meno dalla parte dell'arco tagliato via. Ma dove si porta il baricentro? Dipenderà certamente dalla lunghezza dell'arco che è stato tolto. In particolare, se si toglie un arco uguale alla semicirconferenza, dove si troverà il baricentro della semicirconferenza rimanente?

Pensiamo ora a un cerchio "pieno", cioè a un disco che immaginiamo realizzato in cartone; il suo baricentro è nel centro O (fig. 15). Si capisce, anche in questo caso, che se si taglia via un settore AOB, il baricentro si allontanerà dall'arco del settore tolto perché adesso la figura pesa di meno dalla parte AB. E anche ora ci si domanda: dove si porta il baricentro? In particolare, dove si trova il baricentro di un semicerchio? Coincide col baricentro della semicirconferenza? Vedremo di no.

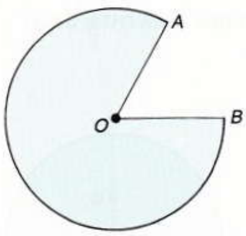

Fig. 15

La ricerca della posizione di questi baricentri non è semplice se si procede in modo diretto; è invece molto facilitata se si procede in modo indiretto basandosi sui due teoremi di Guldino.

Vedremo che basta risolvere un'equazione (impostata basandosi su uno dei teoremi di Guldino) per individuare la posizione del baricentro.

Semicirconferenza

Consideriamo la semicirconferenza di diametro AB e centro O (fig. 16). Per ragioni di simmetria, il baricentro G si troverà sul raggio OC perpendicolare ad AB. Vogliamo determinare la distanza OG.

La rotazione di questa semicirconferenza attorno al diametro AB genera la superficie di una sfera, e noi sappiamo che, se r è il raggio, la superficie della sfera è data da

$$S=4\pi r^2. \tag{1}$$

Ora, per il 2° teorema di Guldino, la superficie della sfera è anche data da

S=semicirconferenza di diametro $AB\times$circonferenza descritta dal baricentro G

ossia

$$S=\pi r\cdot 2\pi\cdot \overline{OG}. \tag{2}$$

I valori dati dalla (1) e dalla (2) devono essere uguali; si ha quindi l'equazione:

$$\pi r\cdot 2\pi\cdot \overline{OG}=4\pi r^2;$$

l'incognita è $\overline{OG}$. Semplificando si ha:

$$\pi\cdot \overline{OG}=2r$$

da cui

$$\overline{OG}=\frac{2r}{\pi}.$$

Si noti che, siccome

$$\frac{2}{\pi}\cong 0{,}636\ \ldots$$

il baricentro della semicirconferenza si trova più vicino a C che ad O.

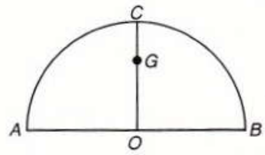

Fig. 16

Semicerchio

Per determinare il baricentro G' del semicerchio (fig. 17) ci basiamo sul 1° teorema di Guldino. Scriviamo la formula che dà il volume della sfera secondo il 1° teorema di Guldino e diciamo che questa formula deve essere uguale a quella che già conosciamo, e cioè

$$V=\frac{4}{3}1\pi r^3. \tag{3}$$

Per il 1° teorema di Guldino il volume della sfera ottenuta dalla rotazione attorno ad AB del semicerchio è dato da

$$V=\text{area semicerchio}\times\text{circonferenza descritta da } G',$$

dove G' è il baricentro del semicerchio.

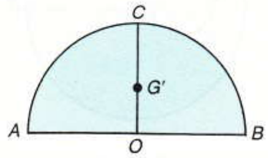

Fig. 17

E dunque

$$V=\frac{\pi r^2 1}{2}\cdot 2\pi\cdot\overline{OG'}=\pi^2r^2\overline{OG'}. \tag{4}$$

Uguagliando la (4) alla (3) si ha l'equazione:

$$\pi^2r^2\overline{OG'}=\frac{4}{3}\pi r^3$$

da cui

$$\overline{OG'}=\frac{4r}{3\pi}.$$

Notiamo subito che G' *non* coincide con G, e inoltre G' si trova più vicino ad O che a C, dato che risulta

$$\frac{4}{3\pi}\cong 0{,}42.$$