6. Parte prima
Esercizi

Sui diedri

(Si consiglia di eseguire il disegno e, eventualmente, di costruire un modello utilizzando cartoncino, elastico, ...).

1. Quanti diedri ci sono in una piramide retta a base quadrata? Quanti diedri risultano uguali fra loro?
Quali sono gli elementi della piramide che costituiscono la sezione normale del diedro formato da una faccia e dalla base?

2. Ci si riferisce all'esercizio precedente. Si chiede: all'aumentare dell'altezza della piramide, ferma restando la base quadrata, che cosa accade dei diedri formati da una faccia e dalla base? E che cosa accade dei diedri formati da due facce?
La somma dei diedri formati da una faccia e dalla base può essere uguale a 4 retti? Può, questa somma, essere uguale a zero?

3. Considerare delle piramidi rette a base quadrata e della stessa altezza. Si chiede: al variare del quadrato base, ferma restando l'altezza, varia l'ampiezza dei diedri formati dalle facce con la base? E in che modo?

4. Quanti diedri ha una piramide retta a base esagonale regolare? Quali elementi della piramide costituiscono i lati della sezione normale dei diedri formati dalle facce e dalla base?

5. Riferirsi alla fig. 1. Si passa da un parallelepipedo retto a un parallelepipedo obliquo di ugual base e uguale altezza. Nel parallelepipedo retto il diedro formato da una faccia, per esempio $ABCD$, con la base $CDEF$ è ovviamente retto, ed è uguale al diedro opposto, formato dalla faccia $GHEF$ con la base $HGBA$; la somma dei due diedri opposti è dunque di un angolo piatto.

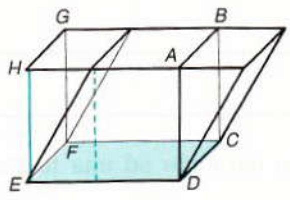

Fig. 1

Che cosa accade di questa somma quando si passa al parallelepipedo obliquo indicato in figura? Ragionare sulle sezioni normali.

6. In un parallelepipedo retto la somma dei diedri è di 12 angoli retti. E se il parallelepipedo non è retto, si ha sempre questo valore? (riferirsi all'esercizio precedente).

7. Determinare il valore della somma dei diedri di un prisma retto avente per base un triangolo. Varia questo valore se il prisma triangolare è obliquo?

8. Calcolare la somma dei diedri di un prisma retto avente per base un pentagono e di un prisma retto avente per base un esagono.

9. Riferirsi ai due esercizi precedenti. Considerare un prisma retto avente per base un poligono di n lati; dimostrare che la somma dei diedri è espressa da $4(n-1)$ retti.

10. In quante parti viene diviso lo spazio dai 4 piani delle facce di un tetraedro?

11. Osservare che, nel piano, n punti dividono una retta in $n+1$ parti (per esempio, 2 punti dividono la retta in tre parti).
Sempre nel piano, 3 rette, non passanti per lo stesso punto e non parallele, dividono il piano in 6+1 parti. Si chiede: 4 rette non concorrenti in un punto e non parallele, in quante regioni dividono il piano? E 5 rette? E n rette?
(Si trova $\frac{n(n+1)}{2}+1$*)*
Passiamo allo spazio e riferiamoci anche all'esercizio 10. Si chiede: i piani-facce di un prisma a base triangolare in quante regioni dividono lo spazio?

12. Siano α e β i semipiani che determinano un diedro. Costruire il piano bisettore del diedro, e dimostrare che ogni punto di questo piano ha uguale distanza dai piani α e β.
Considerare la sezione normale del diedro dato.

13. Per lo svolgimento di questo esercizio riferirsi sia al paragrafo 2 della Parte prima, sia all'esercizio 26 del cap. 5, dove si è trovato che la lunghezza del lato l_5 del pentagono regolare inscritto in un cerchio di raggio r, è data da

(1) $$l_5=\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Dimostrare che la sezione normale del tetraedro regolare di spigolo 1 (fig. 2) non può avere l'ampiezza $\alpha=72°$, cioè l'ampiezza di $\frac{1}{5}$ di un angolo giro (fig. 3). *(In tal caso infatti si avrebbe*

$$\overline{BM}=\overline{AM}=r=\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

e risulterebbe che lo spigolo AB non è uguale a 1, ma è maggiore di 1.

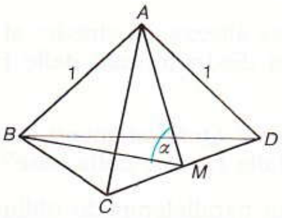

Fig. 2

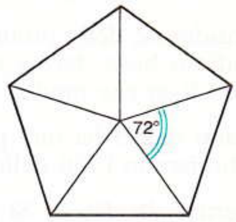

Fig. 3

Valersi della formula (1), dove $r=\frac{1}{2}\sqrt{3}$*).*

Sezioni piane del cubo

14. Se si sega un cubo con un piano parallelo ad una faccia si ottiene, come sezione, un quadrato uguale a una faccia.
Quale poligono sezione si ottiene segando un cubo con un piano diagonale?
Si può ottenere un triangolo equilatero come sezione del cubo? in che modo si può avere un triangolo equilatero di lato massimo?

15. Sezionare un cubo con piani paralleli a un piano diagonale. Si otterranno dei rettangoli; sono simili?

16. Sezionare un cubo con un piano passante per un vertice e contente lo spigolo opposto. Quale sezione si ottiene?

17. Riferiamoci all'esercizio precedente. Spostiamo ora il piano parallelamente a se stesso. Si otterranno tanti triangoli isosceli; sono simili?

18. Segare un cubo con piani perpendicolari a una diagonale. Osservare che si hanno tanti triangoli equilateri fino a che... Si possono anche avere degli esagoni; quali particolarità hanno questi esagoni? È possibile ottenere come sezione un esagono regolare? In che modo?

19. È possibile avere un trapezio come sezione del cubo? E in che modo?

20. Spiegare perché, sezionando un cubo, non si può avere un poligono con un numero di lati superiore a 6.

21. Calcolare la lunghezza della diagonale di un cubo di spigolo 1 e di un cubo di spigolo 2. Trovare poi la formula generale che dà la lunghezza della diagonale di un cubo di spigolo lungo a.

22. La diagonale di un cubo è lunga d; determinare la lunghezza dello spigolo.

23. Lo spigolo di un cubo è lungo 5. Determinare:
1) l'area del rettangolo diagonale;
2) l'area del rettangolo ottenuto sezionando il cubo con un piano parallelo al piano diagonale e passante per i punti medi degli spigoli.

24. L'area della superficie di un cubo è uguale a 216. Determinare:
1) l'area del triangolo equilatero massimo, ottenuto segando il cubo con un piano perpendicolare ad una diagonale; osservare che i lati del triangolo sono diagonali di tre facce del cubo concorrenti in un vertice;
2) l'area del triangolo equilatero ottenuto sezionando il cubo con un piano passante per i punti medi di tre spigoli concorrenti in un vertice. Come è l'area di questo triangolo rispetto all'area del triangolo equilatero massimo?

25. Un cubo ha lo spigolo uguale ad a. Considerati tre spigoli concorrenti in un vertice, determinare l'area del triangolo isoscele che ha come vertici della base i punti medi di due di quegli spigoli e come vertice opposto alla base l'estremo del terzo spigolo in cui non concorrono i tre spigoli considerati.

26. Determinare area e perimetro dell'esagono regolare ottenuto sezionando un cubo di spigolo cm 12 con un piano perpendicolare ad una diagonale. *(I vertici di questo esagono sono punti medi di sei spigoli del cubo).*

27. Un cubo di spigolo $2a$ è segato da un piano diagonale secondo il rettangolo $ABCD$ (fig. 4). Calcolare l'area del rettangolo. Se si sega poi il cubo con un piano parallelo a questo e passante per i punti medi di due spigoli consecutivi si ottiene il rettangolo $EFGH$. Come è l'area di questo rettangolo rispetto all'area di $ABCD$?

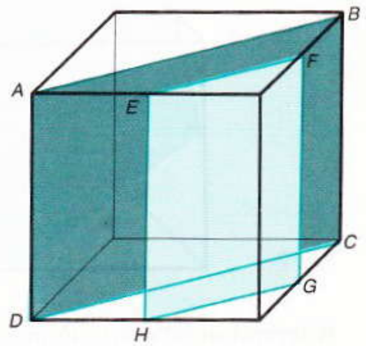

Fig. 4

28. Riferendosi all'esercizio 27, si consideri il solido limitato dai rettangoli sezione di cui sopra e dalle facce rettangolari $AEHD$ e $BCGF$; che parte è dell'intero cubo?

29. Dato un cubo di spigolo $2a$, determinare l'area della sezione triangolo equilatero massimo e della sezione esagono regolare.
Osservare che questi due poligoni hanno lo stesso perimetro (uguale a tre volte la diagonale di una faccia), mentre l'area del triangolo è i $\frac{2}{3}$ dell'area dell'esagono.

30. Come sezione di un cubo si può ottenere il trapezio isoscele $ABCD$, dove AB è la diagonale di una faccia e CD è la congiungente i punti medi della faccia opposta (fig. 5). Calcolare l'area del trapezio supponendo lo spigolo lungo $2a$.
Spostando il piano sezione parallelamente a se stesso, fino a segare i punti medi dei lati OA e OB in H e K, si ottiene il triangolo isoscele HKL; determinarne l'area. Quale è il rapporto fra l'area del triangolo e l'area del trapezio?

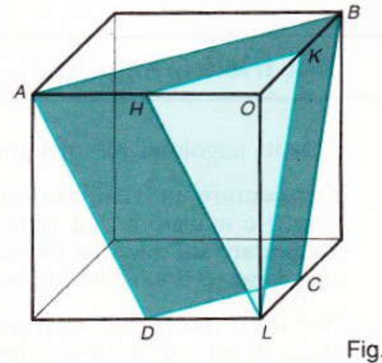

Fig. 5

31. Riferiamoci alla fig. 6: AB è la diagonale del cubo; C e D sono i punti in cui i due triangoli equilateri massimi HKL, MNP, giacenti in piani perpendicolari ad AB, segano questa diagonale.

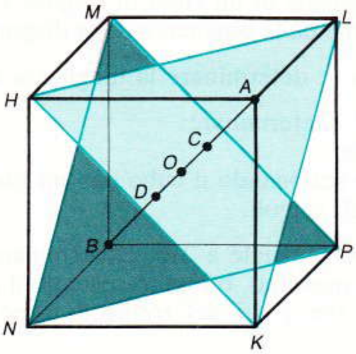

Fig. 6

Se un piano è parallelo ai piani di quei triangoli equilateri massimi e passa per un punto interno al segmento CD, esso non segherà il cubo secondo un triangolo equilatero ma secondo un esagono perché, in tal caso, vengono segati non tre ma sei spigoli del cubo (fig. 7); in particolare, se il piano passa per il punto medio O di AB si ottiene un esagono regolare (fig. 8). Consideriamo l'insieme di questi esagoni. Ogni esagono ha due terne di lati uguali, disposti in modo che due lati consecutivi hanno lunghezze diverse (a meno che non si abbia il caso dell'esagono regolare). Dimostrare che gli esagoni hanno lo stesso perimetro.

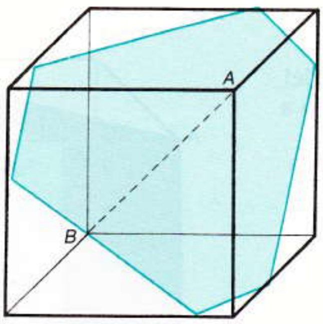

Fig. 7

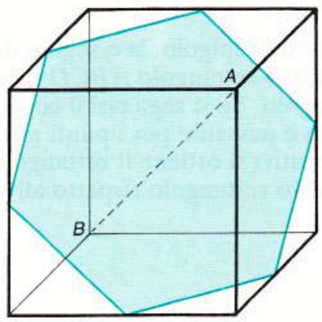

Fig. 8

32. Riferendosi all'esercizio precedente, dimostrare che gli esagoni dell'insieme considerato hanno gli stessi angoli, e determinarne l'ampiezza.

33. Sempre riferendosi all'insieme degli esagoni considerati negli esercizi precedenti, dimostrare che ogni esagono si può inscrivere in un cerchio.

34. Come si potrebbe determinare l'area di ogni esagono considerato negli esercizi precedenti? Quale fra questi esagoni ha l'area massima?

35. Dimostrare che la diagonale del cubo è divisa in tre parti uguali dai due insiemi dei triangoli equilateri e dall'insieme degli esagoni, ottenuti sezionando il cubo con piani perpendicolari ad una diagonale.

Sui triedri, angoloidi, poliedri

36. Quanti angoloidi ha un tetraedro regolare? e quanti un ottaedro regolare?

37. Considerare un triedro di vertice V e lati a, b, c. La somma dei diedri del triedro risulta minore di 6 retti e maggiore di 2 retti; perché?
Ragionare sui due casi limite: considerare il caso in cui le rette a, b, c tendono a "schiacciarsi" su un piano, e il caso in cui tendono a divenire parallele.

38. Nel testo (paragrafo 4) ci siamo resi conto, con un ragionamento dinamico, che la somma delle facce di un angoloide è sempre minore di 360°. Questa proprietà si può scoprire anche con una

dimostrazione "statica". Riferiamoci ai triedri; partiamo dalla proprietà, evidente, che *in ogni triedro una faccia è minore della somma delle altre due.*
Consideriamo il triedro di vertice V e lati a, b, c (fig. 9). Se a' è il prolungamento di a, per il triedro di vertice V e di lati $a'bc$, si ha:

$$bVc<a'Vc+a'Vb.$$

Aggiungendo ai due membri di questa disuguaglianza la somma

$$cVa+bVa$$

risulta...

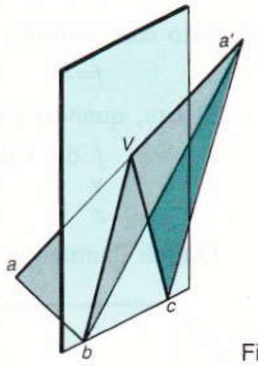

Fig. 9

39. Nel testo (paragrafo 4) si è scoperto che esistono solo cinque tipi di poliedri regolari; sono

tetraedro, ottaedro, icosaedro, cubo (o esaedro), dodecaedro.

È facile calcolare, per ciascuno di questi poliedri, il numero v dei vertici e il numero s degli spigoli, anche senza avere il modello sotto gli occhi. Riferiamoci per esempio al tetraedro; si deve tener presente che il numero f delle facce è 4. Allora, per avere il numero v dei vertici, si ragiona così: il tetraedro ha f=4, e ogni triangolo-faccia ha 3 vertici, e quindi il numero totale dei vertici dovrebbe essere

$$3\cdot 4=12;$$

ma ogni vertice è comune a 3 facce, e quindi si ha:

$$\mathbf{v=12:3=4}.$$

Per avere il numero s degli spigoli si ragiona così: ogni triangolo-faccia ha 2 lati, e siccome le facce sono 4, il numero degli spigoli dovrebbe risultare

$$3\cdot 4=12;$$

ma ogni spigolo è come a 2 facce, e quindi si ha:

$$\mathbf{s=12:2=6}.$$

Gli elementi del tetraedro regolare sono quindi:

$$f=4, \qquad v=4, \qquad s=6.$$

Calcolare f, v, s per gli altri poliedri regolari.
Scrivere una tabella di questi valori per i 5 poliedri regolari.

40. Indicare con f il numero delle facce di un poliedro regolare, con r il numero di spigoli per vertice, e con n il numero degli spigoli che ha ogni faccia. Si scoprono queste relazioni:

$$s=\frac{n\cdot f}{2}, \qquad v=\frac{n\cdot f}{r}.$$

Quale relazione lega il numero s ai numeri v ed r?
Tutte queste relazioni valgono anche per un poliedro non regolare?

41. Riferirsi all'esercizio 39. Verificare, sulla base della tabella contenente i valori di f, v, s, che, per ciascuno dei 5 poliedri regolari, si ha

(1) $\qquad f+v-s=2.$

Viene naturale di chiedersi: la relazione (1) sarà valida anche per poliedri non regolari? Considerare per esempio il caso di piramidi aventi per base un poligono di 4, 5, 6 lati e verificare se è valida la (1).

42. Per dimostrare che la relazione

$$f+v-s=2,$$

detta **formula di Eulero**, è sempre valida (se, come vedremo all'esercizio 43, il poliedro è *convesso*) si segue un ragionamento "a tappe"; riportiamo qui le prime "tappe":

1) un poliedro può scomporsi in tetraedri al modo seguente: basta proiettare le facce del poliedro

da un punto interno per avere un certo numero di piramidi (fig. 10); poi, ogni piramide si può dividere in tetraedri (fig. 11);

2) per un tetraedro, anche non regolare, vale la relazione

$$f+v-s=2$$

dato che, sempre, si ha

$$f=4, \quad v=4, \quad s=6;$$

3) ora, quando a un tetraedro "se ne accosta" un altro secondo una faccia (fig. 12), accade che

f	dal valore	4	passa	a	6
v	»	4	»	»	5
s	»	6	»	»	9.

Quindi l'aumento subito da $f+v$ ...

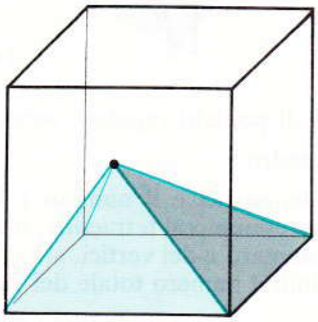

Fig. 10

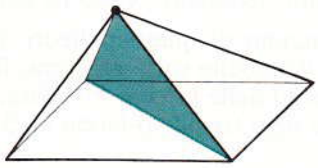

Fig. 11

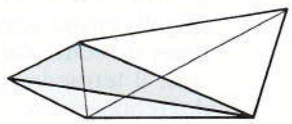

Fig. 12

43. Considerare un poliedro formato da un cubo e da una piramide retta avente per base una faccia del cubo e per altezza l'altezza del cubo. Calcolare f, v, s in due casi:
1) la piramide è costruita esternamente al cubo;
2) la piramide è costruita all'interno del cubo, e, quindi, il vertice della piramide appartiene alla faccia opposta del cubo.

Verificare che, nel caso 2) (poliedro *non convesso*, e cioè non tutte le facce lasciano il poliedro dalla stessa parte) non è valida la formula di Eulero.

44. Unendo i centri delle sei facce di un cubo si ottiene un ottaedro. Questo ottaedro è regolare. Perché?

45. Unendo i centri delle otto facce di un ottaedro regolare si ottiene un cubo. Perché?

46. Se si uniscono i centri delle quattro facce di un tetraedro regolare si ottiene un altro tetraedro. Dimostrare che è regolare.

47. Se si uniscono i centri delle venti facce di un icosaedro regolare, quale poliedro si ottiene?

48. In ogni poliedro regolare esiste un punto – il centro – che è equidistante dalle facce, dai vertici e dagli spigoli. Basta riferirsi al cubo per capire che queste tre distanze non sono uguali fra loro. Se s rappresenta la lunghezza dello spigolo di un cubo (fig. 13), esprimere, in funzione di s, la distanza d_1 del centro O del cubo da ogni faccia, la distanza d_3 di O da un vertice, e la distanza d_2 di O da uno spigolo.

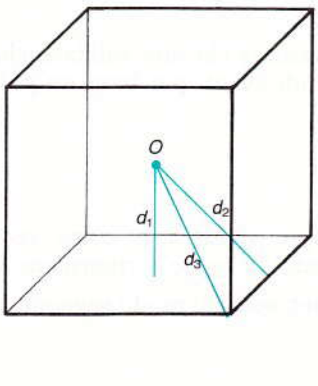

Fig. 13

49. Riferendosi all'esercizio precedente e tenendo presente che il centro del tetraedro regolare (fig. 14) si trova sul piano mediano, determinare d_1, d_2, d_3.

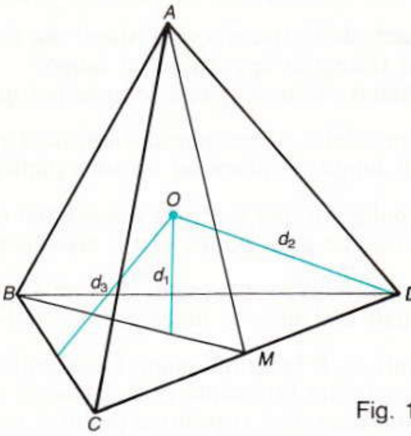

Fig. 14

50. Quattro punti dello spazio non appartengono, in generale, a un piano. Siano A, B, C, D quattro punti in queste condizioni; essi determinano *un quadrilatero sghembo*. Per averne un'idea basta pensare a due triangoli ABD, BDC aventi il lato comune BD, ma appartenenti a piani diversi: BDC potrebbe essere la base di un tetraedro e ABD una faccia. Siano M, N i punti medi dei lati AB e AD; e siano H, K i punti medi di CB e CD. Dimostrare che il quadrilatero $MNKH$ è un parallelogramma (basarsi sul fatto che MN è parallelo a BD perché..., e così HK...).

51. Riferirsi all'esercizio precedente. Dimostrare che i segmenti che uniscono i lati opposti di un quadrilatero sghembo si tagliano in due parti uguali.

52. Dimostrare che se si uniscono i punti medi degli spigoli di un tetraedro regolare si ha un ottaedro regolare (basarsi sull'esercizio 50).

53. Dall'esercizio precedente risulta che a quattro facce di un ottaedro regolare si possono "affiancare" altrettanti tetraedri aventi lo stesso spigolo dell'ottaedro (fig. 15). Da questa osservazione discendono due importanti proprietà di questi poliedri regolari:
1) il diedro dell'ottaedro regolare e il diedro del tetraedro regolare sono supplementari;
2) il tetraedro regolare che ha lo spigolo doppio dello spigolo dell'ottaedro è formato dall'ottaedro e da 4 tetraedri che hanno lo stesso spigolo dell'ottaedro.

Se lo spigolo dell'ottaedro vale 1, lo spigolo del grande tetraedro varrà 2, e il suo volume sarà 8 volte maggiore di quello del piccolo tetraedro. Di conseguenza, il volume del tetraedro risulta $\frac{1}{4}$ del volume dell'ottaedro di uguale spigolo.

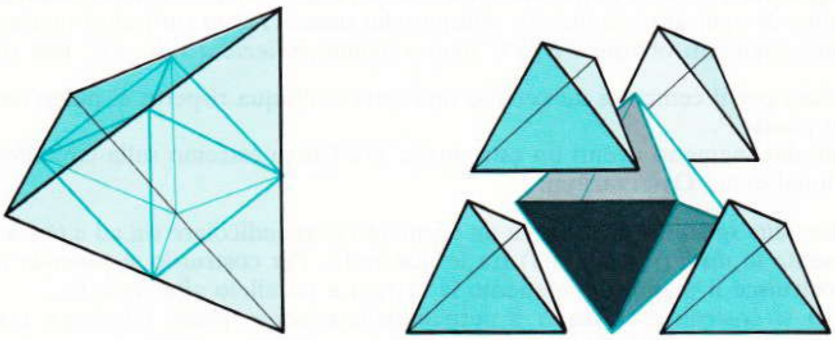
Fig. 15

Rette e piani nello spazio

54. Qual è il luogo dei punti equidistanti da due piani che si secano? E da due piani paralleli?

55. Determinare il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due rette che si secano o che sono parallele.

56. Determinare il luogo dei punti dello spazio equidistanti da tre rette, lati di un triangolo.

57. Determinare il luogo dei punti dello spazio equidistanti dagli estremi di un segmento.

58. Determinare il luogo dei punti dello spazio equidistanti dai tre vertici di un triangolo equilatero. Quale punto particolare del triangolo appartiene al luogo?
E se il triangolo non è equilatero, il luogo passa sempre per quel punto particolare del triangolo?

59. Determinare il luogo dei punti dello spazio equidistanti da 4 punti A, B, C, D non giacenti sullo stesso piano. Si vedrà che il luogo si riduce ad un solo punto.

60. In un cerchio è inscritto un poligono; per il centro del cerchio costruire la retta r perpendicolare al piano del cerchio. Dimostrare che ogni punto di r è equidistante dai vertici del poligono.

61. Dimostrare che se più piani paralleli sono segati da due trasversali, a segmenti uguali dell'una corrispondono segmenti uguali dell'altra (è un'estensione del teorema di Talete).

62. È dato un piano α e due punti A, B fuori del piano e giacenti da una stessa parte; determinare su α il punto P tale che risulti minima la somma delle distanze $AP+PB$.
Si costruisca il punto A' simmetrico di A rispetto al piano α, e si congiunga B con A'; la retta BA' interseca α nel punto P cercato; perché?

63. Nel cubo ci sono degli spigoli sghembi? E nel tetraedro?

64. Se due piani α e β sono paralleli, è ovvio che una retta r qualunque del piano α è parallela al piano β. Si chiede: la retta r è anche parallela a qualsiasi retta del piano β?

65. Dimostrare che se una retta r e un piano α sono paralleli, e se un piano β contiene r, allora la retta d'intersezione dei piani α e β è parallela ad r.

66. Data una retta r e fissato su di essa un punto P, si capisce che si possono condurre per P infinite rette perpendicolari ad r; fra queste rette, indichiamo con s quella che giace sul piano del foglio. Tutte queste rette formano un piano – sia α – perpendicolare ad r.
Si chiede: un piano qualunque contenente s sarà perpendicolare ad r? Se vi sembra che questa condizione non basti, quante rette per P deve contenere, come minimo, il piano per s perché sia perpendicolare ad r?

67. In quale modo si può costruire per un punto P un piano perpendicolare ad una retta r che non passa per P?
(Osservare che P ed r determinano un piano, per esempio il piano del foglio. Da P si conduce, sul piano del foglio, la retta s perpendicolare ad r; questa taglia r in un punto Q. Allora...)

68. Sia r la retta perpendicolare al piano α nel punto P. Per P si conduce su α una retta qualunque s; questa risulta dunque perpendicolare ad r. Si costruisce poi, su α, una retta t perpendicolare ad s. Dimostrare che t è perpendicolare al piano formato da s ed r (teorema delle tre perpendicolari).

69. Dati un piano α e un punto P fuori del piano, dimostrare che:
1) il segmento PA della perpendicolare condotta da P ad α, e cioè *la distanza* di P dal piano α, è minore di ogni altro segmento obliquo che unisce P con un punto qualunque B del piano;
2) se due segmenti obliqui PB, PC hanno uguali *proiezioni* AB, AC, essi sono uguali.

70. Si conduca per il centro di un cerchio una retta r obliqua rispetto al piano del cerchio. Si prenda su r un punto P.
Esistono dei segmenti aventi un estremo in P e l'altro estremo sulla circonferenza, che hanno la stessa lunghezza? Osservazioni.

71. Date *due rette sghembe* a, b, esiste un segmento perpendicolare sia ad a che a b; questo segmento rappresenta *la distanza* (minima) fra le due rette. Per costruirlo si procede così:
1) si costruisce il piano α contenente la retta a e parallelo alla retta b;
2) per b si costruisce il piano β perpendicolare ad α, piano che sega α secondo la retta c, ovviamente parallela a b;
3) per P si costruisce PQ perpendicolare a c. Questa retta PQ è perpendicolare ad α e quindi anche alla retta a; ed è anche perpendicolare a b perché b è parallela a c. Dunque PQ è perpendicolare sia ad a che a b.

Dopo aver eseguito le costruzioni indicate, dimostrare che PQ è minore di ogni altro segmento che congiunge due punti R, S, dove R appartiene ad a e S appartiene a b. *(Basta da S condurre ST perpendicolare al piano α e osservare che...)*

72. **Teorema di Desargues** (1593-1662). Questo teorema costituisce una delle prime scoperte di geometria proiettiva; oltre al valore matematico può essere di aiuto per disegnare con cura un

triangolo proiezione di un altro su un piano ad esso non parallelo.
Riferiamoci alla fig. 16: da un punto V è proiettato su un piano α un triangolo ABC che giace su un piano β; si ottiene il triangolo $A'B'C'$.
Sia r la retta d'intersezione dei piani α e β. Si dimostra che i punti d'intersezione L, M, N dei lati corrispondenti dei due triangoli, e cioè AB e $A'B'$, AC e $A'C'$, BC e $B'C'$, appartengono alla retta r. Infatti, AB e $A'B'$ si trovano sul piano VAB (faccia del triedro di vertice V) e questo piano sega r nel punto L.
Così le rette AC e $A'C'$ si trovano sul piano VAC che sega r...
Quindi...
Che cosa accade se α è parallelo a β? Come risultano i triangoli? Esiste la retta r?

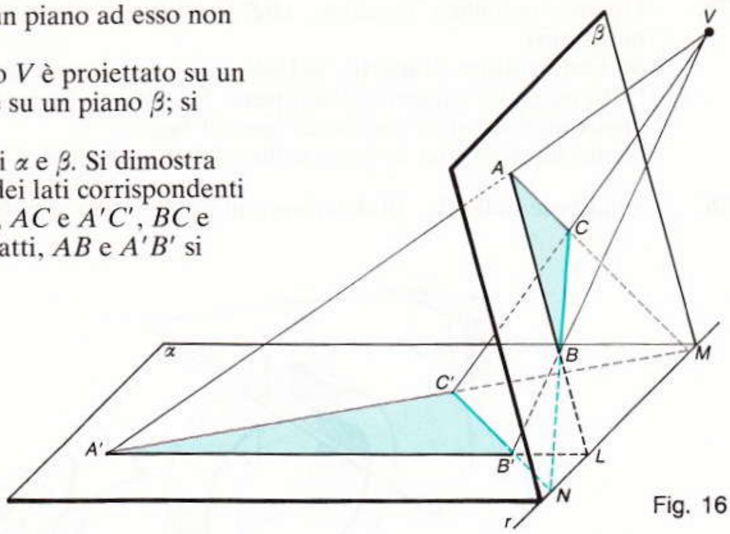

Fig. 16

Fino agli inizi del XIX secolo l'elettricità e il magnetismo erano considerati come fenomeni completamente indipendenti. Nel 1820 il fisico danese Oersted scoprì, quasi per caso, che un filo percorso da corrente influenzava l'orientamento di un ago magnetico situato nelle vicinanze. Nasceva così una prima idea sul legame di questi due fenomeni. Alle ricerche di Oersted fecero seguito gli studi del fisico matematico francese Ampère.

73. Della limatura di ferro che si trova su un piano perpendicolare a un filo conduttore r (fig. 17); quando il filo è percorso da corrente la limatura si dispone secondo circonferenze aventi per centro il punto A d'intersezione del filo col piano.
Come risulta rispetto ad r la direzione del campo magnetico in un qualunque punto P del piano?

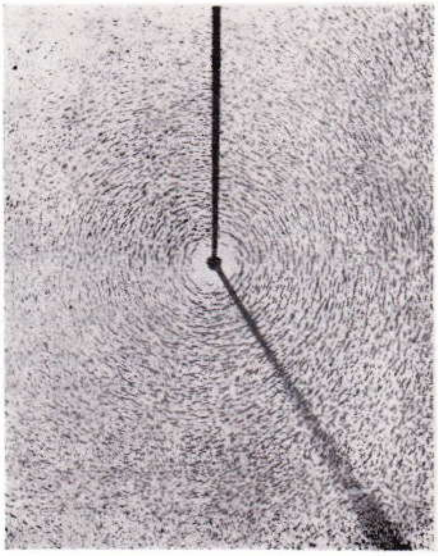
Fig. 17

74. Per individuare il verso del campo magnetico generato da un filo rettilineo percorso da corrente ci si vale della "regola della mano destra" (fig. 18): quando il pollice della mano destra è diretto nel verso della corrente che percorre il filo, le dita della mano disposte intorno al filo indicano il verso del campo magnetico.
Come si modifica la regola se si opera con la mano sinistra?

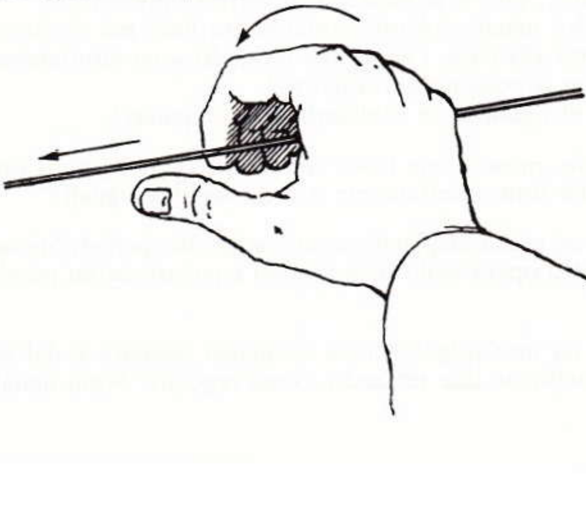
Fig. 18

75. Un filo metallico flessibile, che può essere percorso da corrente, è immerso in un campo magnetico.
Se l'interruttore è aperto, nel filo non passa corrente e quindi esso presenta la concavità verso l'alto perché è soggetto al suo peso. Se, invece, passa corrente, il filo viene sospinto verso l'alto, presentando così la concavità verso il basso.
Quale direzione ha la forza subita dal filo rispetto al campo magnetico e al filo stesso?

76. Sulla base della fig. 19 descrivere in quale modo si può conoscere il verso della forza magnetica.

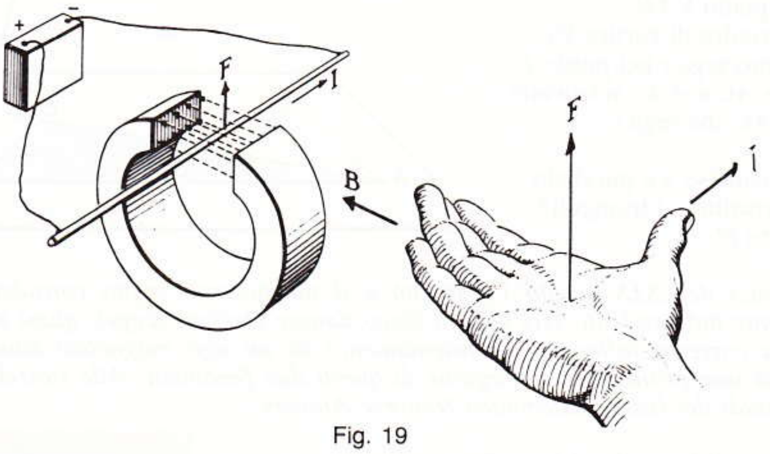

Fig. 19

77. Due fili conduttori s e t sono disposti parallelamente e si trovano nelle vicinanze uno dell'altro. Una corrente I_1 percorre il filo s e una corrente I_2 percorre il filo t, nello stesso senso. Il filo s verrà ad essere soggetto a una forza F dovuta al campo magnetico creato da I_2. Indicare quale direzione e quale verso ha la forza F in un punto qualunque P di s.

78. Un filo chiuso, posto su un tavolo, è percorso da corrente (fig. 20). Se si crea un campo magnetico in direzione perpendicolare al tavolo, come si dispone il filo?

Uguaglianza diretta e uguaglianza inversa

79. Sia $VABC$ un tetraedro; ABC è la base e V il vertice opposto.
Considerare il tetraedro uguale costruito sulla stessa base ma avente come vertice il punto V', simmetrico di V rispetto alla base. Questi due tetraedri sono direttamente o inversamente uguali? Cioè, si possono o non si possono sovrapporre?
Che cosa si può dire al riguardo se i tetraedri sono regolari?

80. Su un trapezio isoscele, preso come base, si costruiscono, da parti opposte, due piramidi rette uguali. Queste piramidi sono direttamente o inversamente uguali?

81. Segando un cubo con un piano diagonale si ottengono due poliedri uguali. Si tratta di uguaglianza diretta o inversa? E se si opera nello stesso modo a partire da un parallelepipedo che non sia un cubo?

82. Il piano determinato da uno spigolo di un tetraedro regolare e dal punto medio dello spigolo opposto divide il tetraedro in due tetraedri. Sono regolari? Sono uguali?

Equiscomponibilità dei poliedri

83. Dividere un parallelepipedo retto e rettangolo con due piani paralleli a una faccia. Quanti nuovi diedri si creano? Qual è la somma di questi diedri?

84. Segando un tetraedro con il piano determinato da uno spigolo e dal punto medio dello spigolo opposto si creano dei nuovi diedri. Quanti? Qual è la loro somma?

85. Il piano che determina sul cubo una sezione esagonale regolare (vedi fig. 8) crea altri diedri? Quanto vale la somma dei diedri del cubo e dei diedri creati dal piano considerato?

86. Dimostrare, basandosi sulla fig. 20, che due parallelepipedi aventi uguali le basi e le altezze relative sono equiscomponibili.

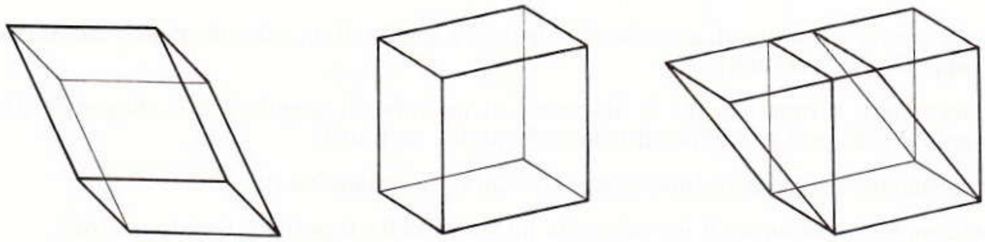

Fig. 23

87. Perché due prismi triangolari aventi uguali basi e uguali altezze sono sempre equiscomponibili? Osservare che un prisma triangolare è la metà di...

6. Parte seconda
Esercizi

Cubo e parallelepipedo

1. Determinare il volume di un cubo di spigolo a e quello di un cubo di spigolo $2a$. Si può prevedere il rapporto fra i volumi?

2. Determinare il rapporto fra la diagonale di un cubo di spigolo a e la diagonale di un cubo di spigolo $2a$. Si può prevedere il valore di questo rapporto?

3. Determinare l'area della superficie di un cubo di volume $64a^3$.

4. Determinare il volume di un cubo che ha l'area della superficie uguale a $216a^2$.

5. Un cubo ha lo spigolo lungo x. Esprimere graficamente l'area y della superficie in funzione di x.

6. Un cubo ha lo spigolo lungo x. Esprimere graficamente il volume y in funzione di x.

7. La superficie di un cubo è uguale a $600a^2$. Determinare la lunghezza dello spigolo, la lunghezza della diagonale e l'area del rettangolo diagonale.

8. Il volume di un cubo è $512a^3$. Determinare la lunghezza di una faccia e la diagonale del cubo.

9. A partire da 4 cubi uguali con lo spigolo lungo 1 si possono costruire due parallelepipedi rettangoli disponendo i cubi in modi diversi.
Essi hanno, evidentemente, lo stesso volume. Hanno anche la stessa superficie? Calcolare le due superficie e spiegare i risultati ottenuti.

10. Quanti parallelepipedi rettangoli si possono formare disponendo di 8 cubi uguali? Determinare per ciascuno di essi l'area della superficie supponendo lo spigolo lungo 1. Quale parallelepipedo ha la superficie minore?

11. Si possono disporre 5 cubi uguali uno sull'altro in modo da ottenere un parallelepipedo rettangolo.
Se ne possono disporre 6 uguali ai precedenti, ponendone tre su tre, in modo da avere un altro parallelepipedo rettangolo.
Determinare volume ed area della superficie dei parallelepipedi così ottenuti, supponendo lo spigolo lungo 1.

12. Un parallelepipedo ha le dimensioni a, b, c. Calcolarne il volume.
Se si raddoppiano due dimensioni, dire quale operazione si deve fare perché:
1) il volume non cambi;
2) il volume risulti moltiplicato per 8;
3) il volume risulti diviso per 4.

13. Dato un cubo di lato a, calcolare il volume del cubo che ha per lato una volta e mezzo il lato dato. Questo volume è maggiore del doppio del dato?
E se prendiamo come lato una lunghezza uguale a una volta e un quarto il lato dato?

14. Determinare il volume di un cubo di lato lungo 2. Costruire poi il parallelepipedo rettangolo che ha per base il rettangolo diagonale del cubo e per altezza la lunghezza della diagonale di una faccia del cubo. Verificare che il volume del parallelepipedo è doppio del volume del cubo.

15. È dato un cubo di spigolo a. Calcolare il volume del parallelepipedo che ha per base il quadrato avente per vertici i punti medi della base del cubo e per altezza l'altezza del cubo. Come risulta questo volume rispetto al volume del cubo dato?
Determinare poi il rapporto delle superficie totali dei due solidi.

16. Un cubo e un parallelepipedo rettangolo di lati $4a$, $6a$, $9a$ hanno lo stesso volume. Determinare la lunghezza del lato del cubo e il rapporto fra le due superficie totali.

17. Un cubo e un parallelepipedo rettangolo sono equivalenti. Sapendo che le dimensioni del parallelepipedo sono $2a$, $3a$ e $4{,}5a$, determinare il rapporto fra le superficie totali e il rapporto fra le diagonali.

18. Un cubo e un parallelepipedo rettangolo con i lati lunghi a, $3a$ e $2{,}25a$ hanno la stessa superficie totale. Determinare il rapporto dei volumi. Si può prevedere quale dei due solidi avrà volume maggiore?

19. Di un parallelepipedo rettangolo si conosce l'altezza ($h=8$), la differenza fra le dimensioni x e y della base ($x-y=6$), e l'area della superficie laterale ($S_l=224$). Determinare le dimensioni x e y incognite.
Interpretare poi il problema sul piano cartesiano.

20. Di un parallelepipedo rettangolo si conosce l'altezza ($h=4$), la somma delle dimensioni x e y della base ($x+y=14$) e il volume ($V=96$). Determinare le dimensioni incognite x e y.
Interpretare poi il problema sul piano cartesiano.

21. Un parallelepipedo rettangolo ha la base quadrata di lato l e l'altezza h.
Scrivere la formula della superficie laterale. Esaminare tre casi:
1) l costante (per esempio $l=2$); rappresentare sul piano cartesiano la legge che lega la superficie laterale all'altezza.
(Si può indicare h con x e S_l con y);
2) h costante (per esempio $h=3$); rappresentare sul piano cartesiano la legge che lega la superficie laterale a l.
(Si può indicare l con x e S_l con y);
3) S_l costante (per esempio $S_l=12$); rappresentare sul piano cartesiano la legge che esprime l in funzione di h.
(Si può indicare l con y e h con x).

22. Un parallelepipedo rettangolo ha la base quadrata di lato l e l'altezza h.
Scrivere la formula del volume e rappresentare sul piano cartesiano le leggi che esprimono il legame fra due variabili nei tre casi:
1) l costante (per esempio $l=2$);
2) h costante (per esempio $h=3$);
3) V costante (per esempio $V=12$).
Nell'ultimo caso si ottiene una curva "nuova": non è un'iperbole!

23. Un parallelepipedo rettangolo ha la base quadrata di lato l e l'altezza h.
Scrivere la formula della superficie totale. Considerare tale formula nei casi:
1) l costante; in tal caso la superficie laterale è direttamente proporzionale ad h?
2) h costante.
Illustrare i due casi nel piano cartesiano.

24. Riflettere sulle considerazioni seguenti, e completarle.
Il cubo ha volume massimo fra i parallelepipedi rettangoli di uguale superficie.
Cominciamo col renderci conto del significato di questa proprietà. Significa, per fare un esempio concreto, che fra tutte le scatole costruite utilizzando la stessa quantità di cartone, il cubo è quella che ha il massimo contenuto.
Seguite ora questa dimostrazione che, in parte, dovrete completare.
Dimostriamo prima di tutto la seguente proprietà di carattere aritmetico: *se due numeri positivi, a e b, hanno una data somma, il prodotto $a\cdot b$ è massimo quando $a=b$.*
Rendetevi conto su qualche caso numerico del significato di questa proprietà (fissate ad esempio la somma uguale a 12; allora il prodotto massimo si ha quando i numeri sono entrambi uguali a 6). Questa proprietà significa, da un punto di vista geometrico, che fra tutti i rettangoli di uguale perimetro (ad esempio uguale a 24) è il quadrato che ha l'area massima; potete realizzare dei rettangoli di ugual perimetro valendovi di uno spago tenuto ben teso fra le due mani.
Per dimostrare la proprietà in generale indichiamo con $2s$ la somma dei due numeri a, b, cioè poniamo:

$$a+b=2s.$$

Questo significa che se uno dei numeri, per esempio a, supera s di una quantità x, l'altro numero, b, è inferiore ad s della stessa quantità x; scriviamo dunque così:

$$a=s+x, \qquad b=s-x.$$

Calcoliamo il prodotto $a\cdot b$; si ha:

$$a\cdot b=(s+x)(s-x)$$

ossia

$$a \cdot b = s^2 - x^2.$$

È chiaro allora che $a \cdot b$ è massimo quando ad s^2 non si toglie nulla, cioè quando

$$x = 0;$$

e in tal caso risulta proprio

$$a = s, \qquad b = s,$$

e cioè

$$a = b.$$

Passiamo ora da due numeri a tre numeri. Siano a, b, c tre numeri tali che la loro somma è costante; poniamo

$$a + b + c = 3s.$$

Vogliamo dimostrare che il prodotto

$$a \cdot b \cdot c$$

risulta massimo quando

$$a = b = c = s.$$

Supponiamo che sia

$$c = s,$$

ma che a e b non siano uguali ad s; sarà allora, per esempio:

$$a = s + x, \qquad b = s - x.$$

Calcolate il prodotto

$$a \cdot b \cdot c$$

esprimendolo in funzione di s e di x.
Vi accorgerete che $a \cdot b \cdot c$ risulta massimo se i tre numeri sono uguali.
Fin qui, una proprietà numerica. Passiamo ora all'interpretazione geometrica. Consideriamo dei parallelepipedi rettangoli e retti di spigoli lunghi a, b, c; la superficie è data da

$$2ab + 2ac + 2bc.$$

Invece di esprimere la costanza della superficie basterà esprimere che è costante la metà della superficie; scriveremo per esempio che è

$$ab + ac + bc = 3s^2.$$

Il volume dei parallelepipedi è dato da

$$a \cdot b \cdot c;$$

ora, questo prodotto è massimo se è massimo

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2,$$

che si può anche scrivere

$$ab \cdot ac \cdot bc.$$

Allora...

Prismi

25. Un prisma retto ha per base un triangolo equilatero di lato a. Determinarne il volume sapendo che la sua altezza è il doppio del lato del triangolo equilatero.
Se raddoppia il lato del triangolo equilatero e l'altezza del prisma rimane uguale, che cosa accade del volume?

26. Un prisma retto ha per base un esagono regolare di lato a, ed ha l'altezza uguale a $\frac{5}{4}a$. Determinare il volume del prisma e l'area della superficie totale.

27. La base di un prisma retto di altezza a è un triangolo rettangolo isoscele di ipotenusa lunga a. Determinare il volume del prisma. Osservare che il volume risulta la metà del volume di un cubo di spigolo a; si poteva prevedere?

28. Un prisma retto ha per base un rombo in cui una diagonale è i $\frac{3}{4}$ dell'altra e la somma delle diagonali è di $14a$. Determinare la superficie totale del prisma sapendo che l'altezza è uguale al semiperimetro di base.

29. Un prisma retto ha per base un trapezio isoscele. Sapendo che la somma delle lunghezze delle basi del trapezio è $18a$ e che una è i $\frac{4}{5}$ dell'altra, determinare:
1) la lunghezza delle basi;
2) l'altezza del trapezio sapendo che gli angoli alla base maggiore sono di 45° ciascuno;
3) la superficie del prisma sapendo che la sua altezza è i $\frac{3}{4}$ della base minore del trapezio.

30. Lo stesso problema dell'esercizio precedente supponendo che il trapezio base abbia gli angoli acuti di 60° ciascuno.

31. Lo stesso problema dell'esercizio 29 supponendo che il trapezio base abbia gli angoli acuti di 30° ciascuno.

Cilindro

32. Facendo ruotare di un giro completo un rettangolo di dimensioni 6 e 8 attorno all'uno o all'altro dei suoi lati si ottengono due cilindri. Avranno lo stesso volume? Si direbbe di sì, e invece... Perché i volumi non risultano uguali?
Calcolare il rapporto dei volumi nel caso in cui le dimensioni del rettangolo sono a e b. Che cosa si scopre?

33. Riferendosi all'esercizio precedente, calcolare il rapporto fra le superficie laterali e poi il rapporto fra le superficie totali dei due cilindri.

34. Dato che un cilindro si ottiene facendo ruotare di un giro completo un rettangolo attorno a uno dei suoi lati, si capisce che si potrà calcolare il volume del cilindro moltiplicando l'area del rettangolo che ruota (e che "spazza" il volume) per... Basarsi su un caso numerico.
Perché moltiplicando l'area del rettangolo che ruota per la lunghezza della circonferenza del cerchio base del cilindro, risulta un volume doppio del volume effettivo? (vedi "Complementi").

35. Determinare la superficie totale e il volume di un cilindro sapendo che l'area di base è 9π e l'altezza 10.

36. Determinare il volume di un cilindro di altezza uguale al diametro di base, sapendo che la circonferenza è lunga 4π.

37. Determinare l'altezza di un cilindro di area di base 16π e di cui la superficie laterale è doppia dell'area di base.

38. Determinare la superficie totale di un cilindro di volume 81π e altezza uguale a 9.

39. Con un foglio di dimensioni 24 e 32 si possono costruire due cilindri curvando il rettangolo attorno all'uno o all'altro lato. Determinare volume e area della superficie totale dei due cilindri. Si può prevedere se saranno uguali i due volumi? e le due superficie totali?
Svolgere lo stesso problema indicando le dimensioni del rettangolo con a e b.

40. Un cilindro ha il volume uguale a 360π e l'altezza uguale a 10. Determinare il rapporto fra la superficie totale di questo cilindro e quella di un altro cilindro che ha lo stesso volume e il raggio doppio.

41. Due cilindri hanno l'area della superficie totale uguale a 224π. I raggi sono lunghi 8 e 4. Determinare il rapporto dei volumi.

42. Riferirsi all'esercizio precedente. Svolgere il problema sapendo che i raggi sono r e $\frac{r}{2}$, e che l'area della superficie totale del cilindro di raggio r è uguale a $\frac{14}{3}\pi r^2$.

43. Due cilindri sono equivalenti; l'altezza del primo è h.
Sapendo che il raggio del primo è r e quello del secondo è $\frac{r}{2}$, determinare il rapporto fra le due superficie totali.

44. Due cilindri sono equivalenti; l'altezza del primo è h e quella del secondo $4h$; il raggio è $\frac{4}{3}h$.
Osservare che, in questo caso, i cilindri hanno anche uguale la superficie totale.
Quando si verifica questo fatto?

45. In un cilindro di volume 288π e di raggio uguale a 6 sono inseriti due cilindri aventi la stessa altezza del cilindro dato e per diametro il raggio del dato. Determinare:
1) il rapporto fra le superficie laterali dei due cilindri e la superficie laterale del dato;
2) l'analogo rapporto fra le superficie totali.
Che cosa si osserva?

46. Verificare che se l'altezza h di un cilindro è uguale al raggio r, la superficie laterale risulta metà della totale.

47. Un cilindro ha il raggio r e l'altezza h. Scrivere la formula della superficie laterale e studiarla nei tre casi:
1) r costante;
2) h costante;
3) S_l costante.
Illustrare ciascuno dei casi sul piano cartesiano.

Piramide

48. Determinare il volume di una piramide retta a base quadrata, sapendo che l'area di base è $100a^2$ e l'apotema è $13a$.

49. Determinare il volume di una piramide a base esagonale regolare sapendo che il lato di base è $6a$ e lo spigolo è $10a$.

50. Una piramide ha per base un rettangolo in cui la somma delle dimensioni è $34a$ e una è i $\frac{5}{12}$ dell'altra. Determinare l'area della superficie totale sapendo che l'altezza, uguale a $5a$, cade nel centro della base.

51. Determinare volume e superficie totale di una piramide retta a base quadrata sapendo che il lato del quadrato è $2a$ e che le facce sono dei triangoli equilateri.

52. Una piramide retta a base quadrata ha la superficie laterale di cm^2 320 e il lato di base di cm 16. Determinare il rapporto fra il volume di questa piramide e il volume di una piramide di uguale altezza e avente per base un rettangolo isoperimetrico al quadrato e tale che una dimensione è i $\frac{3}{5}$ dell'altra.
Si può prevedere quale delle due piramidi avrà il volume maggiore?

53. Riferirsi all'esercizio precedente. Determinare il rapporto fra il volume della piramide a base quadrata e il volume di una piramide di uguale altezza e avente per base un rombo dello stesso perimetro del quadrato e formato da due triangoli equilateri.

54. Una piramide retta a base quadrata ha l'altezza di cm 15 e l'apotema di cm 17. Considerare la piramide che si ottiene segando la piramide data con un piano parallelo alla base e distante di cm 3 dal vertice, e determinare il rapporto fra i volumi delle due piramidi.

55. Una piramide a base quadrata viene tagliata con un piano parallelo alla base e passante per il punto medio dell'altezza. Quali rapporti fra gli elementi delle due piramidi risultano uguali a $\frac{1}{2}$?
Considerare: i lati delle basi, le altezze, gli spigoli laterali, le superficie laterali, le superficie totali, i volumi.

56. A quale distanza dal vertice di una piramide retta a base quadrata si deve condurre un piano parallelo alla base in modo che il quadrato sezione abbia un'area uguale alla metà dell'area della base della piramide?

57. Una piramide retta ha la base quadrata di lato l, ed l'altezza lunga h. Scrivere la formula del volume e studiarla nei due casi:
1) l costante;
2) h costante.
Descrivere, nei due casi, la formula sul piano cartesiano.

58. Una piramide retta ha la base quadrata di lato l, e l'altezza lunga h. Scrivere la formula della superficie laterale e studiarla nei tre casi in cui rimanga costante il lato o l'apotema o l'area della superficie totale.
Interpretazione grafica.

59. Problema analogo a quello dell'esercizio precedente, considerando, ora, la superficie totale.

Poliedri regolari

60. Determinare l'area della superficie di un tetraedro regolare di spigolo $2x$. Rappresentare graficamente questa funzione.

61. Risolvere lo stesso problema dell'esercizio 60 relativamente all'ottaedro regolare.

62. Risolvere lo stesso problema dell'esercizio 60 relativamente all'icosaedro regolare.

63. Determinare il volume di un ottaedro regolare di spigolo $2a$.

64. Determinare il rapporto fra i volumi e il rapporto fra le superficie di un ottaedro regolare di spigolo $2a$ e di un cubo che ha lo stesso spigolo.

65. Considerare i centri delle 6 facce del cubo; essi sono vertici di quale poliedro regolare? Determinare il rapporto fra il volume del poliedro così ottenuto e quello del cubo.

66. Si scopre, sulla base dell'esercizio 53 della Parte prima, che un tetraedro regolare si può scomporre in 4 tetraedri regolari e in un ottaedro regolare aventi come spigolo la metà dello spigolo del tetraedro da cui siamo partiti. Il volume del tetraedro regolare risulta quindi uguale a $\frac{1}{4}$ del volume dell'ottaedro regolare di uguale spigolo.
Basandosi su questa proprietà calcolare il volume di un tetraedro regolare di spigolo $2a$.

67. Determinare in modo diretto il volume di un piccolo tetraedro regolare di spigolo lungo $2a$, ricordando che il centro di un triangolo equilatero divide un'altezza in due parti di cui una è doppia dell'altra.

68. Indicando con $2x$ la lunghezza dello spigolo e con y il volume, scrivere la relazione che lega y a x relativamente al cubo, all'ottaedro e al tetraedro regolare. Rappresentare graficamente queste funzioni.

69. Determinare la lunghezza dello spigolo di un tetraedro regolare che ha la superficie uguale a $a^2\sqrt{3}$.

70. Determinare la lunghezza dello spigolo di un tetraedro regolare che ha il volume uguale a $a^3\sqrt{2}$.

71. Il volume dell'icosaedro regolare si può determinare basandosi sulle seguenti considerazioni: un icosaedro regolare può scomporsi in 20 piramidi uguali aventi per vertice il centro V dell'icosaedro e per base una delle facce triangolari. Nota la lunghezza l dello spigolo è facile determinare l'area della faccia; resta quindi da calcolare l'altezza VO della piramide, O essendo il centro del triangolo faccia. Si conduca per V il piano perpendicolare a un'asse dell'icosaedro; l'icosaedro verrà segato dal piano secondo un decagono regolare di lato $\frac{l}{2}$, e di questo decagono si può determinare raggio e apotema.
Come si potrà allora calcolare l'altezza VO?

Cono

72. Facendo ruotare un triangolo rettangolo di cateti 6 e 8 attorno all'uno o all'altro di questi cateti, si ottengono due coni.
Calcolare il rapporto dei volumi.
Determinare poi il rapporto nel caso in cui i cateti siano lunghi a e b; che cosa si scopre?

73. Determinare altezza e area della superficie totale di un cono di volume 24π e raggio lungo 6.

74. Determinare il raggio di base e la superficie totale di un cono di volume 15π e altezza lunga 3.

75. Curvando una lamiera che ha la forma di settore circolare si ha un cono. Determinare il volume di questo sapendo che il raggio del settore è lungo 5 e la lunghezza dell'arco è 8π.

76. Lo stesso problema dell'esercizio precedente sapendo che il raggio del settore è lungo 4 e l'angolo del settore è di 48°.

77. Un cilindro e un cono hanno lo stesso volume uguale a 320π e lo stesso raggio uguale a 8. Determinare il rapporto fra le due superficie totali.

78. In un cono di superficie totale uguale a 480π e raggio uguale a 15 sono inscritte due piramidi: una ha per base un quadrato e l'altra ha per base un rettangolo di cui una dimensione è uguale a 24. Determinare il rapporto dei volumi delle due piramidi. Si può prevedere quale delle due ha volume maggiore?

79. Il volume di un cono è 128π e il raggio è 8. Determinare:
1) il rapporto fra l'area della superficie totale del cono e quella, pure totale, di un cilindro che ha lo stesso volume e la stessa base del cono;
2) l'ampiezza dell'angolo del settore circolare ottenuto sviluppando sul piano il cono.

80. Un triangolo isoscele di area a^2 e base lunga $2a$ ruota di un giro completo attorno alla parallela alla base passante per il vertice opposto.
Determinare il rapporto fra la superficie del solido così generato e la superficie del solido che si ottiene facendo ruotare lo stesso triangolo attorno alla sua base.

81. La somma delle basi di un trapezio rettangolo è uguale a $50a$ e una base è i $\frac{2}{3}$ dell'altra; l'altezza è uguale a $12a$.
Facendo ruotare il trapezio di un giro completo attorno a ciascuna delle basi si ottengono due solidi. Determinare il rapporto fra i volumi e il rapporto fra le superficie dei due solidi.
Si può prevedere quale dei due solidi avrà volume maggiore? E quale avrà superficie maggiore?

82. Un cilindro e un cono hanno lo stesso volume V e lo stesso raggio r. Determinare il rapporto fra le superficie totali delle due figure nel caso in cui $V=800\pi$ e $r=10$.
Troverete che i due solidi, oltre ad avere lo stesso volume, hanno anche uguale l'area della superficie totale.
Dimostrate che questa proprietà vale sempre se l'altezza del cilindro è i $\frac{4}{5}$ del raggio.

83. Se si fa ruotare un triangolo rettangolo di cateti 6 e 8 attorno all'ipotenusa si ottiene un solido formato da due coni aventi la base comune.
Determinare volume e superficie di questo solido.

84. Un triangolo equilatero di lato $2a$ ruota di 360° attorno a un lato.
Determinare volume e area della superficie del solido così ottenuto.

85. Un triangolo equilatero di lato $2a$ ruota di 360° attorno alla parallela a un lato condotta per il vertice opposto.
Determinare volume e area della superficie del solido così ottenuto.

86. Determinare il volume y di un cono *equilatero* (apotema = diametro) di raggio x, e rappresentare graficamente questa relazione.

87. Un cono ha raggio r e altezza h. Scrivere la formula del volume e studiarla nei tre casi:
1) r costante;
2) h costante;
3) V costante.
Rappresentare le tre funzioni sul piano cartesiano.

Sfera

88. Il raggio di una sfera è lungo r; se si raddoppia il raggio, raddoppia anche il volume?

89. Aumentando di 1 il raggio r di una sfera, di quanto aumenta il volume?

90. Quanto deve essere lungo il raggio di una sfera perché il volume risulti uguale a $4{,}5\pi$?

91. L'area della superficie totale di un cono è 90π e il raggio è uguale a 5.
Determinare il rapporto fra il volume del cono e il volume della sfera che ha lo stesso raggio.

92. Tre palle da tennis, il cui diametro è di cm 6,6, sono disposte una sopra l'altra in una scatola cilindrica la cui superficie laterale e le cui basi sono tangenti alle palle. Determinare il volume della parte "vuota".

93. Calcolare il volume di una sfera inscritta in un cubo di spigolo a, e il volume del cubo inscritto in questa sfera.
Qual è il rapporto fra i volumi dei due cubi?
Se questa operazione viene continuata, si ottiene un'altra sfera; determinare il rapporto fra i volumi delle due sfere. È uguale al rapporto fra i volumi dei due cubi?

94. Un cilindro equilatero (diametro di base = altezza) è circoscritto a una sfera. Sapendo che il raggio del cilindro è r, determinare il rapporto fra il volume della sfera e quello del cilindro.

95. Un cono equilatero (diametro di base = apotema) è circoscritto a una sfera. Sapendo che il raggio del cono è r, determinare il rapporto fra il volume della sfera e quello del cono.

96. Una sfera ha raggio r. Raddoppiando il raggio, in quale modo aumenta la superficie?

97. Calcolare il volume di una sfera la cui superficie è 400π.

98. L'area di una superficie sferica è 144π. Sapendo che è uguale all'area della superficie totale di un cilindro che ha lo stesso raggio, determinare il rapporto fra i volumi dei due solidi.

99. In un cilindro di altezza h è inscritta una sfera. Determinare il rapporto fra la superficie laterale del cilindro e la superficie della sfera. Che cosa si osserva?

100. In un cilindro di altezza h sono contenute due sfere. Esse sono tangenti fra loro e anche alla superficie laterale del cilindro e alle basi.
Determinare il rapporto fra la superficie totale del cilindro e la superficie delle due sfere.

101. Analogo problema dell'esercizio precedente supponendo che le sfere siano tre.

102. Riferendosi agli esercizi 100 e 101, supponiamo che le sfere siano n e che il raggio di ogni sfera sia r. L'altezza del cilindro sarà allora $2rn$. Il rapporto fra la superficie totale del cilindro e la superficie delle n sfere sarà dato da

$$\frac{S}{S'}=\frac{2\pi r\cdot 2rn+2r^2\pi}{4\pi r^2 n}=\frac{4\pi r^2 n+2r^2\pi}{4\pi r^2 n}.$$

Questo rapporto si può anche scrivere

$$\frac{S}{S'}=\frac{4\pi r^2 n}{4\pi r^2 n}+\frac{2r^2\pi}{4\pi r^2 n}=1+\frac{1}{2n}.$$

Se n diventa sempre più grande, a quale valore tende questo rapporto?

103. Sulle basi di un cilindro di raggio uguale a r sono costruite, internamente al cilindro, due semisfere; queste semisfere si toccano nel punto medio dell'asse del cilindro. Determinare:
1) il rapporto fra la superficie delle due semisfere e la superficie laterale del cilindro;
2) il rapporto fra la superficie delle due semisfere e la superficie totale del cilindro.

104. Segando una sfera di raggio cm 20 con un piano che dista dal centro di cm 16 si ottiene un cerchio. Qual è l'area del cerchio? Quale è il volume dei due coni che hanno per base questo cerchio e per vertici gli estremi del diametro della sfera perpendicolare al piano secante? Varia la somma dei volumi dei due coni al variare della distanza dal centro del piano secante?

105. In un cerchio di raggio cm 10 è inscritto un rettangolo di cui un lato è gli $\frac{8}{5}$ del raggio. Facendo ruotare la figura attorno al diametro perpendicolare a quel lato si generano un cilindro e una sfera. Determinare il rapporto fra i volumi di queste figure. Varia il volume del cilindro se il rettangolo è sempre inscritto nello stesso cerchio ma ha dimensioni diverse?

106. Un cubo e una sfera di raggio r hanno uguale l'area della superficie. Quale dei due solidi ha volume maggiore?

107. Determinare il rapporto fra il volume di una sfera di raggio r e il volume di un cono la cui area di base sia uguale all'area della superficie sferica e la cui altezza sia uguale ad r.
Troverete che il rapporto è uguale a 1; era prevedibile questo risultato?

108. In un cerchio di raggio r sono inscritti un esagono regolare e un quadrato.
Facendo ruotare di mezzo giro l'esagono e il quadrato attorno a un diametro del cerchio passante per due vertici opposti dell'esagono si hanno due solidi inscritti in una sfera.
Determinare il rapporto dei volumi e il rapporto delle superficie di questi solidi. Si può prevedere quale dei due solidi avrà volume e superficie maggiore?

109. Indicare con x il raggio di una sfera. Rappresentare sul piano cartesiano:
1) la formula della superficie della sfera;
2) la formula del volume della sfera.

Proiezione della sfera sul cilindro circoscritto. Calotta e zona sferica.

Si dice ***calotta sferica*** *una delle parti in cui la superficie della sfera è divisa da un piano secante (fig. 1).* ***Zona*** *è la parte di superficie sferica compresa fra due piani secanti paralleli fra loro (fig. 2). Una calotta si può dunque considerare come una zona in cui uno dei piani non è secante ma è tangente.*

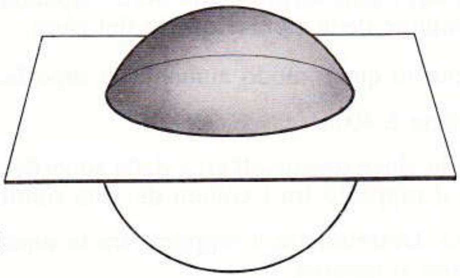

Fig. 1

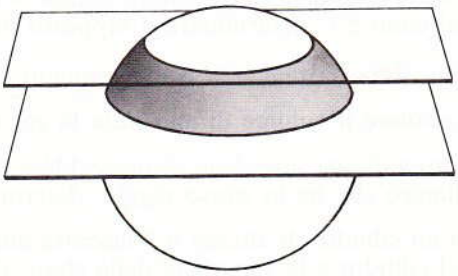

Fig. 2

Per determinare l'area di una zona ci si vale di una proprietà che è, di per sé, interessante: si dimostra che quando si proiettano i punti di una superficie sferica su un cilindro circoscritto alla sfera con rette perpendicolari all'asse del cilindro, non solo accade (paragrafo 7) che l'area della superficie della sfera è uguale all'area della superficie laterale del cilindro (fig. 3), ma le aree si mantengono anche "in piccolo", e cioè a una figura tracciata sulla sfera corrisponde, sul cilindro, una figura di forma diversa ma equivalente.

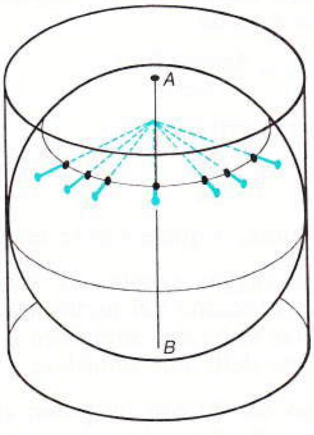

Fig. 3

Cominciamo con l'osservare che una figura tracciata sulla sfera viene, nella proiezione, alterata tanto di più quanto maggiore è la sua distanza dal cerchio massimo lungo il quale il cilindro tocca la sfera. Osservate la fig. 4: abbiamo colorato una figura sulla superficie sferica; è un quadrilatero curvilineo compreso fra due paralleli molto vicini e due meridiani (usiamo, per essere più chiari, la *terminologia geografica). A questo quadrilatero corrisponde, sul cilindro, un rettangolo curvilineo che è "più basso" ma "più largo" del quadrilatero.*

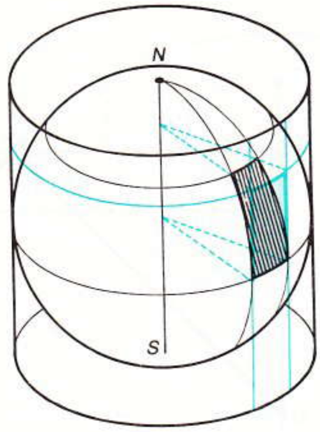

Fig. 4

Riferiamoci ora alla fig. 5: al parallelo di raggio r' corrisponde, sul cilindro, un cerchio di raggio r; si ha quindi che la proiezione sul cilindro produce una "dilatazione" nel rapporto $\frac{r'}{r}$.

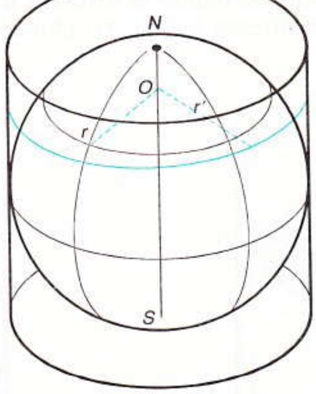

Fig. 5

Ma questa "dilatazione" è compensata da una "contrazione" "in altezza"; ecco perché: all'arco s compreso fra i due paralleli (fig. 6) corrisponde, sul cilindro, un segmento p, contratto nel rapporto $\frac{p}{s}$.

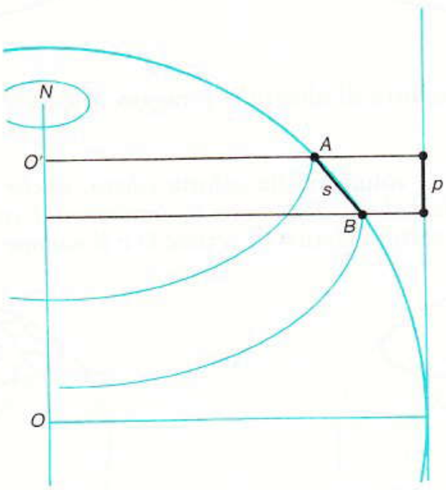

Fig. 6

Vogliamo ora dimostrare che il rapporto di contrazione $\frac{p}{s}$ è uguale al rapporto di dilatazione $\frac{r'}{r}$.

Riferiamoci alla fig. 7. Osserviamo che se l'arco s è molto piccolo, si può considerare come rettilineo; i triangoli rettangoli OO'A e ACB sono allora simili, e perciò

$$\frac{CB}{AB}=\frac{r'}{r}$$

e quindi

$$\frac{p}{s}=\frac{r'}{r}.$$

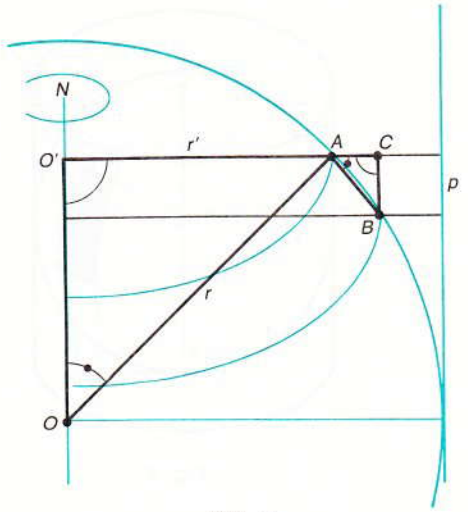

Fig. 7

Dal fatto che il rapporto di contrazione è uguale al rapporto di dilatazione risulta che: l'area della zona compresa fra due paralleli che hanno la distanza h è uguale all'area della superficie laterale di un cilindro che ha la stessa altezza *h (fig. 8). Quindi l'area della zona è data da:*

$$A_{zona}=2\pi rh.$$

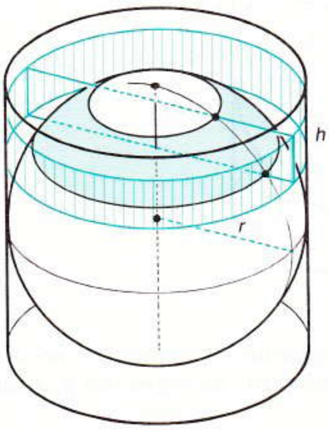

Fig. 8

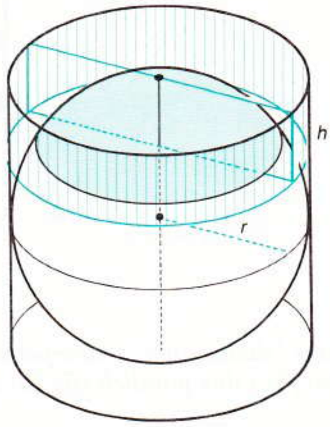

Fig. 9

E così, anche l'area della calotta di altezza *h* e raggio di base *r (fig. 9) sarà data da:*

$$A_{calotta}=2\pi rh.$$

Non è difficile determinare il volume della calotta *(detto, anche,* segmento sferico*). Riferiamoci alla fig. 10: il volume della calotta di altezza h, limitata dal cerchio di raggio r', è dato dalla differenza fra il volume del* settore sferico *di vertice O e il volume del cono di vertice O, avente per base la base della calotta.*

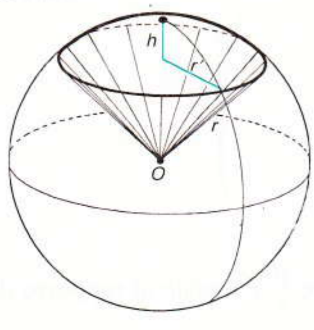

Fig. 10

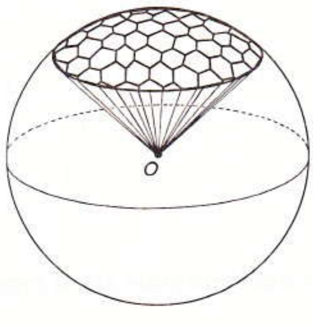

Fig. 11

Ora, il volume V del settore sferico che ha "per base" la calotta A (fig. 11) si può calcolare considerandolo come la somma di tante piramidi sottilissime che hanno il vertice in O e per base la faccetta di un poliedro inscritto nella sfera (vedi ragionamento svolto nel testo – paragrafo 7 – per determinare la superficie della sfera); è quindi dato da

$$V_{sett.\ sferico}=\frac{1}{3}A\cdot r=\frac{1}{3}2\pi r\cdot h\cdot r=\frac{2}{3}\pi hr^2.$$

Il volume V' del cono di raggio r' e di altezza r−h è dato da:

$$V'_{cono}=\frac{1}{3}\pi r'^2\cdot(r-h).$$

Si ha quindi:

$$V_{calotta}=\frac{2}{3}\pi hr^2-\frac{1}{3}\pi r'^2(r-h).$$

Si può anche ottenere una formula che esprime il volume della calotta solo in funzione di h e di r; basta, allo scopo, valersi di un teorema di Euclide per avere r' per mezzo di h e di r.
Si ha:

$$V_{calotta}=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right).$$