Il cerchio ha perimetro minimo fra tutte le figure di uguale area

Abbiamo dimostrato nel testo (paragrafo 5) che, a parità di perimetro, il cerchio ha area maggiore di qualunque poligono. Abbiamo anche osservato che questa proprietà si può invertire, ragionando per assurdo; si dimostra cioè che, a parità di area, il cerchio ha perimetro minimo.

È interessante dimostrare in modo diretto quest'ultima proposizione. Occorre premettere alcune osservazioni relative *al triangolo isoscele e al trapezio isoscele.* Si dimostra che

1) *il triangolo isoscele ha perimetro minore di ogni altro triangolo di uguale base e uguale altezza (e quindi di uguale area).*

Riferiamoci alla fig. 13: è disegnato il triangolo isoscele ABC con i lati AB e AC lunghi a, e il triangolo scaleno DBC che ha la stessa base BC e la stessa altezza e i cui lati sono lunghi b, c. Se i triangoli hanno la stessa altezza, i vertici A e D opposti alla base sono allineati su una retta r parallela alla base. Operiamo una simmetria rispetto a questa retta (fig. 14): se B' è il simmetrico di B, risulta che i punti B', A, C sono allineati, e $B'C=2a$; risulta anche $B'D=BD=b$. Dal triangolo $B'DC$ si ha che un lato è minore della somma degli altri due, e quindi:

$$B'C<B'D+CD$$

da cui

$$2a<b+c.$$

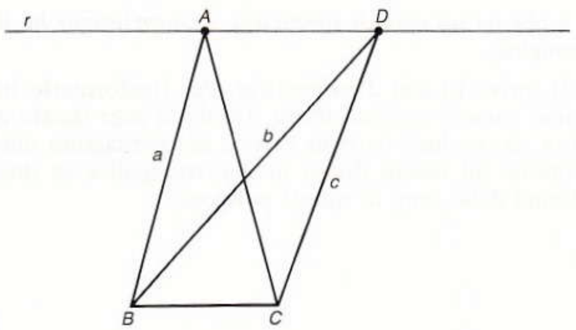

Fig. 13

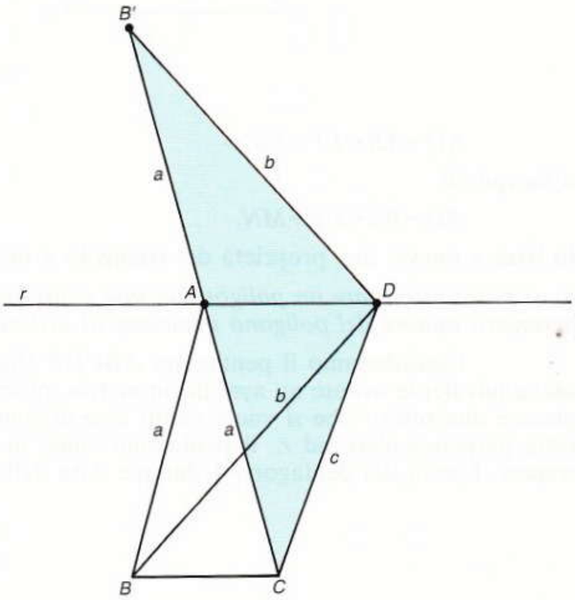

Fig. 14

Segue da questa proprietà del triangolo isoscele che:

2) *il trapezio isoscele ha perimetro minore di ogni altro trapezio di uguali basi e uguale altezza (e quindi di uguale area).*

Riferiamoci alla fig. 15, dove $ABCD$ è un trapezio isoscele ($AD=BC$) e $LMNP$ è un trapezio non isoscele, ma tale che

$$LM=AB, \quad PN=DC, \quad LK=AH.$$

Fig. 15

Basta dunque far vedere che

$$LP+MN>AD+BC.$$

È immediato: conduciamo per A (fig. 16) la parallela AR a BC, e per L la parallela LS a MN; si ottiene così il triangolo ADR, isoscele perché $AR=BC$, e il triangolo LPS non isoscele. Per la proprietà 1) risulta

Fig. 16

$$AD+AR<LP+LS;$$

si ha quindi

$$AD+BC<LP+MN.$$

In base a queste due proprietà del triangolo e del trapezio isoscele riusciremo a dimostrare che:

3) *si può trasformare un poligono in uno equivalente e che ha un asse di simmetria, e quest'ultimo ha il perimetro minore del poligono mancante di assi di simmetria.*

Consideriamo il pentagono $ABCDE$ (fig. 17), privo di assi di simmetria. Per trasformarlo in uno equivalente avente un asse di simmetria, procediamo come è indicato in fig. 18: dopo aver fissato a piacere una retta r che si vuole risulti asse di simmetria, si conduce da ogni vertice del pentagono una retta perpendicolare ad r. Il pentagono viene in tal modo ad essere diviso in due triangoli e in due trapezi. L'area del pentagono è dunque data dalla somma delle aree di questi poligoni.

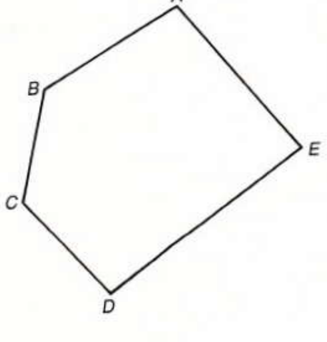

Fig. 17

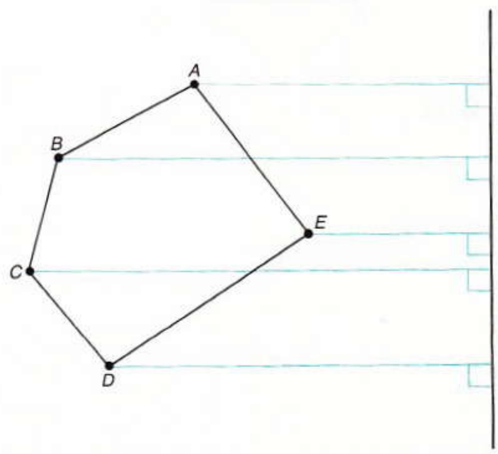

Fig. 18

Ora – e riferiamoci alla fig. 19 –, facciamo "slittare" ogni corda del pentagono, e cioè BL, ME, CN, in modo che il punto medio risulti proprio sull'asse r; si avranno i segmenti $B'L'$, $M'E'$, $C'N'$. Se si congiungono gli estremi di questi segmenti si ottiene il poligono $A'B'M'C'D'N'E'L'$: è *un ottagono*; ha per asse di simmetria la retta r.

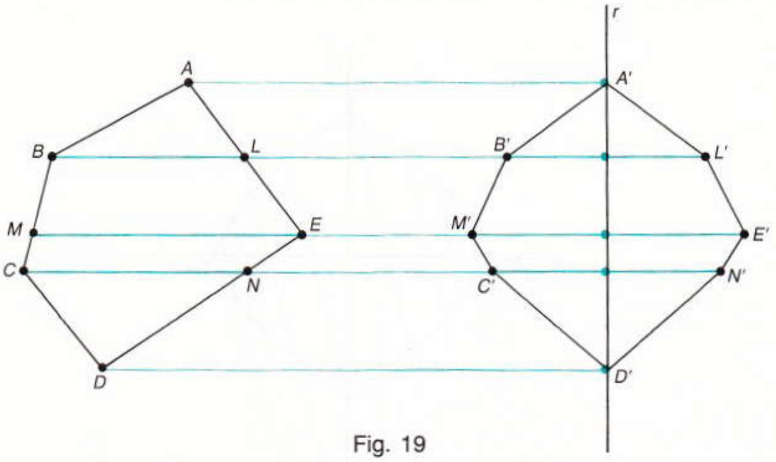

Fig. 19

L'area di questo ottagono è certamente uguale all'area del pentagono dato, perché risulta somma di due triangoli e di due trapezi che sono equivalenti alle corrispondenti figure che compongono il pentagono. Ma il perimetro dell'ottagono è minore di quello del pentagono perché i suoi lati sono lati di triangoli e di trapezi isosceli, mentre nel caso del pentagono i triangoli e i trapezi non sono isosceli. Dunque, a parità di area, il nuovo poligono ha un perimetro minore.

Si capisce che *il procedimento di simmetrizzazione* che abbiamo seguito può ripetersi: la fig. 20 mostra la trasformazione dell'ottagono in un poligono equivalente che ha come nuovo asse di simmetria una retta s perpendicolare ad r.

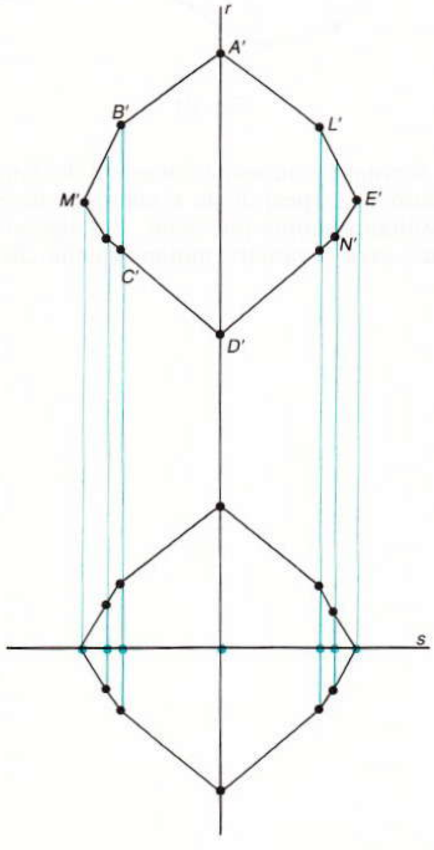

Fig. 20

È chiaro che questo nuovo poligono ha la stessa area dell'ottagono, essendo formato da trapezi e da triangoli equivalenti a quelli che formano l'ottagono, ma il perimetro è minore perché, ora, si sono sostituiti dei trapezi e dei triangoli isosceli.

La fig. 21 mostra una successiva trasformazione del poligono: il nuovo poligono ha come asse di simmetria una retta t avente una direzione diversa da r e da s.

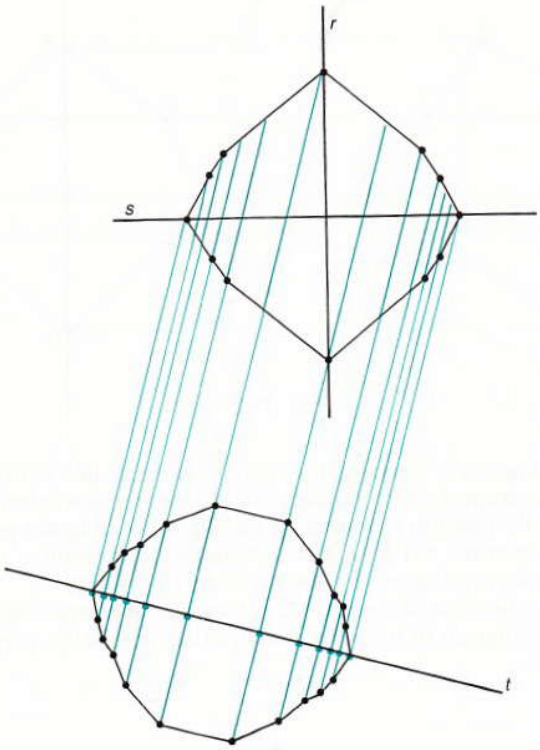

Fig. 21

Via via che si procede, si nota che aumenta il numero dei lati del poligono e che il suo contorno si presenta "sempre più arrotondato": i trapezi di cui si compone diventano infatti sempre "più sottili", cioè gli estremi dei lati obliqui risultano sempre più vicini. Il poligono tende a una figura curvilinea, e si capisce che fra le figure curvilinee avrà perimetro minimo quella che ha il massimo numero di assi di simmetria, e cioè *il cerchio*.