5
Complementi

Un procedimento per approssimare π basato sulla determinazione dell'area del cerchio

Abbiamo visto nel testo come si possano determinare dei valori per difetto sempre più approssimati di π considerando i perimetri di poligoni regolari inscritti nel cerchio; abbiamo anche osservato (esercizio 39) come si possa, dato il perimetro di un poligono regolare inscritto, determinare il perimetro del circoscritto avente lo stesso numero di lati, ed avere così dei valori di π per eccesso.

Invece di confrontare il perimetro di un poligono con la lunghezza della circonferenza, si possono mettere a confronto le aree; ma per determinare l'area di un poligono regolare occorre conoscere, oltre alla lunghezza del lato, anche quella dell'apotema (fig. 1), e il procedimento è spesso assai complesso.

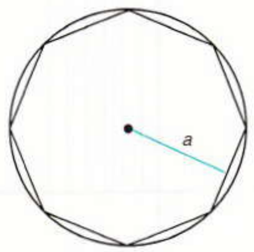

Fig. 1

In queste pagine vedrete che l'area approssimata del cerchio si può ottenere basandosi su un altro tipo di considerazioni. Prima di passare al cerchio cominciamo a studiare un caso più generale.

Se si vuole calcolare l'area di una zona curvilinea, come quella di fig. 2, si può procedere così: si divide "la base" OA in tanti segmenti uguali, e dagli estremi di questi si conducono le perpendicolari ad OA fino ad incontrare la curva; si ottengono così tanti rettangoli con un lato curvo.

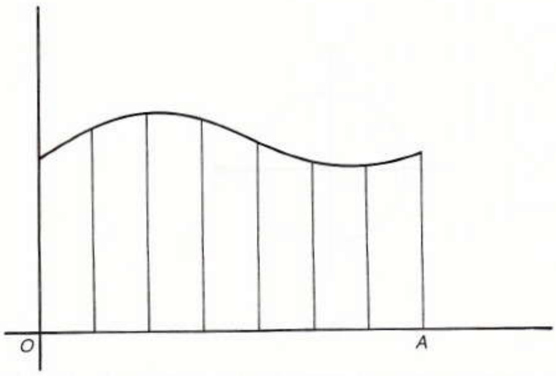

Fig. 2

L'area di ogni rettangolo può essere approssimata per difetto o per eccesso, come è indicato nelle figg. 3 e 4.

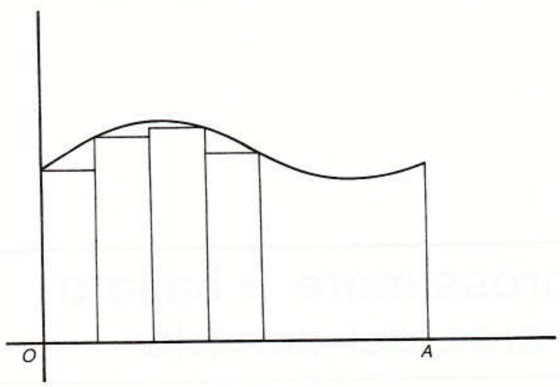

Fig. 3

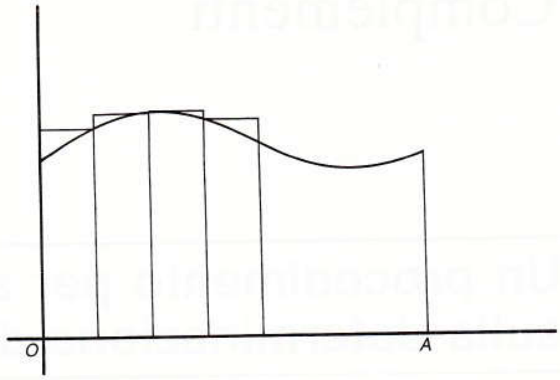

Fig. 4

È chiaro che (figg. 5 e 6) l'approssimazione sarà tanto migliore quanto maggiore è il numero di suddivisioni eseguite sulla "base" OA.

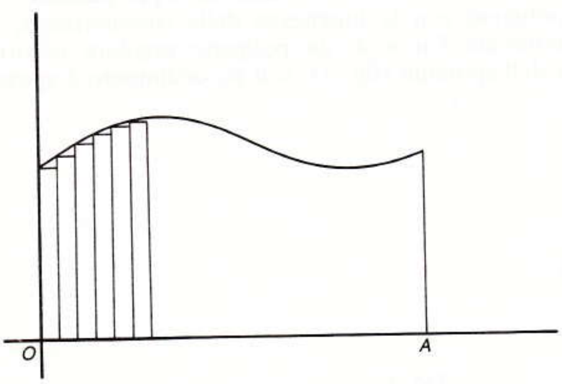

Fig. 5

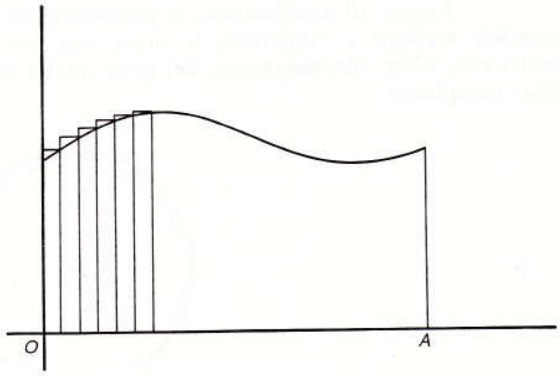

Fig. 6

E ora veniamo al cerchio. In fig. 7 è disegnato un cerchio in un piano cartesiano; il centro è O e il raggio è lungo 1. Sappiamo che l'area del cerchio è data da

$$A=\pi r^2;$$

se il raggio è lungo 1, risulta

$$A=\pi.$$

Consideriamo la quarta parte del cerchio, quella compresa nel I quadrante; la sua area è

$$A=\frac{\pi}{4}.$$

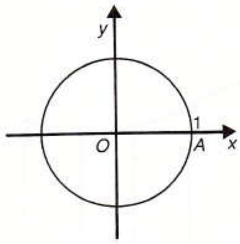

Fig. 7

Vogliamo approssimare questa area col metodo dei rettangoli. Dividiamo la "base" OA in 4 parti uguali; potremo avere un valore per eccesso e un valore per difetto di ogni rettangolo curvilineo prendendo come altezza o il lato di sinistra (fig. 8) o il lato di destra (fig. 9).

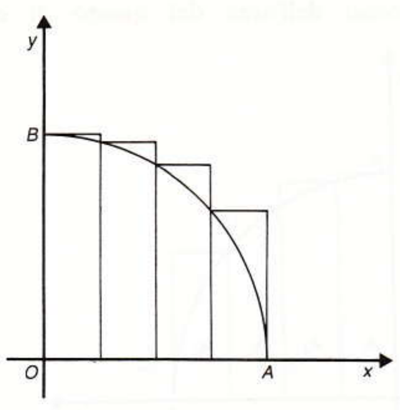

Fig. 8

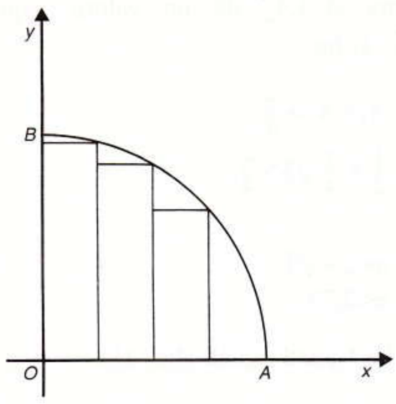

Fig. 9

Limitiamoci a considerare i valori per eccesso, eseguendo il calcolo in tre casi:

– divisione della base in 2 parti uguali.
– » » » » 4 » »
– » » » » 8 » »

Ogni volta confronteremo l'area approssimata con l'area del quarto di cerchio, cioè con $\frac{\pi}{4}$, ottenendo così un valore approssimato di π.

Divisione in 2 parti uguali (fig. 10)

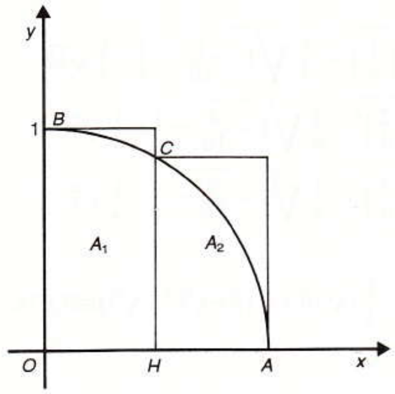

Fig. 10

Il primo rettangolo ha base $\frac{1}{2}$ e altezza 1; la sua area A_1 è dunque data da

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Per il secondo rettangolo, di area A_2, dobbiamo determinare l'altezza CH. Ci viene in aiuto la geometria analitica! Sappiamo che l'equazione del cerchio di centro O e raggio uguale a 1 è:

(1) $\qquad x^2 + y^2 = 1.$

Questo vuol dire che le coordinate di un punto che percorre la circonferenza soddisfano alla (1), cioè la y di un punto è data da

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Se ci limitiamo al I quadrante, si ha

(2) $\qquad y = \sqrt{1 - x^2}.$

Da questa formula si può avere il valore dell'ordinata del punto C, dato che se ne conosce l'ascissa: basta porre nella (2) al posto di x il valore $\frac{1}{2}$. Si ha

$$y_{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

L'area A_2 è dunque data da

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{4}\sqrt{3}.$$

La somma A_1+A_2 dà un valore approssimato per eccesso dell'area del quarto di cerchio, cioè di $\frac{\pi}{4}$; si ha

$$A_1+A_2>\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{3}>\frac{\pi}{4}$$

ossia

$$\pi<2+\sqrt{3}$$

$$\pi<3,73.$$

Divisione in 4 parti uguali (fig. 11)

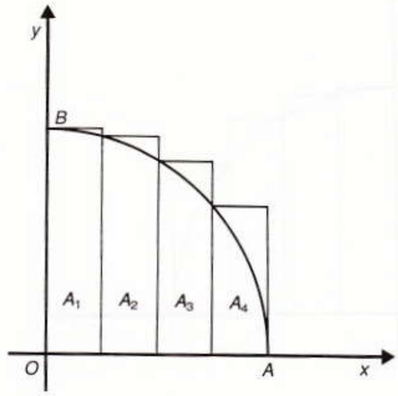

Fig. 11

L'approssimazione di π diventa migliore se passiamo alla divisione di OA in 4 parti uguali. I calcoli si riferiscono alla fig. 11; per ogni rettangolo abbiamo calcolato, in base all'equazione del cerchio

$$y=\sqrt{1-x^2},$$

l'altezza "di sinistra", e, quindi, l'area del rettangolo. Si ha:

$$A_1=\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{4}$$

$$A_2=\frac{1}{4}\cdot y_{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{15}$$

$$A_3=\frac{1}{4}y_{\frac{2}{4}}=\frac{1}{4}\sqrt{1-\left(\frac{2}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{4}{16}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{12}$$

$$A_4=\frac{1}{4}y_{\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{7}.$$

Risulta quindi:

$$A_1+A_2+A_3+A_4=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}(\sqrt{16}+\sqrt{15}+\sqrt{12}+\sqrt{7})\cong 0,874.$$

Allora

$$0,874>\frac{\pi}{4}$$

ossia

$$\pi<3,496.$$

Divisione in 8 parti uguali (fig. 12)

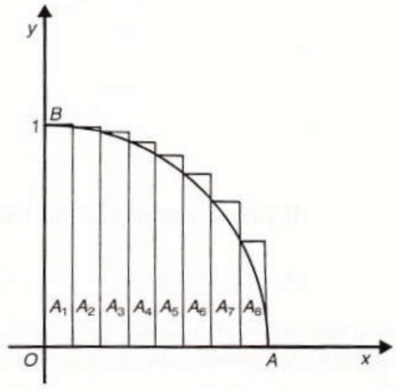

Fig. 12

Se procediamo come nei due casi precedenti, si ha:

$$A_1+A_2+A_3+\ldots+A_8>\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{8}\left(1+\frac{\sqrt{63}}{8}+\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{\sqrt{55}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{39}}{8}+\frac{\sqrt{28}}{8}+\frac{\sqrt{15}}{8}\right)>\frac{\pi}{4}$$

da cui, approssimativamente

$$0,835>\frac{\pi}{4}$$

e quindi

$$\pi<3,3443748.$$

I valori per eccesso vanno diminuendo a mano a mano che aumenta il numero delle divisioni della "base" OA; cioè, al diminuire dello spessore dei rettangoli, la somma delle aree di questi si avvicina sempre di più all'area del quarto di cerchio.