5
Il cerchio

1. Generalità
2. Lunghezza e area del cerchio
3. Un procedimento per approssimare π
4. Considerazioni sul numero π
5. Variazioni di area in poligoni isoperimetrici.
   Il cerchio ha area massima a parità di perimetro

Il cerchio: la sua storia

Chi può avere inventato il cerchio? È chiaro che il cerchio... si è presentato da sé: bastava osservare l'orizzonte, bastava lanciare una pietra in uno stagno, e guardare. Il cerchio deve essere nato con l'uomo stesso. E ben presto l'uomo lo fece suo: le prime capanne sono infatti a base circolare, come attestano antichi graffiti, e ancor oggi queste capanne circolari sono le più sfruttate sia come contenitori di messi sia, anche, come vere abitazioni.

Il cerchio è diventato anche il mezzo per facilitare il trasporto di oggetti pesanti: s'inventò la ruota. L'invenzione della ruota sembra risalire all'epoca pastorale, e quindi alla fine del 4000 a.C.: resti e graffiti di ruote "piene" costruite tagliando dei tronchi d'albero sono stati trovati in varie parti del mondo, in particolare in Asia. Varie parti del mondo, sì, ma fa impressione pensare che agli Spagnoli che per primi misero piede nel Messico o che si avventurarono sulle Ande, si presentò un popolo "senza ruote"! e senza ruote sono tuttora delle tribù in certe regioni all'interno dell'Africa o dell'Australia!

Fin qua, la presenza del cerchio nella realtà. Ma quando è che il cerchio è entrato a far parte del mondo dei matematici? I documenti più antichi che ci sono arrivati e che trattano dell'argomento "cerchio" sono molto moderni rispetto alla presenza del cerchio: sono il Papyrus Rhind (un papiro egiziano del 1650 a.C.), delle tavolette babilonesi di poco anteriori, e la stessa Bibbia. Si dice nella Bibbia che «egli costruì in metallo fuso un grande tino che aveva il diametro lungo 10 cubiti e che era completamente rotondo, e la circonferenza era di 30 cubiti». Il rapporto fra circonferenza l e diametro d, cioè il famoso numero π, era dunque considerato proprio uguale a 3.

A un valore più approssimato arrivarono i Babilonesi: si è scoperto, poche decine d'anni fa, che utilizzavano il valore

$$\pi=3+\frac{7}{60}+\frac{1}{120}=3+\frac{1}{8}=3,125.$$

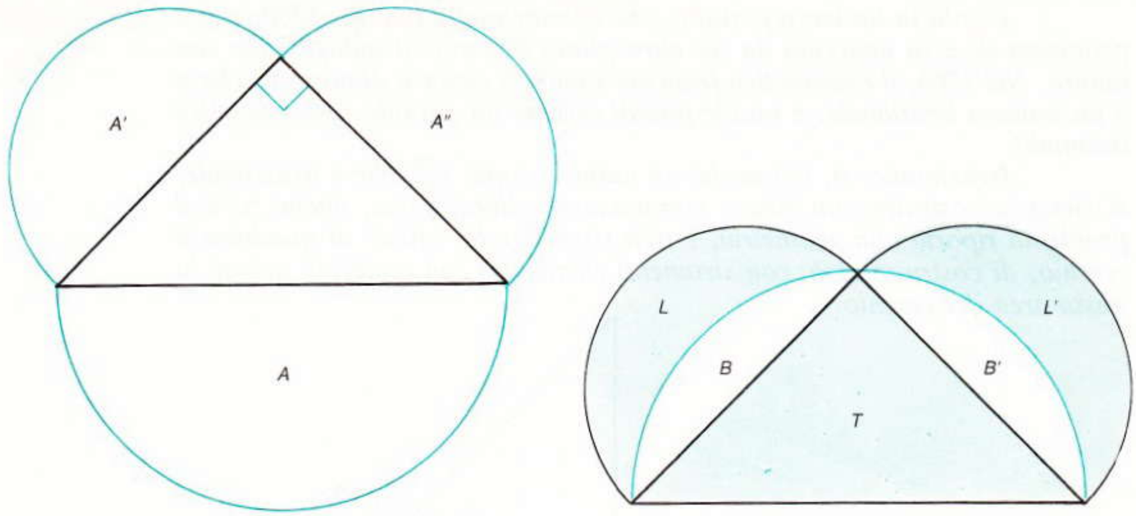
Nel Papyrus Rhind si parla della quadratura del cerchio; si dice che l'area di un cerchio di diametro d è uguale all'area di un quadrato che ha il lato lungo gli $\frac{8}{9}$ di d. Si ottiene così un valore di π per eccesso.

Ma tutte queste regole da dove vengono? Quali ragionamenti ne sono alla base? E a chi erano dirette queste informazioni?

Molti secoli dopo troviamo, in suolo greco, dei metodi per risolvere geometricamente il problema della lunghezza e dell'area del cerchio. Un contemporaneo di Socrate, Antifonte (430 a.C.), inscrive in un cerchio un quadrato, e poi un ottagono regolare, e poi immagina di raddoppiare sempre il numero dei lati fino a che il poligono coincida con il cerchio. Ma... finirà veramente col coincidere? E poi – ci si chiedeva – si può costruire un poligono con l'area esattamente uguale a quella di una figura a contorno curvilineo? A questa domanda rispose, proprio nella stessa epoca, Ippocrate di Chio: egli dimostra che le due lunule indicate in colore nella figura della pagina a fianco hanno la stessa area del triangolo rettangolo; la dimostrazione è indicata vicino alla figura.

Dunque, si può. Allora è lecito cercar di costruire un quadrato o un poligono qualunque che abbia la stessa area di un cerchio!

Archimede stabilisce il teorema: **un cerchio ha la stessa area di un triangolo rettangolo avente un cateto lungo come la circonferenza e l'altro lungo come il raggio.** *Il problema diventa allora questo: in qual modo costruire un segmento lungo esattamente come la circonferenza? E poi, costruire come? Utilizzando – si diceva – gli strumenti usuali, e cioè riga e*



Per il teorema di Pitagora risulta: $A=A'+A''$

Si toglie $B+B'$ ad A e si ha T

Si toglie $B+B'$ ad $A'+A''$, e si hanno le due lunule $L+L''$. Risulta: $L+L'=T$

compasso; oppure – si disse poi – utilizzando il tracciato di curve note, come per esempio la parabola. Ma la costruzione non riusciva; perché?

E di nuovo si ricorre al metodo che sembrava essere il più logico: quello di inscrivere e circoscrivere poligoni nel cerchio.

È Archimede che scopre delle formule che legano i perimetri di poligoni di n lati e quelli di 2n lati, inscritti e circoscritti a un cerchio. Questi metodi permettono, almeno teoricamente, di calcolare π con un'approssimazione data. Ma il valore preciso di π come si raggiunge? I metodi dei Greci sono essenzialmente geometrici, e π sembra sfuggire a questi metodi!

Poi i secoli passano, e per 1500 anni l'Occidente sembra dormire. Ma il problema di π non muore: si ritrova in Oriente, in Cina, in India, nel mondo arabo. Vengono scoperti dei valori più approssimati di π; ma un metodo generale per "attaccarlo" non si vede ancora!

E dall'Oriente il problema torna in Europa. Con la scoperta, nel 1600, del calcolo infinitesimale, il problema di approssimare π si fa più chiaro: e l'approssimazione comporta successioni infinite di numeri, come somme e prodotti, frazioni continue. Ecco delle espressioni di π trovate fra l'inizio del 1600 e la fine del 1700:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\dots$$

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{3^2\cdot 5}-\frac{1}{3^3\cdot 7}+\dots\right)$$

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\cdot\dots}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot 10\cdot 10\cdot\dots}$$

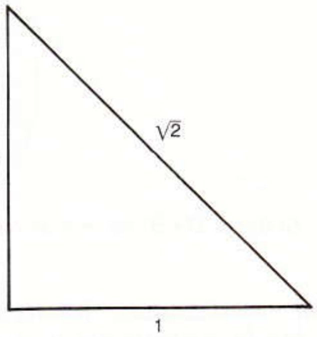
$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\ddots}}}}$$

Si punta quindi su π con tecniche matematiche più potenti, ma queste tecniche, tradotte geometricamente, condurrebbero a utilizzare riga e compasso un'infinità di volte! Se dunque, da una parte, migliora la conoscenza quantitativa di π, non viene chiarita però la sua natura: non si conosce ancora π.

È solo in un terzo periodo, che comincia alla fine del 1700, che il problema di π fu attaccato da un altro punto di vista: si indaga sulla sua natura. Nel 1766, il matematico francese Lambert riesce a dimostrare che π è ***un numero irrazionale****; è inutile quindi cercare un periodo nelle sue cifre decimali!*

Irrazionale, sì, ma anche un numero come $\sqrt{2}$, che è irrazionale, si riesce a costruire con riga e compasso; e allora, forse, anche π; e il problema riporta alla geometria, e non si spenge la "sfida" di quadrare il cerchio, di costruire cioè, con strumenti elementari, un quadrato avente la stessa area del cerchio.

$x^2-2=0 \qquad x=\sqrt{2}$



Doveva passare ancora più di un secolo perché, nel 1882, il matematico tedesco Lindemann dimostrasse che π non è solamente irrazionale ma è di natura ancor più riposta: ***è un numero trascendente****, un numero cioè che non può essere, come per esempio $\sqrt{2}$, soluzione di un'equazione algebrica a coefficienti interi, non può essere quindi costruito con strumenti elementari. Sono passati più di 25 secoli di lavori! La storia del cerchio termina "tristemente", con una scoperta che annulla tentativi e ricerche di secoli. Ma questa scoperta apre nuove strade alla ricerca: esistono altri numeri trascendenti? Chi sono?*

1. Generalità

Ogni punto P della circonferenza ha la stessa distanza da un punto O (fig. 1). **Circonferenza è** dunque **il luogo dei punti del piano che hanno una data distanza da un punto del piano stesso**. La distanza è il *raggio*.

Nella precedente definizione tutti gli elementi sono importanti; infatti se non si precisa che i punti appartengono allo stesso piano si ha la superficie di una *sfera* (fig. 2); se i punti appartengono allo stesso piano, ma il punto O è fuori del piano, si ha un *cono* (fig. 3).

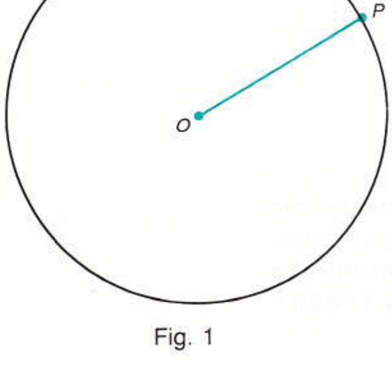


Fig. 1

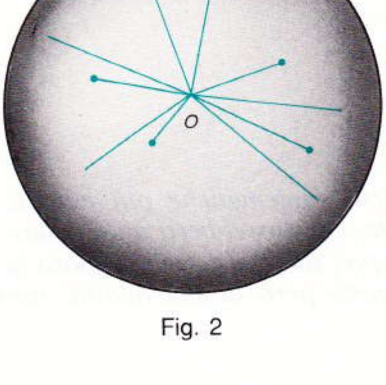


Fig. 2

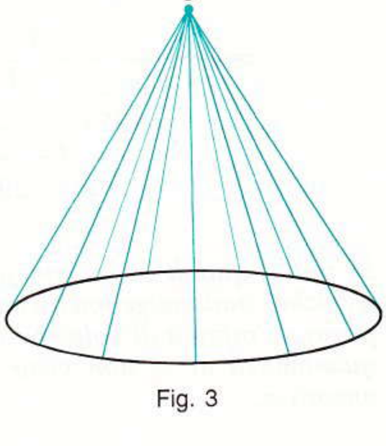


Fig. 3

Si dà il nome di *cerchio* alla parte interna alla circonferenza; spesso, però, con il termine cerchio s'intende sia la parte interna che la circonferenza, proprio come con la parola triangolo si indica, indifferentemente, il contorno e la zona interna.

Il segmento che congiunge due punti della circonferenza è una *corda* (fig. 4). Il *diametro* è una particolare corda (fig. 5): divide il cerchio in due parti uguali; siccome i diametri sono infiniti, *il cerchio ha infiniti assi di simmetria* (fig. 6).

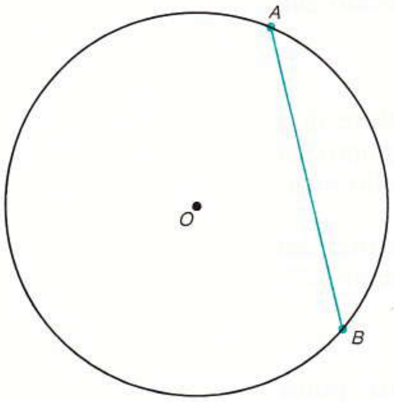


Fig. 4

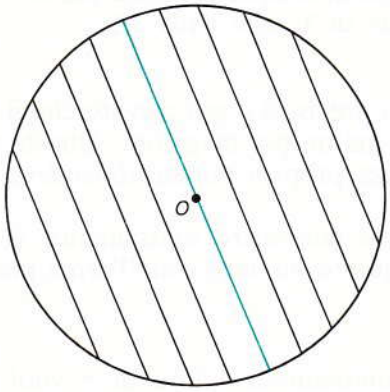


Fig. 5

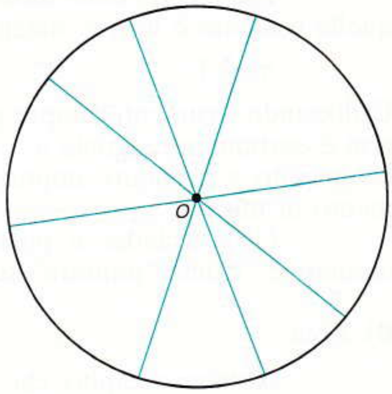


Fig. 6

2. Lunghezza e area del cerchio

A) Lunghezza

Se misuriamo con cura il bordo di oggetti rotondi, constatiamo che, ogni volta, il quoziente fra la lunghezza della circonferenza e quella del diametro risulta *circa uguale a 3*. Si capisce che ci deve essere un rapporto costante fra circonferenza e diametro perché *due cerchi* hanno sempre la stessa forma, cioè sono *figure simili* (fig. 7). Si è quindi condotti a stabilire che *è costante il rapporto fra la lunghezza l della circonferenza e il diametro 2r* (fig. 8); si scrive:

$$\frac{l}{2r}=\text{costante.}$$

Da qui si ha:

$$l=2r\cdot\text{costante.}$$

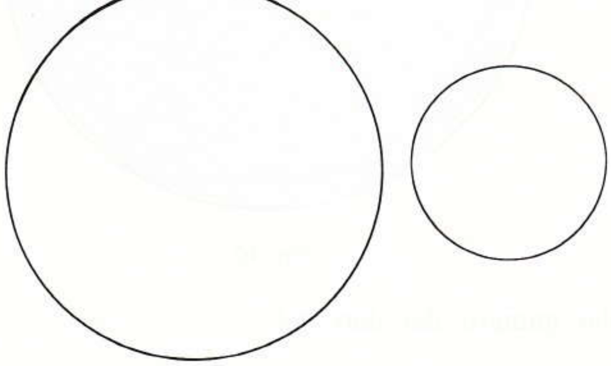


Fig. 7

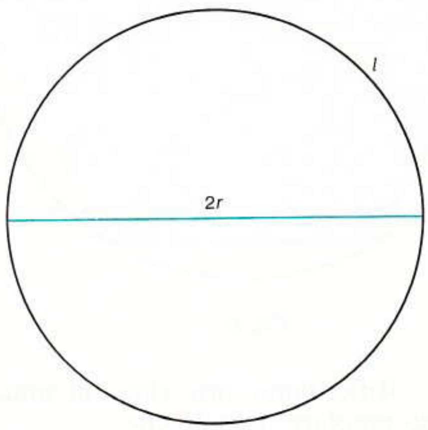


Fig. 8

Questo numero costante, che per ora sappiamo solo essere approssimativamente uguale a 3, fu indicato dal matematico svizzero Eulero (1737) con π, che è la lettera "p" dell'alfabeto greco (per ricordare che è l'iniziale della parola perimetro); si scrive dunque:

$$l=2r\cdot\pi.$$

La lunghezza della circonferenza è data dal prodotto del diametro per π.

Ma la soddisfazione di avere stabilito questa formula è davvero... relativa, dato che si conosce solo approssimativamente il valore di π.

Eseguendo delle misurazioni sempre più accurate si è trovato che quella costante è un po' maggiore di 3; vale circa 3,1:

$$\pi\cong 3{,}1.$$

Utilizzando strumenti sempre più precisi si è poi trovato che il valore di π non è esattamente uguale a 3,1, ma un po' maggiore. Questo numero ha cominciato a prendere importanza proprio perché *dipendeva* dallo strumento di misura.

Ci si chiede: è possibile conoscere esattamente il valore del numero π? Come "puntare" su questo numero con "l'arma matematica"?

B) Area

Abbiamo capito che conoscere il valore di π vuol dire poter determinare la lunghezza della circonferenza; ma vuole anche dire poter determinare l'area di un cerchio di dato raggio r; ecco perché: è chiaro che un valore approssimato per difetto dell'area di un cerchio si ottiene calcolando l'area di un poligono regolare in esso inscritto (fig. 9); e si capisce che, all'aumentare del numero dei lati del poligono regolare, l'area aumenta e *tende* a quella del cerchio (fig. 10). L'area di un poligono regolare è data da

$$A=\frac{p\cdot a}{2}, \qquad (1)$$

dove p indica il perimetro ed a l'apotema.

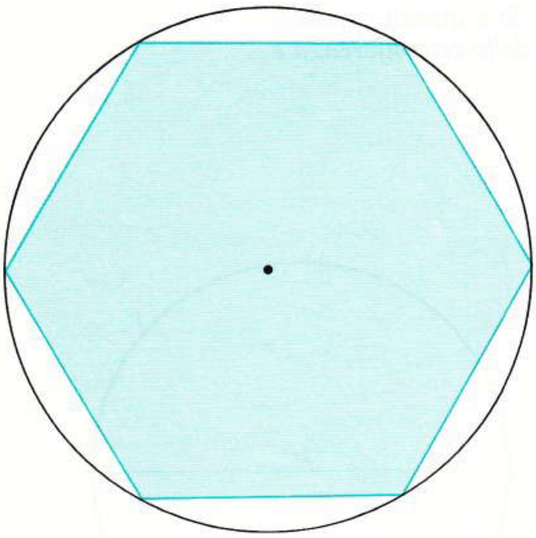


Fig. 9

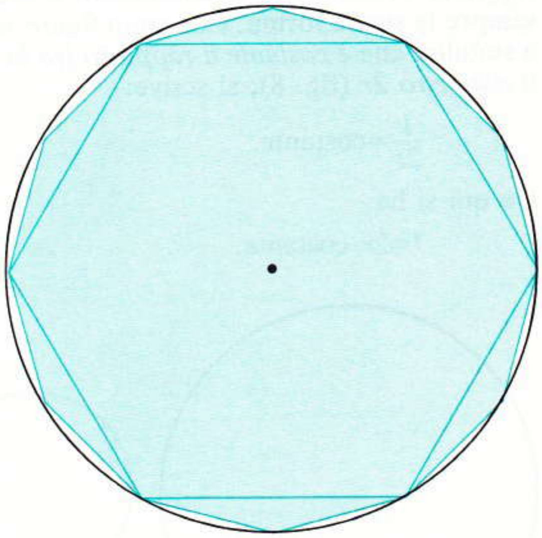


Fig. 10

Riflettiamo ora che, all'aumentare del numero dei dati del poligono regolare, accade che:

- il perimetro aumenta e tende alla lunghezza l della circonferenza,
- l'apotema aumenta e tende al raggio r del cerchio.

Dalla (1), relativa ai poligoni regolari, si è quindi condotti a scrivere la (2), relativa al cerchio:

$$A=\frac{l\cdot r}{2}=\frac{2r\pi\cdot r}{2}=r^2\pi. \qquad (2)$$

Si ottiene così la formula, che dà l'area A del cerchio, nota la lunghezza r del raggio: *l'area si ottiene moltiplicando il quadrato del raggio per* π.

Ma, ancora una volta, ci si chiede: quanto vale il numero π? Se fosse $\pi=3$, la formula $A=3r^2$ direbbe che l'area del cerchio è uguale a quella di 3 quadrati di lato r (fig. 11). Ma non è vero che π sia esattamente uguale a 3; e allora?

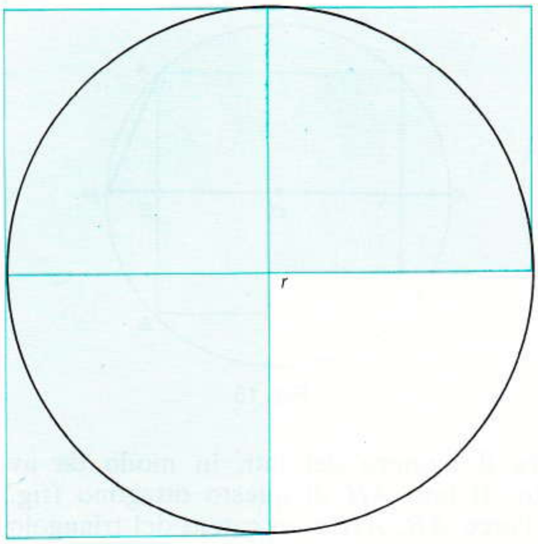


Fig. 11

3. Un procedimento per approssimare π

Una prima idea per ottenere dei valori approssimati della lunghezza della circonferenza è questa: calcolare i perimetri dei poligoni inscritti e i perimetri dei poligoni circoscritti; dagli iscritti si avranno dei valori di π approssimati per difetto, dai circoscritti dei valori approssimati per eccesso.

È chiaro che all'aumentare del numero dei lati:

- il perimetro dei poligoni inscritti aumenta (fig. 12),
- il perimetro dei poligoni circoscritti diminuisce (fig. 13).

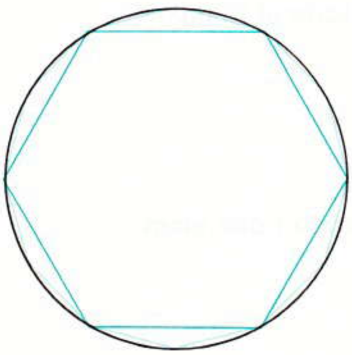


Fig. 12

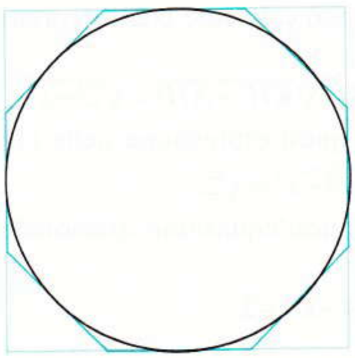


Fig. 13

Il procedimento che ora esponiamo si basa sui poligoni regolari inscritti, ottenuti raddoppiando successivamente il numero dei lati. Per semplicità fissiamo uguale ad 1 il raggio del cerchio. Cominciamo col considerare il quadrato $ABCD$ inscritto nel cerchio (fig. 14): il lato AB del quadrato ha una lunghezza, che indichiamo con l_4, data da

$$l_4=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

Il perimetro p_4 del quadrato, dato da

$$p_4=4\sqrt{2},$$

fornisce un primo valore approssimato della lunghezza della circonferenza.

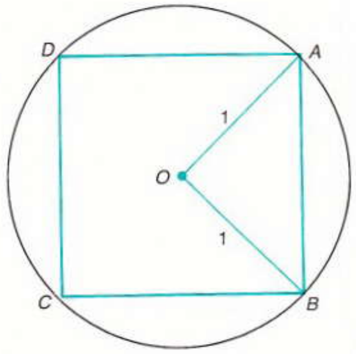


Fig. 14

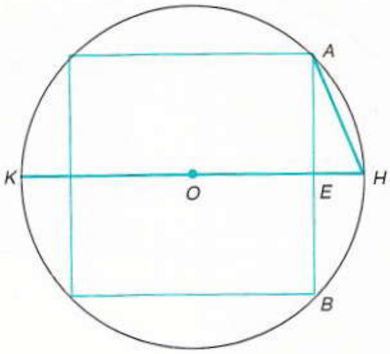


Fig. 15

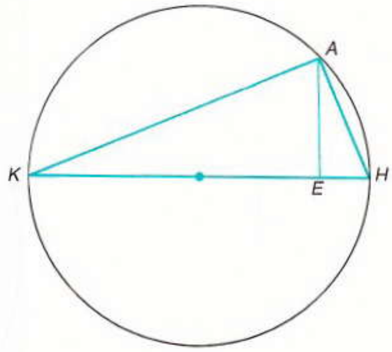


Fig. 16

Raddoppiamo ora il numero dei lati, in modo da avere un ottagono regolare inscritto. Il lato AH di questo ottagono (fig. 15) si ottiene dividendo a metà l'arco AB; AH è un cateto del triangolo AHK, rettangolo in A perché inscritto in una semicirconferenza (fig. 16). Per determinare la lunghezza di AH, riflettiamo su questo triangolo: la sua area – sia S – si può determinare nei due modi seguenti:

$$S=\frac{1}{2}\overline{AH}\cdot\overline{AK}$$

$$S=\frac{1}{2}\overline{KH}\cdot\overline{AE}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Questi due risultati devono essere uguali; uguagliando le due formule si ha un'equazione nell'incognita $x=AH$:

$$\frac{1}{2}x\cdot\overline{AK}=\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

cioè

$$x\cdot\overline{AK}=\sqrt{2}. \qquad (1)$$

Ora, AK si può calcolare con il teorema di Pitagora applicato al triangolo KAH; si ha

$$AK=\sqrt{\overline{KH}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{2^2-x^2}=\sqrt{4-x^2}.$$

Sostituendo quest'espressione nella (1) otteniamo

$$x\cdot\sqrt{4-x^2}=\sqrt{2}.$$

Risolviamo quest'equazione irrazionale elevando al quadrato i due membri; si ha:

$$x^2(4-x^2)=2,$$

cioè

$$x^4-4x^2+2=0.$$

Le soluzioni di quest'equazione biquadratica sono

$$x=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{4-2}},$$

ossia

$$x=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}.$$

Delle quattro soluzioni, vanno scartate ovviamente le due negative, date da:

$$x=-\sqrt{2\pm\sqrt{2}}.$$

Delle altre due, va scartata la soluzione

$$x=+\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

perché è maggiore di $\sqrt{2}$, e questo non può verificarsi dato che il lato dell'ottagono è certamente minore del lato del quadrato, che è lungo proprio $\sqrt{2}$. Quindi, l'unica soluzione accettabile è

$$x=+\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Si conclude che *la lunghezza l_8 del lato dell'ottagono regolare* inscritto nel cerchio di raggio 1 è data da:

$$l_8=\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Così il perimetro dell'ottagono regolare, dato da

$$p_8=8\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

dà una migliore approssimazione della lunghezza della circonferenza.

Ora, a partire dal lato AH dell'ottagono regolare, si può calcolare la lunghezza l_{16} del lato MH del poligono regolare di 16 lati (fig. 17); si ragiona nello stesso modo: si determina l'area S' del triangolo KMH, rettangolo in M, in due modi:

$$S'=\frac{1}{2}\,\overline{MK}\cdot\overline{MH}=\frac{1}{2}\,\overline{MK}\cdot l_{16}$$

$$S'=\frac{1}{2}\,\overline{KH}\cdot\overline{MR}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\,l_8=\frac{1}{2}\,l_8.$$

Uguagliamo le due formule, ricordando che si ha

$$l_8=\sqrt{2-\sqrt{2}}$$
$$l_{16}=x,$$

si ottiene:

$$(1)\qquad \overline{MK}\cdot x=\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

D'altra parte, risulta

$$\overline{MK}=\sqrt{4-x^2},$$

e quindi la (1) si scrive:

$$x\sqrt{4-x^2}=\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Elevando al quadrato si ha

$$x(4-x^2)=2-\sqrt{2},$$

ossia

$$x^4-4x^2+2-\sqrt{2}=0,$$

da cui

$$x=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

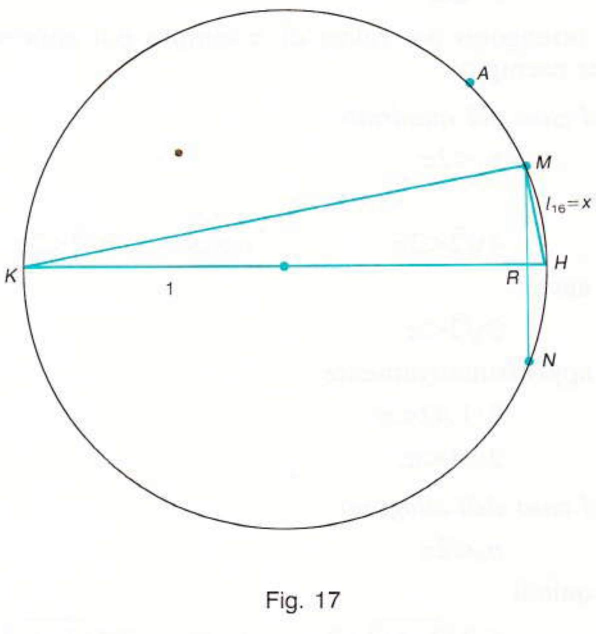


Fig. 17

Scartiamo ovviamente le soluzioni negative

$$x=-\sqrt{2\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

e anche la soluzione

$$x=+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

perché risulta maggiore del lato l_8; l'unica soluzione è dunque:

$$x=l_{16}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Si può dunque ottenere un altro valore approssimato della lunghezza della circonferenza:

$$p_{16}=16\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Seguendo lo stesso procedimento si ottiene la lunghezza l_{32} del lato del poligono regolare di 32 lati; risulta:

$$l_{32}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$

Si capisce che il procedimento è *iterativo*, cioè, data la lunghezza del lato del poligono regolare di 2^n lati (per esempio $2^5=32$), si riesce a determinare la lunghezza del lato del poligono regolare di 2^{n+1} lati (nel nostro caso $2^6=64$) inscritto nello stesso cerchio.

Ora, è chiaro che conoscendo la lunghezza dei lati di questi poligoni si può avere il perimetro dei poligoni stessi. Riferendosi sempre al caso ora svolto, si ha che i perimetri dei poligoni di 4, 8, 16, ... lati sono dati da:

$$p_4=4\sqrt{2}$$

$$p_8=8\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

$$p_{16}=16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

....

Confrontando questi perimetri con la lunghezza della circonferenza di raggio 1, cioè con

$$l=2\pi,$$

si ottengono dei valori di π sempre più approssimati per difetto. Si ha, per esempio:

nel caso del quadrato

$$p_4<2\pi$$

cioè

$$4\sqrt{2}<2\pi \qquad \text{ossia} \qquad 2^2\sqrt{2}<2\pi$$

o anche

$$2\sqrt{2}<\pi$$

e approssimativamente

$$2\cdot 1{,}42<\pi$$

$$2{,}84<\pi;$$

nel caso dell'ottagono

$$p_8<2\pi$$

e quindi

$$8\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}<2\pi \qquad \text{ossia} \qquad 2^3\sqrt{2-\sqrt{2}}<2\pi,$$

e approssimativamente

$$4\sqrt{2-1{,}42}<\pi$$

da cui

$$3{,}04<\pi.$$

Ripetendo il procedimento nel caso del poligono regolare di 16 lati e di quello di 32 lati si ottiene

$$3{,}09<\pi \qquad \text{e} \qquad 3{,}13<\pi.$$

Ognuno di questi numeri

$$2{,}84; \qquad 3{,}04; \qquad 3{,}09; \qquad 3{,}13; \ldots$$

è dunque un valore approssimato per difetto di π.

È chiaro che all'aumentare del numero dei lati del poligono inscritto si hanno dei valori di π approssimati sempre meglio; e siccome il procedimento può essere continuato quanto si vuole, potremo ottenere dall'espressione

$$2^m\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$$

approssimazioni sempre migliori di π, aumentando sempre di più il numero m dei lati del poligono.

4. Considerazioni sul numero π

Queste considerazioni hanno lo scopo di indagare sulla natura del numero π; le sviluppiamo nei punti A) e B).

A) *π è un numero irrazionale*

L'espressione che abbiamo trovato nel paragrafo precedente e che dà la possibilità di ottenere dei valori sempre più approssimati di π, "sembra" essere irrazionale per ogni valore di m dato che contiene tante radici quadrate di 2, e – lo sappiamo – $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale. Ma – riflettiamo – non è la sola "apparenza" che può dare assicurazione di questo fatto. Basta un esempio per rendersene conto.

Consideriamo l'espressione

$$\sqrt{2+\sqrt{2+2}};$$

anche questa "sembra" irrazionale, ma non lo è perché

$$\sqrt{2+\sqrt{2+2}}=\sqrt{2+\sqrt{4}}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2.$$

È un'espressione razionale, anzi, addirittura intera!

Torniamo ora alla nostra espressione; se si considera, successivamente, un numero sempre maggiore di lati, si riesce a dimostrare che, per ogni caso, l'espressione risulta irrazionale. Ma, il fatto che ogni termine sia irrazionale, non garantisce che ci si avvicini a un valore razionale. È facile infatti trovare una successione di numeri irrazionali che si avvicinano sempre più a un numero razionale; ecco un esempio:

$$\sqrt{2}, \qquad \sqrt{\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}, \qquad \ldots$$

e cioè

$$2^{\frac{1}{2}}, \qquad 2^{\frac{1}{4}}, \qquad 2^{\frac{1}{8}}, \qquad \ldots$$

Sono tutti numeri irrazionali, ma se si aumenta sempre di più il numero delle operazioni di radice quadrata e cioè se si aumenta il denominatore dell'esponente il termine

$$2^{\frac{1}{n}},$$

tende a

$$2^0,$$

e cioè ad 1. La successione tende dunque ad un numero razionale!

Gli esempi che abbiamo portato fanno capire che il cammino per dimostrare che π è irrazionale è pieno d'incognite e di trabocchetti! Ci si rende conto perciò perché ci vollero dei millenni per dimostrare che π è irrazionale: la dimostrazione è stata data solo nel 1766 dal matematico svizzero J. H. Lambert.

B) *π è un numero trascendente*

Nonostante la dimostrazione di Lambert che provava la irrazionalità del numero π, le discussioni su π non erano finite. Rimaneva ancora un problema aperto; questo: costruire con riga e compasso un segmento lungo esattamente π. Il problema era importante perché, una volta ottenuto un segmento lungo π, si può costruire un rettangolo di base π e altezza 1, e quindi di area π; si può quindi "quadrare" il cerchio, cioè trasformarlo in un rettangolo, e poi in un quadrato, ad esso equivalente (fig. 18).

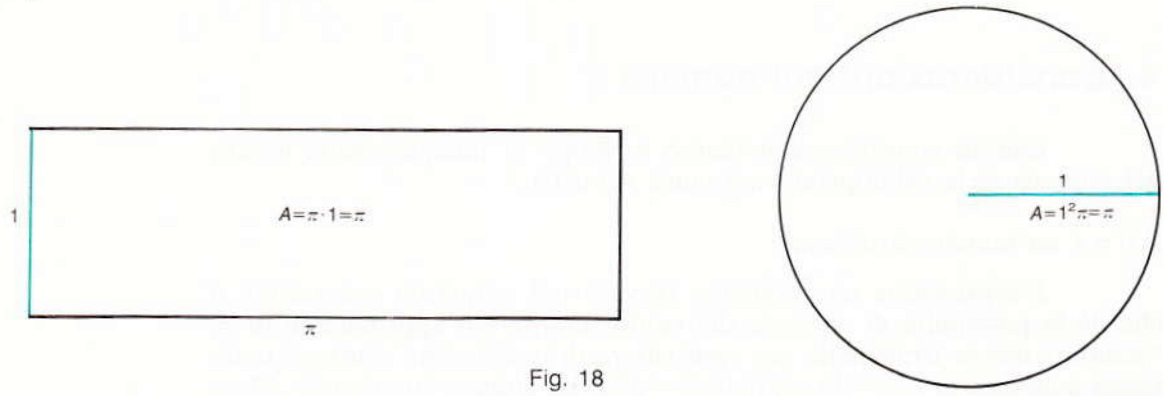


Fig. 18

Si era pensato di utilizzare riga e compasso perché, proprio con questi strumenti o con una squadra, si riesce a costruire dei segmenti lunghi

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, \quad \sqrt{5}, \quad \ldots$$

La fig. 19 mostra come si costruisce $\sqrt{2}$: è lunga $\sqrt{2}$ l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti lunghi 1.

Dalle figg. 20 e 21 risulta che un segmento lungo $\sqrt{3}$ si può ottenere o come ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti 1 e $\sqrt{2}$, o come cateto di un triangolo rettangolo avente l'altro cateto lungo 1 e l'ipotenusa lunga 2.

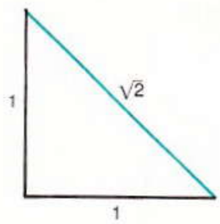


Fig. 19

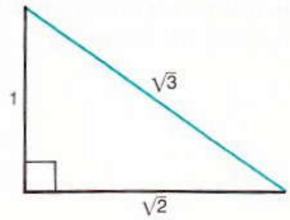


Fig. 20

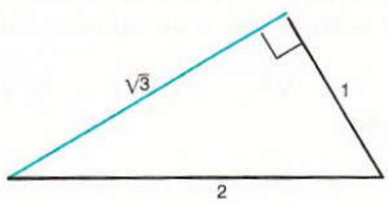


Fig. 21

Ci si è chiesti: per π, si può trovare una costruzione di questo tipo? Dopo molti tentativi e altrettanti insuccessi ci si convinse che riga e compasso non sono sufficienti. E del resto, riga e compasso non bastano nemmeno per costruire un segmento lungo $\sqrt[3]{2}$; fermiamoci proprio sulla costruzione di $\sqrt[3]{2}$ per capire come si può procedere utilizzando degli "strumenti" meno semplici.

Per costruire un segmento lungo esattamente $\sqrt[3]{2}$ si ricorre, oltre che al cerchio (che si disegna con un compasso), al grafico di altre curve; vediamo come si procede utilizzando un cerchio e una parabola. Disegnamo sul piano cartesiano la parabola d'equazione

$$y=x^2$$

e il cerchio d'equazione

$$x^2+y^2-2x-y=0,$$

avente il centro nel punto $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$ e passante per l'origine O (fig. 22). Intersecare queste due curve significa risolvere il sistema

$$\begin{cases} y=x^2 \\ x^2+y^2-2x-y=0. \end{cases}$$

Si ha:

$$x^2+x^4-2x-x^2=0$$

ossia

$$x^4-2x=0.$$

Si ottiene quindi, oltre alla soluzione $x=0$, che corrisponde all'origine, l'equazione

$$x^3-2=0$$

che ha come soluzione

$$x=\sqrt[3]{2};$$

di conseguenza si ottiene

$$y=x^2=\sqrt[3]{4}.$$

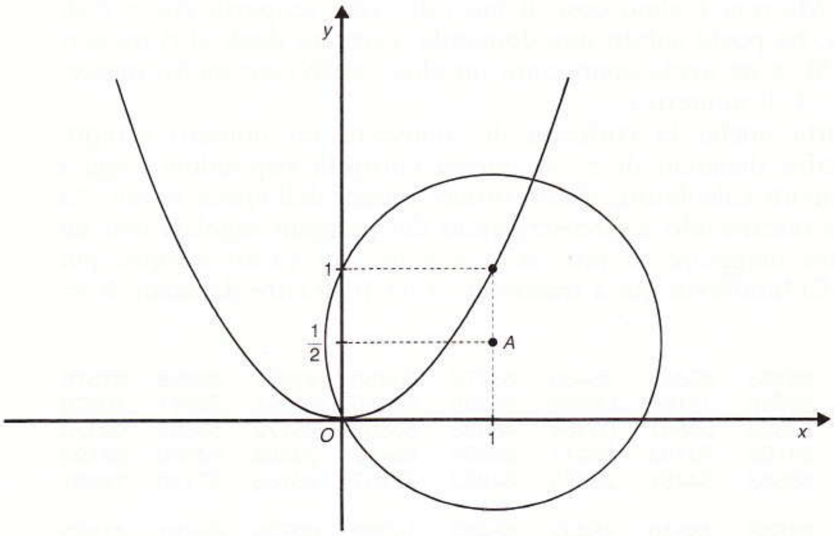


Fig. 22

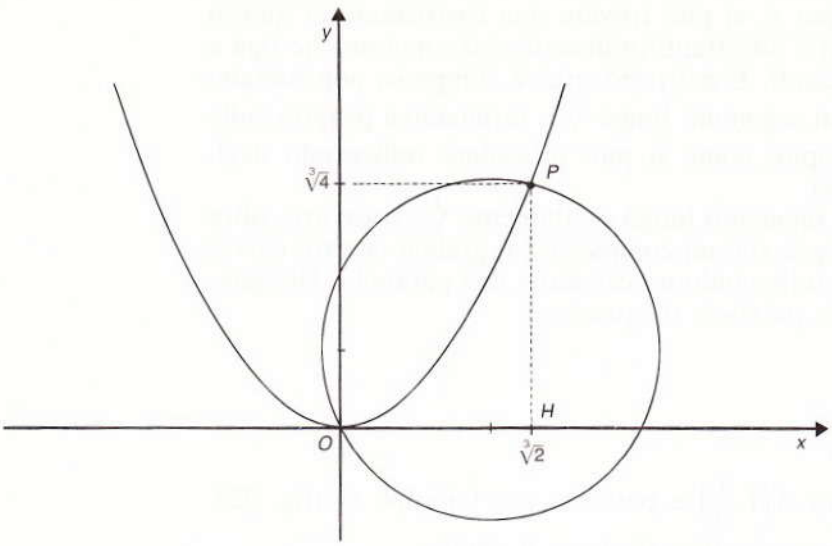


Fig. 23

Il punto $P(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$, risolve il nostro problema (fig. 23): il segmento OH è infatti lungo proprio $\sqrt[3]{2}$.

Si cercò, per la costruzione di un segmento lungo π, di tentare un metodo analogo, cioè di "produrre" un segmento lungo π tramite la costruzione di curve facilmente disegnabili, come parabole, ellissi, iperboli, ...; si voleva insomma arrivare, attraverso la risoluzione di un sistema, ad un'equazione algebrica a coefficienti interi la cui soluzione fosse π. E ancora tante ricerche infruttuose. I matematici cominciarono a pensare di non essere abbastanza intelligenti! Quando ecco che, nel 1882, il matematico tedesco F. Lindemann riuscì a dimostrare un teorema "negativo"; questo: il numero π non è soluzione di nessuna equazione algebrica a coefficienti interi, e, proprio per questa ragione, non si può costruire un segmento lungo π intersecando delle curve che hanno un'equazione algebrica. π è un numero di nuovo tipo! A questo numero, così fuori della regola, fu dato il nome di *numero trascendente*, proprio perché sembra trascendere le nostre possibilità di comprensione!

Si poteva pensare che le indagini su π si fossero ormai esaurite, dopo il 1882. Ma non è stato così: il fatto di avere scoperto che π è di natura diversa, ha posto subito una domanda: esistono degli altri numeri trascendenti? Sì, e ne avete conosciuto un altro, anch'esso molto importante, nel cap. 3: il numero e.

È sorta anche la curiosità di conoscere un numero sempre maggiore di cifre decimali di π. A questa curiosità rispondono oggi i sempre più potenti calcolatori; siamo ormai lontani dall'epoca in cui, "a mano", e cioè inscrivendo e circoscrivendo dei poligoni regolari con un numero sempre maggiore di lati, si cercavano dei valori sempre più approssimati! Ci limitiamo qui a trascrivere *solo* 1000 cifre decimali di π:

14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288	41971	69399	37510
58209	74944	59230	78164	06286	20899	86280	34825	34211	70679
82148	08651	32823	06647	09384	46095	50582	23172	53594	08128
48111	74502	84102	70193	85211	05559	64462	29489	54930	38196
44288	10975	86593	34461	28475	64823	37867	83165	27120	19091
45648	56692	34603	48610	45432	66482	13393	60726	02491	41273
72458	70066	06315	58817	48815	20920	96282	92540	91715	36436
78925	90360	01133	05305	48820	46652	13841	46951	94151	16094
33057	27036	57595	91953	09218	61173	81932	61179	31051	18548
07446	23799	62749	56735	18857	52724	89122	79381	83011	94912

98336	73362	44065	66430	86021	39494	63952	24737	19070	21798
60943	70277	05392	17176	29317	67523	84674	81846	76694	05132
00056	81271	45263	56082	77857	71342	75778	96091	73637	17872
14684	40901	22495	34301	46549	58537	10907	92279	68925	89235
42019	95611	21290	21960	86403	44181	59813	62977	47713	09960
51870	72113	49999	99837	23780	49951	05973	17328	16096	31859
50244	59455	34690	83026	42522	30825	33446	85035	26193	11881
71010	00313	78387	52886	58753	32083	81420	61717	76691	47803
59825	34904	28755	46873	11595	62863	88235	37875	93751	05778
18577	80532	17122	68066	13001	92787	66111	96909	21642	01989

5. Variazioni di area in poligoni isoperimetrici. Il cerchio ha area massima a parità di perimetro

Dimostriamo, successivamente, che:

1) il poligono regolare ha area maggiore di qualunque poligono isoperimetrico e con lo stesso numero di lati;
2) fra tutti i poligoni regolari isoperimetrici ha area maggiore quello che ha un numero maggiore di lati;
3) il cerchio ha area maggiore di qualunque figura isoperimetrica.

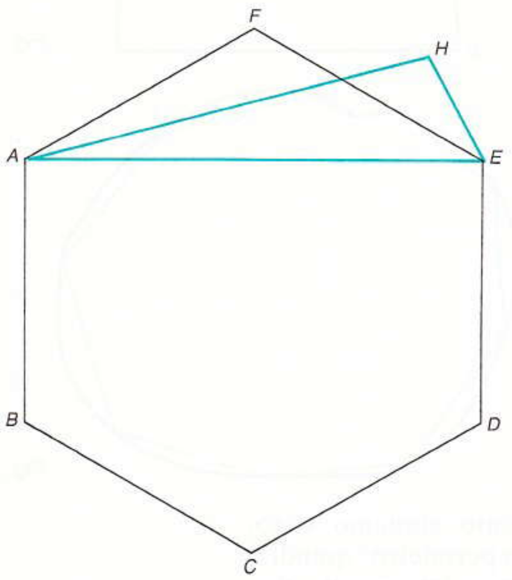


Fig. 24

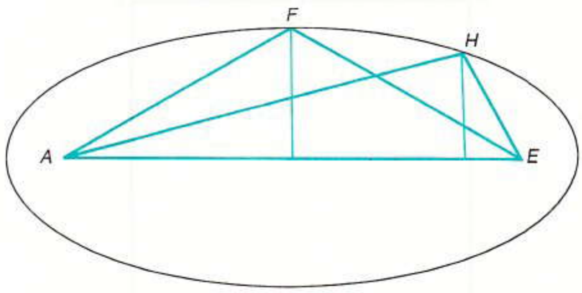


Fig. 25

1) In fig. 24 è disegnato l'esagono regolare $ABCDEF$. Uniamo due vertici, come A ed E, che "lasciano fuori" un vertice, nel nostro caso F. Costruiamo un triangolo di base AE e avente il terzo vertice H situato in modo tale che

$$AF+FE=AH+HE. \tag{1}$$

Il triangolo AEH non è isoscele, mentre lo è il triangolo AFE. Bisogna tener presente che, perché sia valida la (1), il punto H deve essere scelto sull'ellisse di fuochi A ed E (fig. 25): solo così, infatti, si ottengono due triangoli isoperimetrici e di ugual base (cap. 2, Parte terza, paragrafo 2). In tali condizioni, i due triangoli hanno, sì, uguale perimetro, ma l'area è diversa: ha l'area maggiore il triangolo isoscele AFE perché la sua altezza relativa alla base AE è maggiore dell'altezza del triangolo AHE.

Risulta allora che l'area dell'esagono regolare, somma dell'area di un quadrilatero e del triangolo isoscele, è maggiore dell'area dell'esagono irregolare, somma dello stesso quadrilatero e di un triangolo non isoscele.

È chiaro che un ragionamento dello stesso tipo può farsi in relazione a un poligono regolare di un qualunque numero di lati.

2) Consideriamo ora dei poligoni regolari isoperimetrici, che abbiano un diverso numero di lati.

Uno di questi poligoni sia, ad esempio, il quadrato *ABCD* (fig. 26). Immaginiamo che questo quadrato sia realizzato in fil di ferro; se un lato del quadrato viene piegato in un punto, come in fig. 27, si passa a un pentagono che ha, ovviamente, lo stesso perimetro del quadrato.

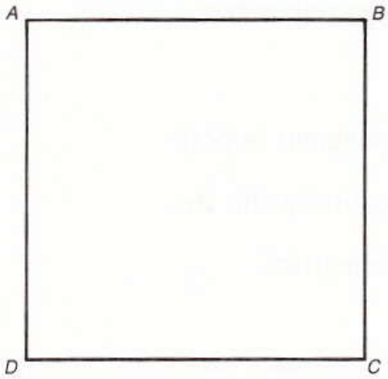


Fig. 26

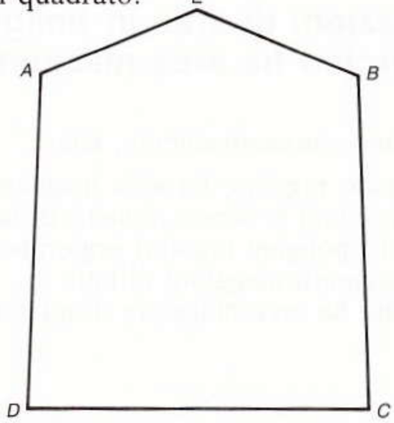


Fig. 27

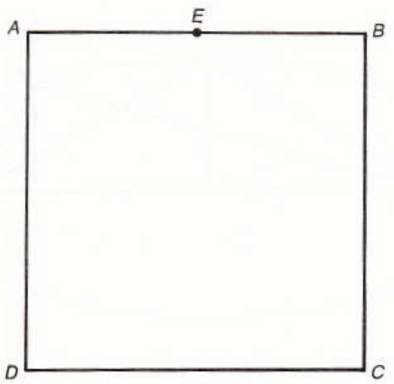


Fig. 28

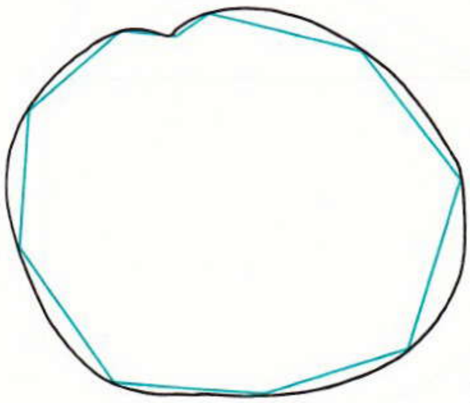


Fig. 29

Ora, un pentagono irregolare ha, per quanto abbiamo visto, un'area minore di un pentagono regolare con lo stesso perimetro; quindi il quadrato, che si può pensare come un pentagono irregolare avente due lati sulla stessa retta (fig. 28), ha area minore del pentagono regolare isoperimetrico.

Un ragionamento di questo tipo si può ripetere nel passaggio da pentagono ad esagono regolare, e, in generale, da un poligono regolare di n lati ad uno di $n+1$ lati, sempre isoperimetrico.

Si conclude che all'aumentare del numero dei lati, sempre restando fisso il perimetro, l'area del poligono regolare aumenta.

3) Spingendo il ragionamento al limite, si intuisce che l'area del cerchio è maggiore dell'area di un qualunque poligono regolare che ha lo stesso perimetro; e quindi, a più forte ragione, dell'area di qualunque poligono, anche non regolare ma con lo stesso perimetro. Ora, il contorno di una figura curvilinea si può approssimare con un poligono qualunque (fig. 29); si arriva così alla seguente proprietà: **il cerchio ha l'area maggiore fra tutte le figure di uguale perimetro.**