5
Esercizi

Lunghezza, area del cerchio

1. Il diametro AB di un cerchio di centro O è diviso in due parti uguali AO e OB; su ciascuna di queste parti, prese come diametri, si costruisce un cerchio.
Se $AB=2r$, determinare la lunghezza l della circonferenza grande e la lunghezza l' della circonferenza piccola. Risulta $l=2l'$; era prevedibile questo risultato?

2. Riferendosi all'esercizio precedente, si divida il diametro AB in due parti di lunghezza diversa, per esempio una parte sia $\frac{1}{4}$ del diametro, e si proceda come prima.
Confrontare la lunghezza della circonferenza grande con la somma delle lunghezze delle altre circonferenze.

3. Dividere il diametro $AB=2r$ di un semicerchio in 4 parti uguali, e su ogni parte, presa come diametro, si disegni un semicerchio, alternativamente all'interno o all'esterno del semicerchio grande; si ottiene così una curva "a onde".
Si chiede: per andare da A a B è più breve il percorso lungo la semicirconferenza grande o il percorso "a zig-zag"?
E se il diametro viene diviso in 8 parti uguali? e in n parti uguali? Osservazioni.

4. Il diametro $AB=2r$ di un cerchio è diviso in 2 parti uguali, e su ogni parte, presa come diametro, è costruito un cerchio.
Calcolare l'area del cerchio grande e l'area dei due cerchi piccoli.
Perché il cerchio grande ha l'area doppia dell'area complessiva dei cerchi piccoli? era prevedibile questo risultato?
Quanto vale l'area delle due zone del cerchio grande che non sono «occupate» dai cerchi piccoli?

5. La lunghezza di una circonferenza è 8π. Determinare la lunghezza del raggio.

6. Aumentando di 2 il raggio di una circonferenza lunga 20π, di quanto aumenta la lunghezza della circonferenza? E se si aumenta di 3? e di 4? e di un segmento lungo a?

7. L'area di un cerchio è 9π. Determinare la lunghezza della circonferenza.

8. La lunghezza di una circonferenza è 3π. Determinare l'area del cerchio.

9. Aumentando di 2 il raggio di una circonferenza lunga 2π, di quanto aumenta l'area? E se si aumenta il raggio di a?

10. Spiegare perché la formula $A=\pi r^2$ dell'area del cerchio si può "leggere": (1) come area di un triangolo che ha per base la lunghezza della circonferenza e per altezza il raggio, e (2) come area di un quadrato che ha il lato lungo...

11. Sul diametro AB di una circonferenza (fig. 1) si prendano due punti C, D, in posizione qualunque. Su AC, AD, BC, BD, presi come diametri, si descrivano quattro semicirconferenze, le prime due da una parte di AB e le altre due dalla parte opposta; si ottiene in tal modo una figura a contorno curvilineo. Far vedere che il perimetro di questa figura è uguale alla lunghezza della circonferenza data.

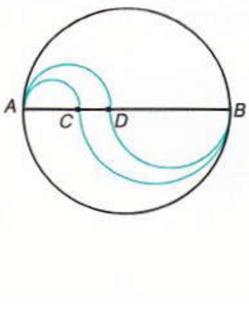

Fig. 1

12. Riferiamoci all'esercizio precedente. Si fissino sul diametro AB due punti C, D in modo che AB sia diviso in tre parti uguali; si proceda come prima. Dimostrare che le tre figure curvilinee ora ottenute hanno uguale area e uguale perimetro.

13. Sui tre lati di un triangolo rettangolo, presi come diametri, si costruiscono dei semicerchi, esternamente al triangolo stesso. Dimostrare, valendosi della formula che dà l'area del cerchio, che vale la proprietà pitagorica.
(Si prendano, ad esempio, i cateti del triangolo lunghi $6r$ e $8r$).

14. Un quadrato è inscritto in un cerchio (fig. 2); sui quattro lati, presi come diametri, si costruiscano, esternamente al quadrato, dei semicerchi. Dimostrare che la somma delle quattro *lunule* così ottenute ha un'area uguale a quella del quadrato.

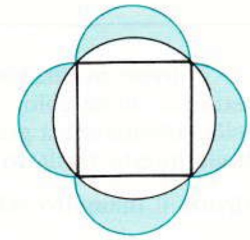

Fig. 2

15. Calcolare l'area della figura curvilinea colorata di fig. 3. Tenere presente che il lato del triangolo equilatero è lungo come il diametro $2r$ di un cerchio.

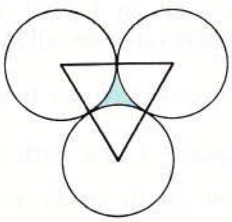

Fig. 3

16. Riferiamoci alla fig. 4. Sui raggi OA e OB, presi come diametri, sono costruiti dei semicerchi. Dimostrare che le due zone colorate hanno la stessa area.

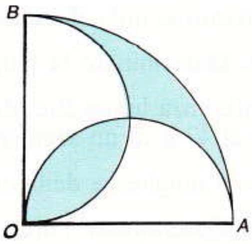

Fig. 4

17. Due cerchi uguali di **raggio** r passano ciascuno per il centro dell'altro (fig. 5). Determinare l'area della zona colorata.

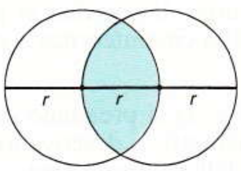

Fig. 5

18. Il diametro AB (fig. 6) è diviso in tre parti uguali. Verificare che l'area colorata è uguale all'area del cerchio che ha per diametro il segmento FG.

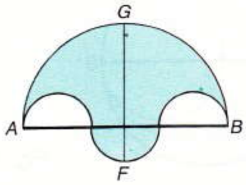

Fig. 6

19. Il diametro AB di un semicerchio (fig. 7) è diviso in due parti AC, CB. Verificare che l'area della zona colorata è uguale all'area del cerchio che ha per diametro il segmento CD osservando che CD è la media geometrica fra AC e CB.

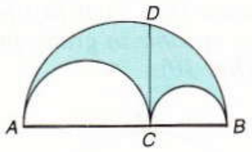

Fig. 7

20. In un cerchio di raggio r è inscritto un quadrato; in questo è inscritto un cerchio, e così via. Quale rapporto c'è fra la lunghezza di una circonferenza e la lunghezza di quella successiva?
E qual è il rapporto fra l'area di un cerchio e l'area del cerchio successivo?

21. Analogo problema del precedente, relativamente ai cerchi e ai triangoli equilateri in essi inscritti.

Relazione fra la lunghezza dei lati di poligoni regolari inscritti

22. Abbiamo trovato nel testo (paragrafo 3) una formula che lega il lato l_8 dell'ottagono regolare inscritto in un cerchio di raggio $r=1$ al lato l_4 del quadrato inscritto nello stesso cerchio. Esprimere l_4 in funzione di l_8.

23. Riferendosi all'esercizio precedente, esprimere l_4 in funzione di l_{16}.

24. Considerare un triangolo equilatero, un esagono regolare e un dodecagono regolare inscritti nello stesso cerchio. Esprimere l_{12} in funzione di l_6; e poi l_3 in funzione di l_6.

25. Determinare la lunghezza del lato l_{10} del decagono regolare inscritto in un cerchio di raggio lungo 1. Seguire le seguenti indicazioni, riferendosi alla fig. 8 dove

$l_{10}=AH=BH$, e BK è la bisettrice dell'angolo $O\hat{B}H$;

dimostrare che sono simili i triangoli BOH, KBH (hanno angoli uguali), e quindi $BH^2=OH\cdot KH$ ossia

(1) $\quad l_{10}^2=r(r-OK)$,

tenendo presente che $OK=BK=BH=l_{10}$, scrivere la (1) così:

$l_{10}^2=r(r-l_{10})$,

e risolvere questa equazione di 2° grado in l_{10} scegliendo poi la soluzione opportuna.
(Si ottiene: $l_{10}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$, e se $r=1$ si ha $l_{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$).

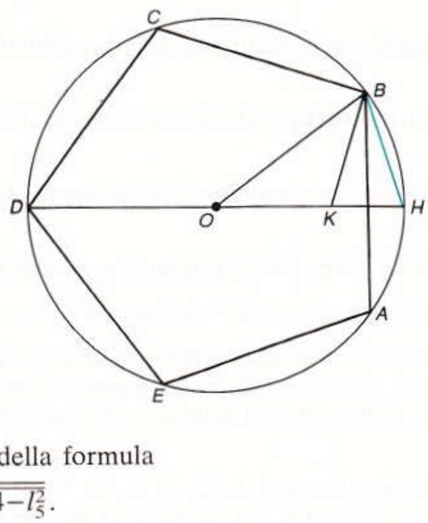

Fig. 8

26. Verificare la validità della formula

$$l_{10}=\sqrt{2-\sqrt{4-l_5^2}}.$$

Esprimere poi l_5 in funzione di l_{10}. Sostituire infine ad l_{10} il valore $l_{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (esercizio 25).
(Si ottiene $l_5=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Nel caso generale, indicando con r il raggio, si ha: $l_5=\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$).

Arco, settore, corona circolare

Per la misura di un arco di circonferenza (fig. 9) si fa riferimento all'ampiezza α dell'angolo al centro sotteso dall'arco, ampiezza che si esprime in gradi, primi, secondi. Così, si dice che un arco è di 1° se sottende un angolo α di 1° (fig. 10).

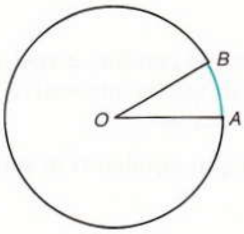

Fig. 9

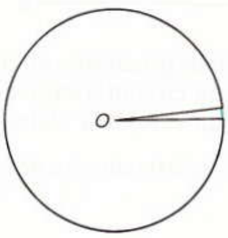

Fig. 10

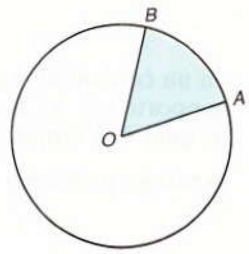

Fig. 11

La lunghezza di un arco di α gradi, che appartiene a una circonferenza di raggio r, si ottiene facilmente con una proporzione; si ha:

$$l : 2\pi r = \alpha : 360°$$

da cui

$$(1) \qquad l = \frac{\pi r \alpha}{180°}.$$

L'area S del ***settore*** *AOB (fig. 11) si ottiene, anche, con una proporzione, dopo aver calcolato l'area del cerchio; si ha:*

$$S : \pi r^2 = \alpha : 360°$$

da cui

$$S = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360°}.$$

Ora, questa formula si può anche scrivere così:

$$S = \frac{1}{2}\frac{\pi r \alpha}{180°} \cdot r = \frac{1}{2} l \cdot r,$$

e, scritta in tal modo, esprime il fatto che ***l'area di un settore circolare si trova come l'area di un triangolo che ha per base la lunghezza dell'arco e per altezza il raggio.***

27. Determinare la lunghezza di un arco di circonferenza corrispondente a un angolo di 42°, sapendo che il raggio è lungo 6.

28. Determinare l'ampiezza di un angolo corrispondente a un arco lungo 12π, sapendo che il raggio è lungo 20.

29. Determinare la lunghezza di un arco corrispondente a un angolo di 25°, sapendo che la lunghezza della circonferenza è 8π.

30. Calcolare l'area di un settore circolare corrispondente a un angolo di 144°, sapendo che il raggio è lungo 5.

31. Calcolare l'area di un settore di arco 4π, corrispondente a un angolo di 22°30′.

32. In un cerchio un settore avente l'ampiezza di 20° ha l'area uguale a 18π. Determinare il raggio.

33. Due angoli al centro dello stesso cerchio hanno un lato comune, e la loro ampiezza è di 40° e 28°. Considerare il caso in cui gli angoli si trovano da parte opposta rispetto al lato comune e il caso in cui si trovano dalla stessa parte; determinare l'ampiezza dell'arco somma e l'ampiezza dell'arco differenza.

34. Disegnare cinque cerchi concentrici di raggi 1, 2, 3, 4, 5. Verificare che l'area della corona circolare limitata dai cerchi di raggi 5 e 4 è uguale all'area del cerchio di raggio 3.

35. Riferirsi all'esercizio precedente. Costruire tre cerchi concentrici di raggi 5, 12, 13, e verificare che la corona circolare limitata dagli ultimi due è equivalente al cerchio di raggio 5.
Quale relazione ha questa proprietà e quella dell'esercizio 34 con il teorema di Pitagora?

36. Determinare la lunghezza x che deve avere il raggio di un cerchio concentrico a un cerchio di raggio r, con $x<r$, perché la corona circolare compresa fra i due cerchi abbia un'area uguale a πrx.

Valori approssimati di π

37. Nel "Papyrus Rhind" (un papiro egiziano del 1650 a.C.) si dice che l'area del cerchio è uguale a quella di un quadrato avente per lato gli $\frac{8}{9}$ del diametro $2r$. Questa affermazione non è esatta, ma offre la possibilità di ottenere un valore approssimato di π. Quale?

38. Archimede trova che la lunghezza della circonferenza è minore di 3 volte il diametro più $\frac{1}{7}$ del diametro stesso, ed è maggiore di 3 volte il diametro più $\frac{10}{71}$ del diametro.
Quali valori approssimati di π, per eccesso e per difetto, si ottengono?

39. In un cerchio di raggio r è inscritto un esagono regolare; il suo lato è dunque lungo r, e il perimetro è $6r$.
Determinare il perimetro dell'esagono regolare circoscritto, calcolando il rapporto fra gli apotemi dei due esagoni (si osservi che i due esagoni sono simili).
Determinare poi un valore per difetto e uno per eccesso di π, confrontando la lunghezza della circonferenza sia con il perimetro dell'esagono inscritto sia con il perimetro dell'esagono circoscritto.

40. C. Huyghens (fisico-matematico olandese del 1600) trova, per l'area A del cerchio, la seguente approssimazione

$$A<\frac{2}{3}A_n+\frac{1}{3}a_n,$$

dove A_n indica l'area del poligono regolare di n lati circoscritto al cerchio, e a_n indica l'area del poligono regolare di n lati inscritto nello stesso cerchio.
Si considerino, per esempio, degli esagoni regolari, e si tenga presente l'esercizio precedente. Quale approssimazione di π si ottiene?

41. Dopo aver determinato la lunghezza del lato del triangolo equilatero inscritto in un cerchio di raggio r, si confronti il perimetro del triangolo con la lunghezza della circonferenza in modo da avere un valore approssimato di π.
Ci si basi poi sulla formula ottenuta nel testo (paragrafo 3) per avere la lunghezza del lato di poligoni regolari con un numero doppio di lati, determinando così altri due valori approssimati di π.

Nel paragrafo 4 del testo abbiamo detto che l'espressione

$$(1) \qquad \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$$

è irrazionale. Vogliamo ora far vedere con quali ragionamenti si riesce a dimostrare che l'espressione, limitata a un numero anche grandissimo di addendi, è certamente irrazionale.
Si ragiona per assurdo, procedendo "a tappe". Cominciamo col considerare l'espressione

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Se quest'espressione fosse razionale, cioè uguale a un numero frazionario $\frac{p}{q}$, si potrebbe scrivere

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}=\frac{p}{q}.$$

Eleviamo i due membri al quadrato; si ha

$$2-\sqrt{2}=\frac{p^2}{q^2},$$

ossia

$$2-\frac{p^2}{q^2}=\sqrt{2}.$$

Risulterebbe allora che $\sqrt{2}$ *è un numero razionale; e questo non è vero! Ragionando dunque per assurdo si prova che l'espressione*

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

è veramente irrazionale.
Si dimostra poi, perché se ne avrà bisogno fra un momento, che anche l'espressione

$$\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

è irrazionale; basta seguire il ragionamento per assurdo fatto per l'espressione

$$\sqrt{2-\sqrt{2}};$$

si considera poi un altro "pezzo" dell'espressione (1):

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}};$$

si ragiona ancora per assurdo: se l'espressione fosse razionale si potrebbe scrivere

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{p}{q}, \ldots$$

si arriva all'assurdo che anche l'espressione

$$\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

è razionale, mentre...
Procedendo così, con ragionamenti per assurdo, e riferendosi sempre al caso precedente, cioè seguendo un metodo iterativo, *si arriva a dimostrare che qualunque termine, anche con molti addendi, dell'espressione*

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$$

è irrazionale.