

3. Parte prima

Esercizi

La funzione esponenziale ed il suo grafico

Potenze ad esponente reale

Gli esercizi dall'1 al 13 conducono a calcolare potenze con esponente intero o razionale.

Per svolgere gli esercizi è opportuno tener presenti le seguenti definizioni:

$$a^0 = 1 \quad (\text{con } a \neq 0)$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad (\text{con } a \neq 0 \text{ e } m \text{ intero positivo})$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad (\text{con } a \text{ numero reale, } p \text{ e } q \text{ interi positivi})$$

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}} \quad (\text{con } a \neq 0, p \text{ e } q \text{ interi positivi})$$

Calcolare il valore delle potenze indicate negli esercizi dall'1 al 13

1. 2^3 ; 3^2 ; 5^2 ; 2^5 ; 3^3 ; 4^2 .
2. 5^2 ; $(-5)^2$; -5^2 ; 3^4 ; $(-3)^4$; -3^4 .
3. 4^3 ; $(-4)^3$; -4^3 ; 2^5 ; $(-2)^5$; -2^5 .
4. 3^0 ; $(-3)^0$; -3^0 ; $\left(\frac{4}{5}\right)^0$; $-8,75^0$; π^0 .
5. 2^{-4} ; 4^{-2} ; 8^{-1} ; $\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$; π^{-3} .
6. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^4$; $2,5^3$; $0,4^{-3}$; $0,01^2$; 100^{-2} .
7. 3^{-4} ; $(-3)^{-4}$; -3^4 ; 7^{-2} ; $(-7)^{-2}$; -7^{-2} .
8. 4^{-3} ; $(-4)^{-3}$; -4^{-3} ; 2^{-5} ; $(-2)^{-5}$; -2^{-5} .
9. $16^{\frac{1}{2}}$; $-16^{\frac{1}{2}}$; $(-16)^{\frac{1}{2}}$; $16^{\frac{1}{4}}$; $-16^{\frac{1}{4}}$; $(-16)^{\frac{1}{4}}$.
I risultati ottenuti sono tutti numeri reali?
10. $27^{\frac{1}{3}}$; $-27^{\frac{1}{3}}$; $(-27)^{\frac{1}{3}}$; $32^{\frac{1}{5}}$; $-32^{\frac{1}{5}}$; $(-32)^{\frac{1}{5}}$.
I risultati ottenuti sono tutti numeri reali?
11. $2^{\frac{3}{5}}$; $2^{-\frac{3}{5}}$; $-2^{\frac{3}{5}}$; $-2^{-\frac{3}{5}}$; $(-2)^{\frac{3}{5}}$; $(-2)^{-\frac{3}{5}}$.
I risultati ottenuti sono tutti numeri reali?
12. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{4}}$; $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{4}}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$; $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$; $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{4}{3}}$.
I risultati ottenuti sono tutti numeri reali?

13. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}; \quad -\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}; \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad 4^{\frac{1}{2}}; \quad (-4)^{\frac{1}{2}}; \quad -4^{-\frac{1}{2}}.$

I risultati ottenuti sono tutti numeri reali?

Fra le uguaglianze proposte negli esercizi dal 14 al 17 dire quali sono vere e quali false, spiegando i criteri seguiti per rispondere.

14. $3^{-4} = -81; \quad 3^{-4} = \frac{1}{81}; \quad 3^{-4} = \frac{1}{3^4}; \quad 3^{-4} = \sqrt[4]{3}.$

15. $(-2)^{-2} = 2^2; \quad (-2)^{-2} = -2^{-2}; \quad (-2)^{-2} = \frac{1}{4}; \quad (-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2}.$

16. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = -1; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{2}.$

17. $8^{\frac{2}{3}} = 4; \quad (-8)^{\frac{2}{3}} = -4; \quad 8^{-\frac{2}{3}} = -4; \quad 8^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}.$

Gli esercizi dal 18 al 23 conducono ad impadronirsi della nozione di potenza ad esponente irrazionale.

Per risolvere questi esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni esposte nel paragrafo 3.

Disporre in ordine crescente i numeri assegnati negli esercizi dal 18 al 20.

18. $4\sqrt{2}; \quad 0; \quad 1; \quad 4; \quad 16; \quad 4^{-\sqrt{2}}; \quad \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{16}.$

$0; \quad 1; \quad 2\pi; \quad 8; \quad 16; \quad 2^{-\pi}; \quad \frac{1}{8}; \quad \frac{1}{18}.$

20. $3\sqrt{5}; \quad 0; \quad 1; \quad 3; \quad 9; \quad 27; \quad 3^{-\sqrt{5}}; \quad \frac{1}{9}; \quad \frac{1}{18}.$

Valersi anche del tasto $\boxed{\sqrt{x}}$ di un calcolatore tascabile per uso scientifico per calcolare col maggior numero possibile di cifre significative il valore delle potenze assegnate negli esercizi dal 21 al 23.

21. $2\sqrt{2}; \quad \sqrt{2^2}; \quad 2^{-\sqrt{2}}; \quad 2^{\pi}; \quad 2^{-\pi}.$

Si può ottenere uno dei risultati senza valersi del calcolatore?

22. $10\sqrt{3}; \quad 10\sqrt{5}; \quad 10\sqrt{10}; \quad 10^{-\sqrt{3}}; \quad 10^{-\sqrt{5}}; \quad 10^{-\sqrt{10}}.$

23. $\pi^{\pi}; \quad \sqrt{3}\sqrt{3}; \quad \sqrt{7}\sqrt{7}; \quad \pi^{-\pi}; \quad \sqrt{3}^{-\sqrt{3}}; \quad \sqrt{7}^{-\sqrt{7}}.$

La funzione esponenziale

Gli esercizi dal 24 al 31 conducono a riflettere sul concetto di funzione e sulla funzione esponenziale.

Per risolvere gli esercizi è opportuno tenere presenti le nozioni esposte nei paragrafi 3 e 4.

Tracciare il grafico delle funzioni assegnate negli esercizi dal 24 al 31, dove A indica il dominio e B il codominio della funzione.

24. A è l'insieme dei reali, B è l'insieme dei reali, risulta $y=2^x$.
 A è l'insieme dei reali positivi, B è l'insieme dei reali, risulta $y=2^x$.
 Sul secondo grafico si possono trovare punti con l'ordinata minore di 1?

25. A è l'insieme dei razionali, B è l'insieme dei reali, risulta $y=2^x$.
 Indicare alcuni punti che non si possono trovare sul grafico.
 Si potrebbe scegliere come codominio B della funzione l'insieme dei razionali?

26. A è l'insieme degli interi, B è l'insieme dei razionali, risulta $y=2^x$.
Indicare alcuni punti che non si possono trovare sul grafico.
Si può scegliere l'insieme degli interi anche come codominio B della funzione?
27. A è l'insieme degli interi positivi, B è l'insieme dei razionali, risulta $y=2^x$.
Ci sono sul grafico punti con l'ordinata che non è un numero intero?
Si può scegliere l'insieme degli interi anche come codominio B della funzione?
28. Ripetere gli esercizi 24, 25, 26, 27 considerando la legge $y=3^x$ al posto della legge $y=2^x$.
29. A è l'insieme dei reali, B è l'insieme dei reali, risulta $y=0,5^x$.
 A è l'insieme dei reali positivi, B è l'insieme dei reali, risulta $y=0,5^x$.
Sul secondo grafico si possono trovare punti con l'ordinata maggiore di 1?
30. A è l'insieme degli interi positivi, B è l'insieme dei razionali, risulta $y=0,5^x$.
 A è l'insieme degli interi negativi, B è l'insieme dei razionali, risulta $y=0,5^x$.
Ci sono sul secondo grafico dei punti con l'ordinata che non è un numero intero?
Per quale delle due funzioni si potrebbe scegliere l'insieme degli interi come codominio B ?
31. Ripetere gli esercizi 29 e 30 considerando la legge $y=0,25^x$ al posto di $y=0,5^x$.

La curva esponenziale

Gli esercizi dal 32 al 40 conducono ad impadronirsi della curva esponenziale e delle sue caratteristiche.

Per risolvere questi esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni esposte nel paragrafo 4.

32. Tracciare sullo stesso piano cartesiano il grafico delle seguenti funzioni esponenziali, considerando, in ogni caso, come dominio l'insieme dei numeri reali:
 $y=1^x$; $y=1,01^x$; $y=1,1^x$; $y=1,5^x$; $y=1,9^x$.
 Si ottengono curve crescenti o decrescenti?
 Indicare su ciascuna curva il punto P d'ascissa 1 ed il punto Q d'ascissa 2; come si potrebbe confrontare la rapidità di crescita (o di decrescita) delle curve?
(Tenere presente che basta una rappresentazione approssimativa delle curve).
33. Ripetere l'esercizio 32, considerando le seguenti funzioni esponenziali:
 $y=2^x$; $y=4^x$; $y=8^x$; $y=10^x$
 ed indicando su ogni curva il punto P d'ascissa 0,5 ed il punto Q d'ascissa 1.
34. Ripetere l'esercizio 32, considerando le seguenti funzioni esponenziali:
 $y=0,01^x$; $y=0,1^x$; $y=0,2^x$; $y=0,4^x$
 ed indicando su ogni curva il punto P d'ascissa 0,5 ed il punto Q d'ascissa 1.
35. Ripetere l'esercizio 32, considerando le seguenti funzioni esponenziali:
 $y=0,5^x$; $y=0,7^x$; $y=0,9^x$; $y=0,99^x$; $y=1^x$
 ed indicando su ogni curva il punto P d'ascissa 0,5 ed il punto Q d'ascissa 1.
36. Confrontare la curva esponenziale con altre curve note, tracciando il grafico delle seguenti funzioni:
 $y=2^x$; $y=2x$; $y=x^2$.
 Le tre curve hanno dei punti in comune?
 Si può decidere quale delle tre curve cresce più rapidamente?
37. Confrontare la curva esponenziale con altre curve note, tracciando il grafico delle seguenti funzioni:
 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y=\frac{1}{2}x$; $y=\frac{1}{2^x}$; $y=\frac{1}{2x}$; $y=x^{\frac{1}{2}}$.
 Per le ultime due funzioni si può scegliere come dominio l'insieme dei reali?
 Le quattro curve hanno dei punti in comune?
 Si ottengono tutte curve decrescenti?

38. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=3^x, \quad y=3^{-x}, \quad y=-3^x, \quad y=-3^{-x}.$$

È possibile tracciare il grafico di $y=(-3)^x$?

(Tenere presenti le nozioni sulle simmetrie rispetto agli assi coordinati espresse nel cap. 1, Parte terza, paragrafo 3.)

39. Ripetere l'esercizio 38 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}, \quad y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad y=-\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}.$$

È possibile tracciare il grafico di $y=\left(-\frac{1}{3}\right)^x$?

40. Fra le seguenti affermazioni scegliere quelle vere e quelle false, motivando la scelta:

- Qualunque sia la base a , reale positiva, il grafico della funzione $y=a^x$ si trova sempre al disopra dell'asse delle x .
- Qualunque sia la base a , reale positiva, il grafico della funzione $y=a^x$ è sempre crescente.
- Qualunque sia la base a , reale positiva, il grafico della funzione $y=a^x$ si avvicina all'asse delle x , se si assegnano alla x valori sempre più grandi.
- Il grafico della funzione $y=a^x$ si avvicina all'asse delle x per valori di x sempre più grandi, solo se la base a è un numero positivo minore di 1.

Disequazioni esponenziali

Gli esercizi dal 41 al 45 conducono a risolvere delle disequazioni in cui l'incognita x compare come esponente di una base fissa.

Per risolvere queste disequazioni è opportuno valersi delle curve esponenziali, rappresentate nel testo e tener presenti le considerazioni sulle disequazioni svolte nel cap. 1, Parte sesta e nei relativi esercizi 66 e 76.

41. Risolvere le seguenti disequazioni

$$2^x \leq 64, \quad 2^x > 64.$$

(Si può cominciare ad esaminare l'equazione $2^x=64$ come se provenisse dal sistema

$$\begin{cases} y=64 \\ y=2^x \end{cases}$$

Si interpreta il sistema sul piano cartesiano rappresentando sullo stesso riferimento la curva esponenziale $y=2^x$ e la retta d'equazione $y=64$; le due curve si incontrano nel punto $P(6,64)$. Dal grafico si ricava poi che se si sceglie $x < 6$, si ottiene...)

42. Ripetere l'esercizio 41 a partire dalle seguenti disequazioni

$$3^x \geq 27, \quad 3^x < 27, \quad 3^{-x} \geq 27, \quad 3^{-x} < 27.$$

43. Ripetere l'esercizio 41 a partire dalle seguenti disequazioni:

$$4^x \geq 0,5, \quad 4^x < 0,5, \quad 4^{-x} \geq 0,5, \quad 4^{-x} < 0,5.$$

44. Ripetere l'esercizio 41 a partire dalle seguenti disequazioni:

$$0,5^x \geq 8, \quad 0,5^x < 8, \quad 0,5^{-x} \geq 8, \quad 0,5^{-x} < 8.$$

45. Ripetere l'esercizio 41 a partire dalle seguenti disequazioni:

$$0,1^x \geq 100, \quad 0,1^x < 100, \quad 0,1^{-x} \geq 100, \quad 0,1^{-x} < 100.$$

Lo svolgimento degli esercizi dal 41 al 45 suggerisce delle conclusioni più generali, valide per disequazioni esponenziali del tipo

$$a^x \geq b \quad \text{oppure} \quad a^x \leq b.$$

È opportuno distinguere due casi:

I) $a > 1$.

Si ha una curva esponenziale crescente, perciò se n è il numero tale che

$$a^n = b,$$

risulta (fig. 1):

$$\begin{array}{lll} a^x \geq b & \text{per} & x \geq n \\ a^x \leq b & \text{per} & x \leq n. \end{array}$$

II) $a < 1$.

Si ha una curva esponenziale decrescente, perciò se n è il numero tale che

$$a^n = b,$$

risulta (fig. 2):

$$\begin{array}{lll} a^x \geq b & \text{per} & x \leq n \\ a^x \leq b & \text{per} & x \geq n. \end{array}$$

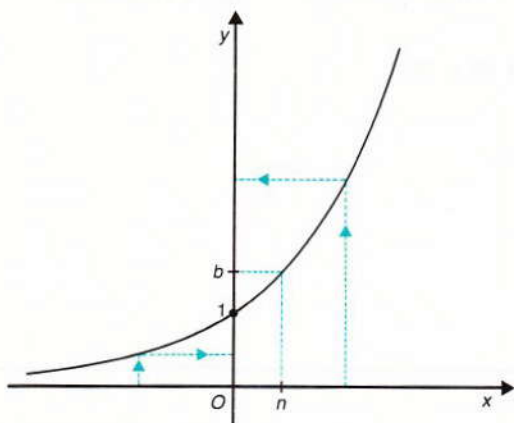


Fig. 1

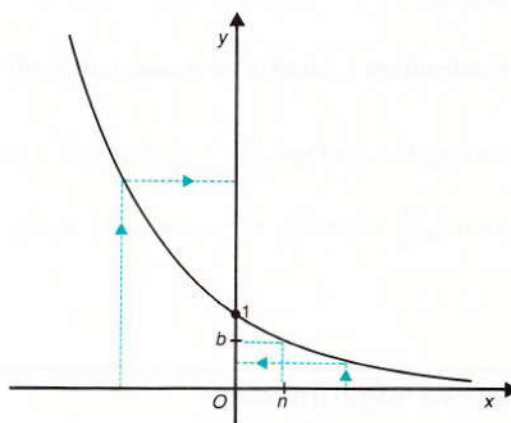


Fig. 2

La funzione logaritmo ed il suo grafico

La funzione logaritmo

Gli esercizi dal 46 al 49 conducono ad impadronirsi della nozione di logaritmo e della funzione $y = \log_a x$ in qualunque base.

Per risolvere questi esercizi è opportuno tenere presenti le nozioni esposte nel cap. 3.

Determinare il valore dei logaritmi indicati negli esercizi dal 46 al 49.

46. $\log_2 8$; $\log_2 2$; $\log_2 1$; $\log_2 \frac{1}{2}$; $\log_2 \frac{1}{16}$; $\log_2 \sqrt{2}$.
47. $\log_3 \frac{1}{3}$; $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\log_3 1$; $\log_3 3$; $\log_3 81$; $\log_3 \sqrt{27}$.
48. $\log_{0,5} 16$; $\log_{0,5} 2$; $\log_{0,5} 0,5$; $\log_{0,5} 1$; $\log_{0,5} 0,25$; $\log_{0,5} \sqrt{8}$.
49. $\log_{0,2} 125$; $\log_{0,2} 5$; $\log_{0,2} 1$; $\log_{0,2} 0,2$; $\log_{0,2} 0,008$; $\log_{0,2} \sqrt{5}$.

Determinare il valore del numero x , di cui è assegnato il logaritmo negli esercizi dal 50 al 53.

50. $\log_4 x = 0$; $\log_7 x = 0$; $\log_{10} x = 0$; $\log_{0,8} x = 0$; $\log_{0,1} x = 0$.
51. $\log_5 x = 1$; $\log_8 x = 1$; $\log_{10} x = 1$; $\log_{0,3} x = 1$; $\log_{0,1} x = 1$.

52. $\log_3 x = -1$; $\log_6 x = -2$; $\log_{10} x = -1$; $\log_{0,6} x = -3$; $\log_{0,1} x = -1$.

53. $\log_3 x = \frac{1}{2}$; $\log_6 x = \frac{1}{3}$; $\log_{10} x = \frac{5}{4}$; $\log_{0,6} x = \frac{2}{3}$; $\log_{0,1} x = \frac{3}{2}$.

Determinare la base x di ciascun logaritmo assegnato negli esercizi dal 54 al 57.

54. $\log_x 9 = 2$; $\log_x 8 = 3$; $\log_x 4 = 1$; $\log_x 3 = -1$; $\log_x 0,01 = -2$.

55. $\log_x 0,25 = 2$; $\log_x 2 = -1$; $\log_x 0,4 = 1$; $\log_x 81 = 4$; $\log_x 0,01 = 2$.

56. $\log_x 16 = 4$; $\log_x 8 = -3$; $\log_x 4 = -1$; $\log_x 3 = 1$; $\log_x 100 = 2$.

57. $\log_x \sqrt{3} = \frac{1}{2}$; $\log_x \sqrt{8} = \frac{3}{2}$; $\log_x \sqrt{27} = -\frac{3}{2}$; $\log_x \sqrt{5} = -\frac{1}{2}$; $\log_x \sqrt{1000} = \frac{3}{2}$.

Confrontare i valori x ed y assegnati negli esercizi 58 e 59.

58. $x = \log_a b$ e $y = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b}$; $x = \log_a \sqrt{a}$ e $y = \log_{\sqrt{a}} a$.

59. $x = \log_a \frac{1}{a}$ e $y = \log_{\frac{1}{a}} a$; $\log_x a = 1$ e $\log_y a = -1$.

Curva logaritmica

Gli esercizi dal 60 al 72 conducono ad impadronirsi della curva logaritmica e delle sue caratteristiche.

Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel cap. 3.

60. Tracciare sullo stesso piano cartesiano il grafico delle seguenti funzioni, considerando in ogni caso come dominio l'insieme dei numeri reali positivi:

$$y = \log_{1,01} x; \quad y = \log_{1,1} x; \quad y = \log_{1,5} x; \quad y = \log_{1,9} x.$$

Si ottengono curve crescenti o decrescenti?

Indicare su ciascuna curva il punto P d'ordinata 1 ed il punto Q d'ordinata 2; come si potrebbe confrontare la rapidità di crescita (o di decrescita) delle curve?

(Tenere presente che basta una rappresentazione approssimativa delle curve).

61. Ripetere l'esercizio 60, considerando le seguenti funzioni:

$$y = \log_2 x; \quad y = \log_4 x; \quad y = \log_8 x; \quad y = \log_{10} x$$

ed indicando su ogni curva il punto P d'ordinata 0,5 ed il punto Q d'ordinata 1.

62. Ripetere l'esercizio 60, considerando le seguenti funzioni:

$$y = \log_{0,01} x; \quad y = \log_{0,1} x; \quad y = \log_{0,2} x; \quad y = \log_{0,4} x$$

ed indicando su ogni curva il punto P d'ordinata 0,5 ed il punto Q d'ordinata 1.

63. Ripetere l'esercizio 60, considerando le seguenti funzioni:

$$y = \log_{0,5} x; \quad y = \log_{0,7} x; \quad y = \log_{0,9} x; \quad y = \log_{0,99} x$$

ed indicando su ogni curva il punto P d'ordinata 0,5 ed il punto Q d'ordinata 1.

64. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y = 3^x, \quad y = \log_3 x, \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad y = \log_{\frac{1}{3}} x.$$

Quali simmetrie trasformano la prima curva in ciascuna delle altre?

Quali simmetrie trasformano la seconda curva in ciascuna delle altre?

Quali simmetrie trasformano la terza curva in ciascuna delle altre?

Quali simmetrie trasformano l'ultima curva in ciascuna delle altre?

65. Ripetere l'esercizio 64 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y = \left(\frac{5}{2}\right)^x, \quad y = \left(\frac{2}{5}\right)^x, \quad y = \log_{\frac{5}{2}} x, \quad y = \log_{\frac{2}{5}} x.$$

66. Ripetere l'esercizio 64 in generale a partire dalle funzioni

$$y = a^x, \quad y = \left(\frac{1}{a}\right)^x, \quad y = \log_a x, \quad y = \log_{\frac{1}{a}} x.$$

67. Ripetere l'esercizio 64 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y = \log_2 x, \quad y = -\log_2 x, \quad y = \log_2 (-x), \quad y = -\log_2 (-x).$$

Si può scegliere ancora l'insieme dei reali positivi come dominio delle ultime due funzioni?

68. Ripetere l'esercizio 64 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y = \log_{0,5} x, \quad y = -\log_{0,5} x, \quad y = \log_{0,5} (-x), \quad y = -\log_{0,5} (-x).$$

Si può scegliere l'insieme dei reali positivi come dominio delle ultime due funzioni?

69. Ripetere gli esercizi 67 e 68 in generale a partire dalle seguenti funzioni:

$$y = \log_a x, \quad y = -\log_a x, \quad y = \log_a (-x), \quad y = -\log_a (-x).$$

Si può scegliere l'insieme dei reali positivi come dominio delle ultime due funzioni?

70. Fra le seguenti affermazioni scegliere quelle vere e quelle false, motivando la scelta:

- Qualunque sia la base a , reale positiva, il grafico della funzione $y = \log_a x$ si trova sempre al disopra dell'asse delle x .
- Qualunque sia la base a , reale positiva, il grafico della funzione $y = \log_a x$ si trova sempre a destra dell'asse delle y .
- Qualunque sia la base a , reale positiva, il grafico della funzione $y = \log_a x$ è sempre crescente.
- Qualunque sia la base a , reale positiva, il grafico della funzione $y = \log_a x$ si avvicina all'asse delle y , se si assegnano alla x valori positivi sempre più vicini a zero.

Disequazioni logaritmiche

Gli esercizi dal 71 al 75 conducono a risolvere delle disequazioni in cui l'incognita x compare come argomento di un logaritmo in una data base.

Per risolvere queste disequazioni è opportuno valersi delle curve logaritmiche rappresentate nei paragrafi 5 e 6 e tener presenti le considerazioni sulle disequazioni richiamate a pag. 588 del testo.

71. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\log_2 x \geq 3, \quad \log_2 x < 3.$$

(Si può cominciare ad esaminare l'equazione $\log_2 x = 3$ come se provenisse dal sistema

$$\begin{cases} y = 3 \\ y = \log_2 x. \end{cases}$$

Si interpreta il sistema sul piano cartesiano rappresentando sullo stesso riferimento la curva logaritmica $y = \log_2 x$ e la retta d'equazione $y = 3$; le due curve si incontrano nel punto $P(8, 3)$. Dal grafico si ricava che se si sceglie $x < 8$, si ottiene...)

72. Ripetere l'esercizio 71 a partire dalle seguenti disequazioni:

$$\log_3 x \geq -0,5, \quad \log_3 x < -0,5, \quad \log_3 x \geq 0,5, \quad \log_3 x < 0,5.$$

73. Ripetere l'esercizio 71 a partire dalle seguenti disequazioni:

$$\log_{10} x \geq 2, \quad \log_{10} x < 2, \quad \log_{10} x \geq -0,25, \quad \log_{10} x < -0,25.$$

74. Ripetere l'esercizio 71 a partire dalle seguenti disequazioni:

$$\log_{\frac{1}{3}} x \geq -1, \quad \log_{\frac{1}{3}} x < -1, \quad \log_{\frac{1}{3}} x \geq 1, \quad \log_{\frac{1}{3}} x < 1.$$

75. Ripetere l'esercizio 71 a partire dalle seguenti disequazioni:

$$\log_{\frac{3}{4}} x \geq -2, \quad \log_{\frac{3}{4}} x < -2, \quad \log_{\frac{3}{4}} x \geq 0,5, \quad \log_{\frac{3}{4}} x < 0,5.$$

Lo svolgimento degli esercizi dal 71 al 75 suggerisce delle conclusioni più generali, valide per disequazioni esponenziali del tipo

$$\log_a x \geq b \quad \text{oppure} \quad \log_a x \leq b.$$

È opportuno distinguere due casi:

I) $a > 1$.

Si ha una curva logaritmica crescente, perciò se n è il numero tale che

$$\log_a n = b,$$

risulta (fig. 3):

$$\begin{array}{lll} \log_a x \geq b & \text{per} & x \geq n \\ \log_a x \leq b & \text{per} & x \leq n. \end{array}$$

II) $a < 1$.

Si ha una curva logaritmica decrescente, perciò se n è il numero tale che

$$\log_a n = b,$$

risulta (fig. 4):

$$\begin{array}{lll} \log_a x \geq b & \text{per} & x \leq n \\ \log_a x \leq b & \text{per} & x \geq n. \end{array}$$

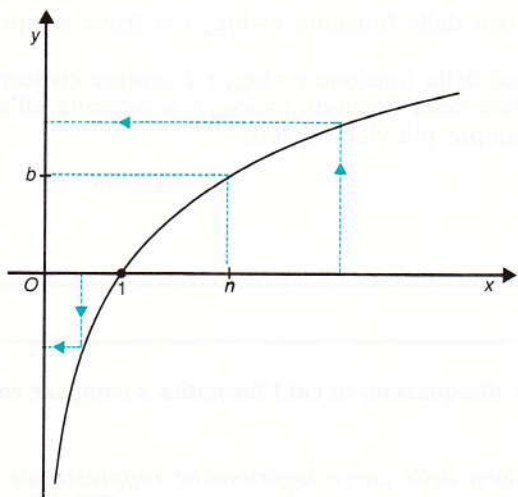


Fig. 3

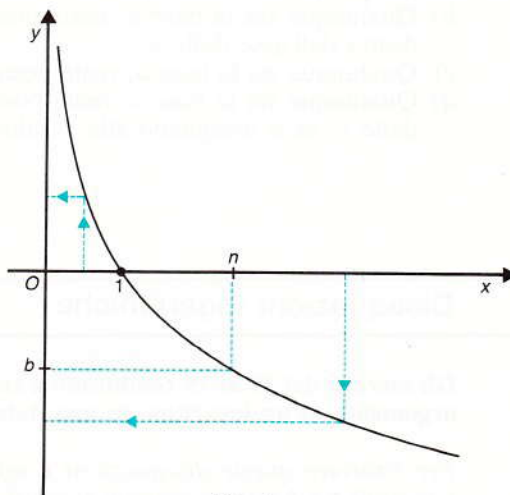


Fig. 4

Esponenziale e logaritmo con il calcolatore tascabile

Gli esercizi dal 76 all'87 conducono ad impadronirsi dell'uso dei tasti 10^x , LOG , y^x , presenti in qualunque calcolatore tascabile per uso scientifico.

76. Valersi del tasto 10^x per calcolare tante potenze di 10 ad esponente intero positivo crescente. Quando si preme la sequenza di tasti 8 10^x , sul visualizzatore compare

1. 08;

che cosa vuol dire?

Quando si preme la sequenza $\boxed{9} \boxed{9} \boxed{10^x}$, sul visualizzatore compare

1. 99;

che cosa vuol dire?

Quando si preme la sequenza $\boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{10^x}$, sul visualizzatore compare un messaggio di errore; perché?

(L'esercizio viene svolto con un calcolatore che ha la possibilità di mostrare sul visualizzatore al massimo 8 cifre. Con la sequenza di tasti

$\boxed{8} \boxed{10^x}$,

si deve ottenere

$$10^8 = 100.000.000,$$

cioè un numero con 9 cifre che non può dunque essere visualizzato. Per questo il calcolatore passa alla notazione esponenziale; dunque

$$1.08 \text{ significa } 1 \cdot 10^8.$$

Tuttavia, anche quando si vale della notazione esponenziale, il calcolatore non può visualizzare numeri grandi quanto si vuole. Il numero più grande che riusciamo ad ottenere è

$$9,99999 \cdot 10^{99},$$

che il calcolatore visualizza nella forma

$$9.99999999).$$

77. Valersi del tasto $\boxed{10^x}$ per calcolare tante potenze di 10 ad esponente intero negativo decrescente.

Quando si preme la sequenza di tasti $\boxed{8} \boxed{+/-} \boxed{10^x}$, sul visualizzatore compare

1. -08;

che cosa vuol dire?

Quando si preme la sequenza $\boxed{9} \boxed{9} \boxed{+/-} \boxed{10^x}$, sul visualizzatore compare

1. -99;

che cosa vuol dire?

Quando si preme la sequenza $\boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{+/-} \boxed{10^x}$, sul visualizzatore compare 0, accompagnato, in qualche calcolatore, da un messaggio di errore; perché?

(L'esercizio viene svolto con un calcolatore che ha la possibilità di mostrare sul visualizzatore al massimo 8 cifre. Con la sequenza di tasti

$\boxed{8} \boxed{+/-} \boxed{10^x}$,

si deve ottenere

$$10^{-8} = 0,00000001,$$

cioè un numero con 9 cifre che non può dunque essere visualizzato. Per questo il calcolatore passa alla notazione esponenziale; dunque

$$1. -08 \text{ significa } 1 \cdot 10^{-8}.$$

Tuttavia, anche quando si vale della notazione esponenziale, il calcolatore non può visualizzare numeri piccoli quanto si vuole. Il numero più piccolo che si riesce ad ottenere è, per la maggior parte dei calcolatori,

$$1 \cdot 10^{-99},$$

che viene visualizzato nella forma

$$1. -99).$$

Valendosi del tasto $\boxed{\text{LOG}}$, calcolare il valore dei logaritmi decimali assegnati negli esercizi dal 78 all'82.

78. $\log 2$, $\log 20$, $\log 200$, $\log 2000$, $\log 20.000$.

Che cosa si osserva?

(La regolarità dei risultati viene spiegata nell'esercizio 88)

79. $\log 5,8134$, $\log 58,134$, $\log 581,34$, $\log 5813,4$, $\log 58.134$.

Che cosa si osserva?

(La regolarità dei risultati viene spiegata nell'esercizio 89)

80. $\log 9,7683$, $\log 97,683$, $\log 976,83$, $\log 9768,3$, $\log 97.683$.

Che cosa si osserva?

(La regolarità dei risultati viene spiegata nell'esercizio 90)

81. $\log 3$, $\log 0,3$, $\log 0,03$, $\log 0,003$, $\log 0,0003$.

82. $\log 7,61$, $\log 0,761$, $\log 0,0761$, $\log 0,0761$, $\log 0,00761$.

Calcolare, sempre valendosi del calcolatore tascabile, il risultato delle espressioni assegnate negli esercizi dall'83 all'85.

83. $\log 3 - \log 0,3$, $\log 0,82 - \log 0,082$, $\log 0,059 - \log 0,0059$.

Che cosa si osserva?

(La regolarità dei risultati viene spiegata nell'esercizio 94)

84. $\log 76 - \log 0,76$, $\log 3,71 - \log 0,0371$, $\log 0,23 - \log 0,0023$.

Che cosa si osserva?

(La regolarità dei risultati viene spiegata nell'esercizio 95)

85. $\log 2 + \log \frac{1}{2}$, $\log 5 + \log \frac{1}{5}$, $\log \frac{2}{5} + \log \frac{5}{2}$, $\frac{3}{4} + \log \frac{4}{3}$.

Che cosa si osserva?

(Per calcolare $\log \frac{2}{5}$, è necessario valersi delle parentesi, cioè della sequenza di tasti indicata qui sotto)

$\boxed{(\boxed{2} \div \boxed{5}) \boxed{\text{LOG}}}$.

Infatti il calcolatore esegue una successione di operazioni basandosi sul sistema operativo algebrico, cioè l'ordine stabilito dai matematici per eseguire più operazioni. L'ordine stabilito è il seguente:

I) logaritmi ed elevazioni a potenza (anche ad esponente frazionario)

II) moltiplicazioni e divisioni

III) addizioni e sottrazioni.

Perciò, se non si usano le parentesi e si preme la sequenza

$\boxed{2} \boxed{\div} \boxed{5} \boxed{\text{LOG}}$,

viene visualizzato solo $\log 5 \approx 0,69897$ e viene calcolato

$$2 : \log 5 = \frac{2}{\log 5}$$

quando si completa la sequenza con il tasto $\boxed{=}$.

La regolarità dei risultati, che si nota svolgendo l'intero esercizio viene spiegata nell'esercizio 93)

86. Valendosi del tasto $\boxed{y^x}$, calcolare il valore delle seguenti potenze:

$$9^5, \quad 5^9, \quad 79^{15}, \quad 15^{79}, \quad 826^{34}, \quad 34^{65}.$$

Se si prova a calcolare 826^{35} , oppure 34^{66} , il calcolatore dà un messaggio di errore; perché?

(Per calcolare 9^5 , ci si vale della sequenza di tasti

$\boxed{9} \boxed{y^x} \boxed{5} \boxed{=}$).

Per rispondere alla domanda, vedere anche le considerazioni espone nell'esercizio 76)

87. Ripetere l'esercizio 86 per calcolare il valore delle seguenti potenze:

$$3^{-8}, \quad 8^{-3}, \quad 39^{-23}, \quad 23^{-39}, \quad 562^{-36}, \quad 35^{-64}.$$

Se si prova a calcolare 562^{-37} o 35^{-65} , il calcolatore visualizza 0, accompagnato in qualche caso da un messaggio di errore; perché?

(Per calcolare 3^{-8} , ci si vale della sequenza di tasti

$\boxed{3} \boxed{y^x} \boxed{8} \boxed{+/-} \boxed{=}$).

Per rispondere alla domanda, vedere anche le considerazioni espone nell'esercizio 77)

Alcuni calcolatori rispondono con un messaggio di errore, quando ci si vale del tasto $\boxed{y^x}$ per calcolare potenze di un numero negativo come $(-8)^5$ o $(-0,34)^{-13}$. Il motivo di questo comportamento viene spiegato nell'esercizio 103.

Proprietà dei logaritmi e cambiamento di base

Le proprietà dei logaritmi

Gli esercizi dall'88 al 103 conducono ad applicare le proprietà dei logaritmi che sono state dimostrate nel testo (paragrafo 8) e che riportiamo qui sotto.

$$I) \log(ab) = \log a + \log b$$

$$II) \log(a:b) = \log a - \log b$$

$$III) \log(a^p) = p \log a.$$

88. È dato $\log 2 \cong 0,301$, determinare il logaritmo decimale dei seguenti numeri senza valersi del calcolatore tascabile:

$$20 = 2 \cdot 10; \quad 200 = 2 \cdot 10^2; \quad 2000 = 2 \cdot 10^3; \quad 20.000 = 2 \cdot 10^4.$$

(Valendosi della (I) proprietà si ha:

$$\log(2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 \cong 0,301 + 1 = 1,301 \dots)$$

89. Ripetere l'esercizio 88 a partire da

$$\log 5,8134 \cong 0,764$$

per determinare i logaritmi dei seguenti numeri:

$$58,134; \quad 581,34; \quad 5813,4; \quad 58.134.$$

90. Ripetere l'esercizio 88 a partire da

$$\log 9,7683 \cong 0,9898$$

Per determinare i logaritmi dei seguenti numeri

$$97,683; \quad 976,83; \quad 9768,3; \quad 97.683.$$

Lo svolgimento degli esercizi dall'88 al 90 suggerisce una conclusione più generale, valida per tutti i numeri del tipo

$$a \cdot 10^n,$$

con $0 < a < 10$ e n intero positivo. Risulta:

$$\log(a10^n) = \log a + \log(10^n)$$

e, in definitiva

$$\log(a10^n) = n + \log a,$$

dove $\log a$ è, in generale, un numero irrazionale più piccolo di 1, cioè del tipo

$$\log a \cong 0, pqr \dots$$

Si ha dunque

$$\log(a10^n) \cong n, pqr \dots$$

In conclusione i logaritmi di tutti i numeri del tipo $a10^n$ presentano le stesse cifre dopo la virgola e come parte intera n che è determinata dalla potenza 10^n . È proprio su questa proprietà che è basato l'uso delle tavole dei logaritmi, riportate in fondo al testo.

91. Ripetere l'esercizio 88 a partire da

$$\log 3 \cong 0,4771$$

per determinare i logaritmi dei seguenti numeri:

$$0,3 = 3 \cdot 10^{-1}; \quad 0,03 = 3 \cdot 10^{-2}; \quad 0,003 = 3 \cdot 10^{-3}; \quad 0,0003 = 3 \cdot 10^{-4}.$$

(Valendosi sempre della proprietà (I), risulta:

$$\log(3 \cdot 10^{-1}) = \log 3 + \log(10^{-1}) \cong 0,4771 + (-1) \dots)$$

92. Ripetere l'esercizio 88 a partire da
 $\log 7,61 \cong 0,8814$
 per determinare i logaritmi dei seguenti numeri
 $0,761; \quad 0,0761; \quad 0,0761; \quad 0,00761.$

Calcolare, senza valersi del calcolatore tascabile, il risultato delle espressioni assegnate negli esercizi dal 93 al 95.

93. $\log 2 + \log \frac{1}{2}, \quad \log 5 + \log \frac{1}{5}, \quad \log \frac{2}{5} + \log \frac{5}{2}, \quad \log \frac{3}{4} + \log \frac{4}{3}.$

(Valendosi sempre della proprietà (I), si ottiene

$$\log 2 + \log \frac{1}{2} = \log \left(2 \cdot \frac{1}{2} \right) = \log 1 = 0 \dots)$$

94. $\log 3 - \log 0,3, \quad \log 0,82 - \log 0,082, \quad \log 0,059 - \log 0,0059.$

(Valendosi della proprietà (II), si può scrivere

$$\log 3 - \log 0,3 = \log (3 : 0,3) = \log 10 = 1 \dots)$$

95. $\log 76 - \log 0,76, \quad \log 3,71 - \log 0,0371, \quad \log 0,23 - \log 0,0023.$

96. Se è dato $\log a$, quanto vale $\log \frac{1}{a}$?

(Valendosi sempre della proprietà (II), risulta

$$\log (1 : a) = \log 1 - \log a = \dots)$$

97. Dato $\log 2 \cong 0,301$, determinare, senza valersi del calcolatore, il logaritmo dei seguenti numeri:

$$\frac{1}{2} = 2^{-1}; \quad \frac{1}{4} = 2^{-2}; \quad \frac{1}{16} = 2^{-4}; \quad \frac{1}{128} = 2^{-7}.$$

(Valendosi della (III) proprietà, risulta:

$$\log (2^{-1}) = -1 \log 2 = \dots)$$

98. Dato $\log 4 \cong 0,602$, determinare, senza valersi del calcolatore, il logaritmo dei seguenti numeri:

$$\sqrt{4}, \quad \frac{1}{\sqrt{4}}, \quad \sqrt[3]{16}, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{64}}.$$

(Valendosi della (III) proprietà risulta:

$$\log (\sqrt{4}) = \log (4^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \log 4 \cong \dots)$$

99. Qual'è la più grande potenza ad esponente intero di 826 che può essere visualizzata da un calcolatore tascabile?

(Ricordando anche le osservazioni esposte nell'esercizio 76, deve essere

$$826^n \leq 10^{99}.$$

Calcolando il logaritmo decimale dei due membri, si ha

$$n \log 826 \leq 99 \dots$$

La massima potenza è $826^{34} \cong 1,5 \cdot 10^{99}$)

100. Ripetere l'esercizio 99 in generale per prevedere qual'è la più grande potenza del tipo a^n (con n intero positivo), che può essere visualizzata da un calcolatore tascabile.

(Si ottiene $n \leq \frac{99}{\log a}$)

101. Qual'è la più piccola potenza ad esponente intero negativo di 562 che può essere visualizzata da un calcolatore tascabile?

(Ricordando anche le considerazioni svolte nell'esercizio 77, deve essere

$$562^n \geq 10^{-99}.$$

Calcolando il logaritmo decimale dei due membri, si ha:

$$n \log 562 \geq -99 \dots$$

La minima potenza è $562^{-36} \cong 1,02 \cdot 10^{-99}$)

- 102.** Ripetere l'esercizio 101 in generale per prevedere qual'è la più piccola potenza del tipo a^n (con n intero negativo), che può essere visualizzata da un calcolatore tascabile.

$$(Si\ ottiene\ n \geq -\frac{99}{\log a})$$

- 103.** Dimostrare che è vera l'uguaglianza seguente:

$$y^x = 10^{x \log y}.$$

(Basta calcolare il logaritmo decimale dei due membri per verificare che l'uguaglianza è vera. È proprio a partire da quest'uguaglianza che alcuni calcolatori tascabili realizzano il calcolo di potenze, quando ci si vale del tasto $\boxed{y^x}$).

Ora è chiaro che non si riesce a calcolare potenze con base $y < 0$, dato che, in tal caso, non si può calcolare $\log y$

È importante osservare che l'impostazione degli esercizi 101, 102, 103 è basata sul fatto che la funzione $y = \log x$ è una funzione sempre crescente, perciò si ha che:

$$a = b, \text{ se risulta } \log a = \log b,$$

$$a \geq b, \quad \gg \quad \log a \geq \log b,$$

$$a \leq b, \quad \gg \quad \log a \leq \log b.$$

Gli esercizi dal 104 al 110 conducono a riflettere in modo più approfondito sulle proprietà dei logaritmi.

- 104.** Indicare quali fra le seguenti uguaglianze sono corrette e quali sbagliate, spiegando i criteri seguiti per rispondere:

$$\log(a+b) = \log a + \log b; \quad \log(1000+100) = 2+3;$$

$$\log(ab) = \log a + \log b; \quad \log(100 \cdot 1000) = 2+3;$$

$$\log(ab) = \log a \log b; \quad \log(100 \cdot 1000) = 2 \cdot 3.$$

- 105.** Ripetere l'esercizio 104 a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\log(a:b) = \log a - \log b; \quad \log(0,1:100) = -1-2;$$

$$\log(a-b) = \log a - \log b; \quad \log(0,1-100) = -1-2;$$

$$\log(a:b) = \log a : \log b; \quad \log(0,1:100) = -1:2.$$

- 106.** Ripetere l'esercizio 104 a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\log(-a) = -\log a; \quad \log(-100) = -2;$$

$$\log \frac{1}{a} = \frac{1}{\log a}; \quad \log \frac{1}{100} = \frac{1}{2};$$

$$\log \frac{1}{a} = -\log a; \quad \log \frac{1}{100} = -2.$$

- 107.** Ripetere l'esercizio 104 a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\log(a^p) = (\log a)^p; \quad \log 10^3 = 1^3;$$

$$\log(a^p) = p \log a; \quad \log 10^3 = 3 \cdot 1;$$

$$\log \sqrt{a} = \sqrt{\log a}; \quad \log \sqrt{10} = \sqrt{1};$$

$$\log \sqrt{a} = \frac{1}{2} \log a; \quad \log \sqrt{10} = \frac{1}{2} \cdot 1.$$

- 108.** Ripetere l'esercizio 104 a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\log(a^{\log a}) = (\log a)^2; \quad \log(a^2) = (\log a)^2;$$

$$\frac{1}{\log a} + \frac{1}{\log b} = \frac{1}{\log(a+b)}; \quad \frac{1}{\log a} + \frac{1}{\log b} = \frac{\log(ab)}{\log a \log b}.$$

- 109.** Se a è un numero positivo e risulta $n = \log a$, quali sono i numeri b, c, d per cui risulta
 $\log b = n+1, \quad \log c = 2n, \quad \log d = n + \log 2?$

- 110.** Ripetere l'esercizio 109 per determinare i numeri b, c, d, f per cui risulta

$$\log b = n - \log 2; \quad \log c = \frac{n}{2}; \quad \log d = n - 1.$$

Cambiamento di base

Gli esercizi dal 111 al 114 conducono ad impadronirsi della regola per calcolare il logaritmo in una base qualunque c di un numero a ; la regola, che è dimostrata nel paragrafo 9, è riportata qui sotto:

$$\log_c a = \frac{\log a}{\log c}.$$

Calcolare i logaritmi indicati negli esercizi dal 111 al 114.

111. $\log_5 25$, $\log_5 50$, $\log_5 100$, $\log_3 9$, $\log_3 18$, $\log_3 45$.
È sempre indispensabile valersi del calcolatore per determinare i logaritmi assegnati?
112. $\log_4 2$, $\log_4 0,5$, $\log_4 0,75$, $\log_8 0,125$, $\log_8 0,25$, $\log_8 2$.
È sempre indispensabile valersi del calcolatore per determinare i logaritmi assegnati?
113. $\log_{0,2} 5$, $\log_{0,2} 0,1$, $\log_{0,2} 200$, $\log_{\frac{3}{4}} 3$, $\log_{\frac{3}{4}} 15$, $\log_{\frac{3}{4}} 0,375$.
È sempre indispensabile valersi del calcolatore per determinare i logaritmi assegnati?
114. $\log_{0,4} 25$, $\log_{0,4} 0,25$, $\log_{40} 25$, $\log_{40} 0,25$, $\log_{20} 25$, $\log_{20} 0,25$.
È sempre indispensabile valersi del calcolatore per determinare i logaritmi assegnati?

Gli esercizi dal 115 al 124 conducono ad approfondire meglio le nozioni relative al cambiamento di base e alle proprietà dei logaritmi.

Calcolare il risultato delle espressioni assegnate negli esercizi dal 115 al 124.

115. $\log 5 \cdot \log_5 10$; $\log_{0,5} 2 \cdot \log_2 0,5$; $\log_3 8 \cdot \log_8 3$; $\log_a b \cdot \log_b a$.
(Il risultato è sempre 1)
116. $\log_{\frac{1}{2}} 5 + \log_2 5$; $\log_5 48 + \log_{\frac{1}{5}} 48$; $\log_{\frac{1}{a}} b + \log_a b$.
(Il risultato è sempre 0)
117. $\log_{\frac{1}{2}} 5 - \log_2 \frac{1}{5}$; $\log_5 10 - \log_{\frac{1}{5}} 0,1$; $\log_{\frac{1}{a}} b - \log_a \frac{1}{b}$.
(Il risultato è sempre 0)
118. $\frac{1}{\log_2 10} + \frac{1}{\log_5 10}$; $\frac{1}{\log_4 8} + \frac{1}{\log_{0,5} 8}$; $\frac{1}{\log_a c} + \frac{1}{\log_b c}$.
(Si ottiene 1, $\frac{1}{3}$, $\log_c(ab)$)
119. $\frac{1}{\log_{20} 10} - \frac{1}{\log_2 10}$; $\frac{1}{\log_4 2} - \frac{1}{\log_{0,5} 2}$; $\frac{1}{\log_a c} - \frac{1}{\log_b c}$.
(Si ottiene 1, 3, $\log_c \frac{a}{b}$)
120. $\frac{1}{\log_4 2}$; $\frac{1}{\log_5 10}$; $\frac{n}{\log_a b}$.
(Si ottiene 6, $\log 5^4$, $\log_b a^n$)
121. $\log_7 15 \cdot \log_{15} 8 - \log_7 8$; $\log_7 15 \cdot \log_{15} 8 - \log_7 8$; $\log_a b \cdot \log_b c - \log_a c$.
(Il risultato è sempre 0)
122. $\log_2 8 \cdot \log_8 64 \cdot \log_{64} 2$; $\log_3 0,5 \cdot \log_{0,5} 9 \cdot \log_9 3$; $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$.
(Il risultato è sempre 1)
123. $\log_9 25 \cdot \log_5 9$; $\log_4 49 \cdot \log_7 4$; $\log_{0,25} 36 \cdot \log_6 0,25$.
(Il risultato di tutte le espressioni è sempre 2; si può trovare una regola generale?)

124. $\log_9 25 \cdot \log_5 3$; $\log_4 49 \cdot \log_7 2$; $\log_{0,25} 36 \cdot \log_6 0,5$.

(Il risultato di tutte le espressioni è sempre 1; si può trovare una regola generale?)

Trasformazioni della curva logaritmica

Gli esercizi dal 125 al 135 conducono ad interpretare graficamente sia la regola relativa al cambiamento di base che le proprietà dei logaritmi.

Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 10.

125. Rappresentare sullo stesso piano cartesiano il grafico delle seguenti funzioni:

a) $y = \log x$; b) $y = \log_2 x$; c) $y = \log_4 x$; d) $y = \log_8 x$.

Descrivere le affinità che trasformano la curva (a) in ciascuna delle altre..

Descrivere le affinità che trasformano la curva (b) nella (c) o nella (d).

126. Ripetere l'esercizio 125 a partire dalle seguenti funzioni:

a) $y = \log x$; b) $y = \log_{15} x$; c) $y = \log_{45} x$; d) $y = \log_{100} x$.

127. Ripetere l'esercizio 125 a partire dalle seguenti funzioni:

a) $y = \log x$; b) $y = \log_{0,1} x$; c) $y = \log_{0,4} x$; d) $y = \log_{0,8} x$.

128. Determinare il valore della base b della funzione

$y = \log_b x$,

sapendo che la curva passa per il punto $A(0,5; -1)$.

129. Rappresentare sullo stesso piano cartesiano il grafico delle seguenti funzioni:

a) $y = \log x$; b) $y = \log x^2$; c) $y = \log x^3$; d) $y = \log x^4$.

Descrivere le trasformazioni che mutano la curva (a) in ciascuna delle altre.

(Tenere presente che in base ad una delle proprietà dei logaritmi risulta $\log x^2 = 2 \log x$...)

130. Ripetere l'esercizio 129 a partire dalle seguenti funzioni:

a) $y = \log x$; b) $y = \log \frac{1}{x}$; c) $y = \log \frac{1}{x^2}$; d) $y = \log \frac{1}{x^3}$.

131. Ripetere l'esercizio 129 a partire dalle seguenti funzioni:

a) $y = \log x$; b) $y = \log \sqrt{x}$; c) $y = \log \frac{1}{\sqrt{x}}$.

132. Ripetere l'esercizio 129 a partire dalle seguenti funzioni:

a) $y = \log x$; b) $y = \log (10x)$; c) $y = \log (0,1x)$.

(Tenere presente che in base ad una delle proprietà dei logaritmi risulta

$\log (10x) = \log x + \log 10 = \log x + 1$...

Ora la trasformazione che muta la curva (a) nella (b) è una traslazione lungo l'asse delle y ..., di cui si parla nel cap. 1, Parte terza, paragrafo 5.)

133. Ripetere l'esercizio 132 a partire dalle seguenti funzioni:

a) $y = \log x$; b) $y = \log (100x)$; c) $y = \log (0,01x)$.

134. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

a) $y = \log x$; b) $y = \log x + 1$; c) $y = \log (x+1)$.

Descrivere la traslazione che trasforma la curva (a) in ciascuna delle altre.

(Ora la curva (a) è mutata nella curva (c) da una traslazione lungo l'asse delle x , di cui si parla a nel cap. 1, Parte terza, paragrafo 5).

135. Ripetere l'esercizio 134 a partire dalle seguenti funzioni:

a) $y = \log x$; b) $y = \log (x-2)$; c) $y = \log x - 2$.

Equazioni esponenziali e logaritmiche

Equazioni esponenziali

Le nozioni finora svolte consentono anche di risolvere delle equazioni esponenziali, cioè delle equazioni che presentano l'incognita come esponente di uno o più numeri fissi. Gli esercizi dal 136 al 140 conducono appunto a risolvere equazioni di questo tipo.

Risolvere le equazioni presentate negli esercizi dal 136 al 140.

136. $5^{2x-1}=25$; $2^{2-8x}=16$; $3^{x+3}=81$,

(La prima equazione si può anche scrivere nella seguente forma

$$5^{2x-1}=5^2;$$

così è chiaro che le due potenze della stessa base risultano uguali solo se sono uguali gli esponenti. Deve dunque risultare

$$2x-1=2, \quad \text{da cui} \quad x=\frac{3}{2}.$$

Analogamente si trovano le soluzioni delle altre due equazioni che sono $x=-\frac{1}{4}$, $x=1$)

137. $4^{x+2x}=1$; $7^{-x+4}=1$; $6^{x+x}=36$.

(Tenere presente che risulta $1=a^0$, per qualunque base $a \neq 0$; si ottengono le seguenti soluzioni: 0 e -2; 2 e -2; 1 e -2)

138. $3^{x^2-2x}=9^{x^2-4}$; $4^{x^2-1}=\frac{4^x}{4^{x^2}}$; $25 \cdot 5^{x^2-2}=5^{4x^2}$.

(Ora per ricondursi ad un'equazione del tipo già risolto negli esercizi 137 e 138 bisogna valersi delle proprietà delle potenze... si ottengono le soluzioni seguenti: -4 e 2; 1 e 0,5; 0 e 4)

139. $2^{x+2}=5^{1-x}$; $5^{2x+1}=4^{2-x}$; 4^{3x+3} .

(Ora non si hanno più due potenze della stessa base; per risolvere le equazioni è opportuno calcolare il logaritmo decimale dei due membri. Valendosi delle proprietà dei logaritmi, per la prima equazione si ha:

$$(x+2) \log 2 = (1-x) \log 5, \quad \text{da cui} \quad x = \log \frac{5}{4} \cong 0,097.$$

Procedendo in modo analogo si trova per la seconda e terza equazione

$$x = \frac{1}{2} \log \frac{16}{5} \cong 0,25; \quad x = -\log 5,4^3 \cong -2,42)$$

140. $4^{2x+1}=6^x$; $3^{2x-1}=2^{3x}$; $7,27^{x-1}=8,97^x$.

(Sulla base delle considerazioni svolte nell'esercizio precedente, si trovano le seguenti soluzioni:

$$x = \frac{-\log 4}{\log \frac{8}{3}} \cong -1,41; \quad x = \frac{\log 3}{\log \frac{9}{7}} \cong 9,33; \quad x = \frac{\log 7,27}{\log \frac{7,27}{8,97}} \cong -9,44)$$

Equazioni logaritmiche

Le nozioni finora svolte consentono anche di risolvere delle equazioni logaritmiche, cioè delle equazioni che presentano l'incognita come argomento di logaritmi. Gli esercizi dal 141 al 145 conducono appunto a risolvere equazioni di questo tipo.

Risolvere le equazioni presentate negli esercizi dal 141 al 145.

141. $\log(2x-4)=\log(1-x); \quad \log(x+1)=\log(2x-2); \quad \log_3(4-x^2)=\log_3(x^2-2x).$

(La risoluzione delle equazioni è basata sulla seguente proprietà: due logaritmi nella stessa base risultano uguali solo se sono uguali gli argomenti (v. anche esercizi, pag.).

Per risolvere la prima equazione si deve dunque avere:

$$2x-4=1-x, \quad \text{da cui} \quad x=\frac{5}{3}.$$

Ora è importante ricordare che non esiste il logaritmo di zero o di un numero negativo, perciò occorre sempre verificare che la soluzione sia valida sostituendo il numero ottenuto alla x .

Nell'equazione ora risolta si ottiene, sostituendo $\frac{5}{3}$ alla x

I membro: $\log\left(\frac{10}{3}-4\right)=\log\left(-\frac{2}{3}\right)$ privo di significato

II membro: $\log\left(1-\frac{5}{3}\right)=\log\left(-\frac{2}{3}\right)$ » » »

Ci si rende conto che il valore $\frac{5}{3}$ rende uguali gli argomenti dei due logaritmi, come si voleva; tuttavia la soluzione ottenuta non è valida perché rende negativi i due argomenti.

Si conclude così che l'equazione assegnata non ha soluzioni: è impossibile.

Procedendo in modo analogo a partire dalla seconda equazione, si ottiene:

$$x+1=2x-2, \quad \text{da cui} \quad x=3.$$

La soluzione ottenuta è valida perché, sostituendo 3 alla x , si ottiene:

I membro: $\log(3+1)=\log 4,$

II membro: $\log(2 \cdot 3-2)=\log 4.$

Per la terza equazione l'unica soluzione valida è $x=-1$

142. $\log x+\log(x^2-2)=\log(4x-x^3); \quad \log x+\log(x+1)=2 \log(1-x).$

(Ora per ricondurre le equazioni alla forma esaminata nel numero precedente occorre valersi delle proprietà dei logaritmi (richiamate a pag. 595). Così si scrive la prima equazione nella forma seguente:

$$\log(x^3-2x)=\log(4x-x^3),$$

che è risolta se si ha

$$x^3-2x=4x-x^3, \quad \text{da cui la soluzione} \quad x=\sqrt{3}.$$

Procedendo in modo analogo si trova per la seconda equazione la soluzione $x=\frac{1}{3}$

143. $\log(x+3)-\log x=\log 8-\log(x+1); \quad \log x-\log(x-1)=2 \log x-\log(x+3).$

(Ora per ricondurre le equazioni alla forma esaminata nell'esercizio 141 occorre valersi delle proprietà dei logaritmi (richiamate a pag. 595).

Così si scrive la prima equazione nella forma seguente

$$\log \frac{x+3}{x}=\log \frac{8}{x+1},$$

che è risolta se si ha

$$\frac{x+3}{x}=\frac{8}{x+1}, \quad \text{da cui le soluzioni} \quad x=1 \text{ e } x=3.$$

Procedendo in modo analogo per la seconda equazione, si trova la soluzione $x=3$

144. $\log_2(2x-3)=\log_4(3x^2-10x+12); \quad \log_2(2x-3)=\log_{\frac{1}{2}}(x-1).$

(Ora per ricondurre le equazioni alla forma esaminata nell'esercizio 141, occorre valersi anche del cambiamento di base (paragrafo 9); così si scrive la prima equazione nella forma seguente

$$\frac{\log_4(2x-3)}{\log_4 2}=\log_4(3x^2-10x+12), \quad \text{ossia} \quad 2 \log_4(2x-3)=\log_4(3x^2-10x+12).$$

Applicando la proprietà III, richiamata a pag. 595, si ottiene poi

$$\log_4(2x-3)^2=\log_4(3x^2-10x+12),$$

che è risolta se si ha:

$$(2x-3)^2=3x^2-10x+12, \quad \text{da cui la soluzione} \quad x=3.$$

Procedendo in modo analogo per la seconda equazione, si ottiene la soluzione $x=2$

145. $\log_2 (x+3) = \log_4 (15x+x^2) - \log_4 x$; $\log (x+1) + \log_{0,1} (x-1) = \log 2$.

(La prima equazione ha la soluzione $x=1$, la seconda $x=3$)

Problemi vari

I quesiti proposti negli esercizi dal 146 al 154 sono tratti dai campi più vari della scienza e della tecnica e conducono ad applicare le nozioni relative all'esponenziale e al logaritmo per risolvere problemi reali.

146. In chimica si introduce il pH di una sostanza nel modo seguente:

$$\text{pH} = -\log [\text{H}^+],$$

dove con il simbolo $[\text{H}^+]$ si indica la concentrazione degli ioni idrogeno presenti in una sostanza; questa concentrazione si misura in moli per litro. Così per l'acqua distillata si ha $\text{pH}=7$; si dicono acidi le sostanze con $\text{pH}<7$ e si dicono basi le sostanze con $\text{pH}>7$.

Determinare il pH delle seguenti sostanze:

- uova con $[\text{H}^+] = 1,6 \cdot 10^{-2}$ moli/litro,
- pomodori con $[\text{H}^+] = 6,3 \cdot 10^{-5}$ moli/litro,
- latte con $[\text{H}^+] = 4 \cdot 10^{-7}$ moli/litro.

147. Tenendo presenti le considerazioni svolte nell'esercizio precedente, calcolare $[\text{H}^+]$ (la concentrazione di ioni idrogeno, misurata in moli per litro) delle seguenti sostanze:

- aceto con $\text{pH}=3,1$,
- birra con $\text{pH}=4,3$,
- succo di limone con $\text{pH}=2,3$.

148. Per misurare l'intensità della sensazione prodotta da una sorgente sonora, ci si vale della seguente formula, di cui si chiarisce l'origine nell'esercizio 93, pag. 614:

$$(1) \quad S = 10 \log \frac{P}{P_0},$$

dove S è la misura in *decibel* dell'intensità della sensazione sonora, P è una misura dell'intensità della vibrazione prodotta dall'onda sonora nell'aria e P_0 è l'intensità minima udibile dall'orecchio umano. Comunemente P è espressa dall'energia trasportata in 1 secondo da un fronte d'onda ampio 1 m^2 e si misura in W/m^2 ; così risulta $P_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

Si ha, per esempio, che il fruscio delle foglie agitate da una brezza primaverile misura circa 20 decibel, mentre suoni superiori a 120 decibel provocano sensazioni dolorose.

Determinare in W/m^2 il valore di P corrispondente alla soglia del dolore (120 decibel) e al fruscio delle foglie (20 decibel).

149. Al momento del decollo un aereo supersonico produce un'onda sonora con un'intensità $P = 0,2 \text{ W/m}^2$; quanto vale, in decibel, la sensazione sonora corrispondente?

150. In molti paesi è prevista una protezione acustica per gli operai che lavorano in un ambiente con un livello sonoro $S > 85$ decibel.

In una fabbrica viene utilizzata una macchina che produce un rumore intenso 60 decibel; se nello stesso ambiente vengono disposte affiancate due di queste macchine, il livello sonoro dell'ambiente richiede la protezione acustica degli operai?

(Tenere presenti le considerazioni svolte nell'esercizio 148. Si ottiene, con le due macchine affiancate $S \approx 63$ decibel...)

151. Trovare una formula generale per descrivere l'intensità S in decibel della sensazione sonora ottenuta sovrapponendo due suoni che producono sensazioni acustiche di S_1 ed S_2 decibel.

(Si ottiene $S = 10 \log (10^{\frac{S_1}{10}} + 10^{\frac{S_2}{10}})$)

152. Oltre che in decibel, le sensazioni acustiche si misurano anche in *son*, valendosi della formula seguente

$$(2) \quad s = 10^{2,4} P^{0,3},$$

dove s è la misura di una sensazione in *son*, mentre P è sempre l'intensità dell'onda sonora espressa in W/m^2 .

Confrontare la relazione (2) con la (1) esposta nell'esercizio 148, provando che s raddoppia quando S aumenta di 10 decibel.

153. La luminosità di una stella osservata ad occhio nudo è misurata tramite la *magnitudo* M , definita nel modo seguente:

$$M = 6 - 2,5 \log \frac{I}{I_0},$$

dove I è l'intensità della luce proveniente dalla stella e I_0 è la minima intensità percepibile.

Verificare che per le stelle meno luminose si ha $M=6$.

Per le stelle più luminose risulta $M=1$; quante volte è più intensa la luce proveniente da queste stelle (rispetto alla luce delle stelle con $M=6$)?

154. Per descrivere gli effetti di un terremoto si usa spesso la *scala Richter*, proposta dal sismologo americano C. Richter nel 1935. In base a questa scala si calcola la *magnitudo* M di un terremoto valendosi della seguente formula:

$$M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0},$$

dove E , misurata in Joule, è l'energia totale sviluppata dal terremoto ed E_0 è la minima energia rilevata in un terremoto.

Sapendo che risulta $M=5,5$, se si ha $E=10^{13}$ J, quanto vale E_0 ?

Il terremoto del 1985 in Messico aveva una magnitudo $M=9$, quanta energia E è stata liberata in quel terremoto?

3. Parte seconda

Esercizi

Leggi di capitalizzazione

Capitalizzazione composta

Gli esercizi dall'1 al 15 conducono ad impadronirsi della legge di capitalizzazione composta, di cui si parla nel paragrafo 1.

Per risolvere gli esercizi è opportuno ricordare che se si investe un capitale A ad un tasso annuo d'interesse r , si ha, dopo n anni, un capitale C (detto anche montante), dato da

$$C = A(1+r)^n.$$

Determinare il capitale C , che si ottiene in regime di capitalizzazione composta, nelle condizioni indicate negli esercizi dall'1 al 3.

1. $A=1$ milione, $r=12\%$, $n=4$ anni, $n=8$ anni, $n=16$ anni, $n=32$.
Nelle situazioni esaminate, qual'è la legge che lega C ad n ? Se raddoppia il numero di anni n , raddoppia anche il capitale C ?
2. $n=10$ anni, $r=10\%$, $A=4$ milioni, $A=8$ milioni, $A=16$ milioni, $A=32$ milioni.
Nelle situazioni esaminate, qual'è la legge che lega C ad A ? Se raddoppia il capitale iniziale A , raddoppia anche il montante C ?
3. $A=1$ milione, $n=3$ anni, $r=5\%$, $r=10\%$, $r=20\%$, $r=40\%$, $r=80\%$.
Nelle situazioni esaminate, qual'è la legge che lega C ad r ? Se raddoppia il tasso annuo di interesse r , raddoppia anche il capitale C ?
4. Scrivere la legge che lega il montante C al numero di anni n , se è fisso $A=1$ milione, ma r assume i valori seguenti: $r=5\%$, $r=10\%$, $r=20\%$, $r=40\%$, $r=80\%$, $r=100\%$.
5. Riflettendo sullo svolgimento degli esercizi 1, 2, 3, 4, spiegare come si può decidere se sono esatte le affermazioni seguenti:
 - a) in regime di capitalizzazione composta il montante C cresce proporzionalmente al numero n di anni.
 - b) in regime di capitalizzazione composta il montante C è proporzionale al capitale iniziale A .
 - c) in regime di capitalizzazione composta il montante C è proporzionale al tasso annuo r d'interesse.
 - d) in regime di capitalizzazione composta il montante C è proporzionale al capitale iniziale A ed aumenta con legge esponenziale al crescere del numero n di anni; se aumenta il tasso r d'interesse, C cresce più rapidamente al crescere di n .
6. Quanto tempo occorre per ottenere un montante $C=1$ miliardo, impiegando un capitale $C=\text{£ }1000$ a un tasso d'interesse annuo $r=11\%$?
7. Stabilire il numero di anni necessario a triplicare il capitale iniziale, in un regime di capitalizzazione composta, a partire dai seguenti valori del tasso annuo d'interesse r : 1% , 10% , 20% , 30% .
8. Stabilire il numero di anni necessari per avere un montante di 10 milioni, depositando 3 milioni ai seguenti tassi d'interesse r : 8% , 10% , 13% , 20% .
9. Stabilire il numero di anni necessari per aggiungere 10 milioni ad un capitale iniziale $A=4$ milioni ai seguenti tassi d'interesse r : 8% , 10% , 12% .

10. Scrivere la formula che permette di calcolare il numero n di anni necessari per ottenere un montante C , a partire da un capitale iniziale A , impiegato ad un tasso annuo d'interesse r .

$$(Si\ ottiene\ n = \frac{\log C - \log A}{\log (1+r)})$$

11. Quale capitale A si deve impiegare ad un tasso d'interesse annuo del 12% per avere un montante $C=20$ milioni, dopo 5 anni?

12. Il problema precedente suggerisce il concetto di *valore attuale*, che si introduce per tenere conto del fatto che una certa somma di denaro A disponibile in futuro vale meno della stessa somma disponibile immediatamente, dato che si perdono tutti gli interessi derivanti da un'eventuale investimento di A .

Ora sappiamo che, in un regime di capitalizzazione composta con un interesse r , la somma A produce un montante C , dato da

$$C = A(1+r)^n,$$

perciò possedere A lire oggi è come possedere C lire fra n anni, ossia A è il *valore attuale della somma C , disponibile dopo n anni*.

Qual'è la legge che permette di ricavare A , conoscendo C , r , n ?

$$(Si\ ottiene\ A = C(1+r)^{-n})$$

13. Stabilire il tasso annuo d'interesse r , che soddisfa le condizioni seguenti:

- permette di raddoppiare il capitale iniziale in 5 anni,
- permette di triplicare il capitale iniziale in 10 anni,
- permette di avere dopo 4 anni un montante di 20 milioni, depositando 9 milioni.

14. Scrivere la formula che permette di calcolare il tasso annuo d'interesse r , necessario per ottenere un montante C , impiegando un capitale A per n anni.

$$(Si\ ottiene\ r = \sqrt[n]{\frac{C}{A}} - 1)$$

15. Si deve scegliere il modo di impiegare una somma di denaro $A=1$ milione, avendo a disposizione due alternative:

I) regime di capitalizzazione composta con i seguenti tassi annui d'interesse: $r=8\%$ per i primi due anni, $r=10\%$ per i successivi cinque anni, $r=15\%$ per gli ultimi tre anni;

II) regime di capitalizzazione composta con $r=12\%$.

Calcolare il montante C che si ottiene dopo 10 anni nei due casi.

Qual'è l'interesse fisso annuo necessario per ottenere, dopo 10 anni, lo stesso montante C che si ottiene nel primo caso?

Dal tasso d'interesse annuo al tasso d'interesse continuo

Gli esercizi dal 16 al 25 conducono a risolvere problemi in cui l'interesse annuo viene frazionato.

Per risolvere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 2.

16. Un capitale $A=1$ milione viene investito ad un tasso annuo d'interesse $r=12\%$. Calcolare il montante C alla fine del 1° anno nelle seguenti situazioni:

- r viene scomposto in due parti uguali e gli interessi sono capitalizzati ogni semestre,
- r viene scomposto in quattro parti uguali e gli interessi sono capitalizzati ogni trimestre,
- r viene scomposto in dodici parti uguali e gli interessi sono capitalizzati ogni mese.

17. Ripetere l'esercizio precedente, considerando un tasso annuo d'interesse $r=24\%$.

18. Ripetere gli esercizi 16 e 17, a partire da un capitale $A=4$ milioni.

19. Dopo aver svolto gli esercizi 16, 17 e 18, scrivere la legge che permette di calcolare il montante C che si ottiene impiegando per 1 anno un capitale A ad un tasso d'interesse annuo r , che viene frazionato in k parti uguali ed attribuito k volte l'anno.

$$(Si\ ottiene\ C = A \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k)$$

20. Spiegare come si può ottenere la legge per calcolare il montante C che si ottiene impiegando per n anni un capitale A che viene frazionato in k parti uguali ed attribuito k volte l'anno.
(La legge è $C = A \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{nk}$)
21. Si investe un capitale $A=4$ milioni ad un tasso d'interesse annuo dell'8%, che viene valutato trimestralmente; calcolare il montante C dopo 5 anni ed il montante C dopo 10 anni.
22. Si investe un capitale $A=5$ milioni ad un tasso d'interesse annuo del 9%, che viene valutato ogni quadrimestre; calcolare il tempo necessario a raddoppiare e a triplicare il capitale iniziale.
23. Un capitale $A=1$ milione viene investito ad un tasso annuo d'interesse $r=20\%$, che viene valutato trimestralmente; calcolare il montante C alla fine del 1° anno. Calcolare il tasso d'interesse R , che, valutato una sola volta durante l'anno, produrrebbe lo stesso montante C .
(Si ottiene $R = (1,05)^4 - 1 \approx 0,215 = 21,5\%$)
24. Ripetere l'esercizio precedente in generale per determinare il tasso annuo d'interesse R , che produce lo stesso montante di un interesse $\frac{r}{k}$, valutato k volte l'anno.
(Si ottiene $R = \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k - 1$)

Nelle condizioni descritte nell'esercizio 24 r prende il nome di tasso nominale d'interesse convertibile k volte l'anno, mentre R si chiama tasso d'interesse annuo effettivo.

Leggi di crescita esaminate dal punto di vista grafico

Gli esercizi dal 25 al 34 conducono ad esaminare dal punto di vista grafico alcune delle leggi di crescita finora introdotte.

Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nei paragrafi 1 e 2.

Stabilire la legge che lega il capitale C al tempo t e tracciarne il grafico nelle situazioni descritte negli esercizi dal 25 al 28.

25. Si impiega un capitale iniziale $A=1$ milione ai seguenti tassi d'interesse annuo r : 5%, 10%, 20%. Confrontare i tre grafici ottenuti.
26. Si impiegano all'interesse del 20% i seguenti capitali A : 2 milioni, 4 milioni, 10 milioni. Confrontare i tre grafici ottenuti.
27. Si impiega un capitale $A=5$ milioni al tasso di interesse annuo $r=11\%$; si impiega un capitale $A=11$ milioni al tasso d'interesse annuo $r=5\%$. Confrontare i due grafici ottenuti.
28. Si impiega un capitale $A=8$ milioni ai seguenti tassi d'interesse: 12% effettivo annuo, 12% nominale convertibile semestralmente, 12% nominale convertibile trimestralmente, 12% nominale convertibile mensilmente. Confrontare i tre grafici ottenuti.
29. Confrontare i grafici delle seguenti due funzioni:
- | | |
|---|--|
| I) dominio A : gli interi positivi
codominio B : gli interi
$y=2^x$, | II) dominio A : i reali positivi
codominio B : i reali
$y=2^{\text{int}(x)}$. |
|---|--|
30. Confrontare i grafici delle seguenti due funzioni:
- | | |
|---|---|
| I) dominio A : i reali positivi
codominio B : i reali
$y=2^x$, | II) dominio A : i reali
codominio B : i reali
$y=2^{ x }$. |
|---|---|

31. Confrontare i grafici delle seguenti due funzioni:
- I) dominio A : i reali negativi
codominio B : i reali
 $y=2^{-x}$,
- II) dominio A : i reali
codominio B : i reali
 $y=2^{|x|}$.
32. Ripetere l'esercizio 29, scegliendo $\frac{1}{2}$ come base delle funzioni esponenziali.
33. Ripetere l'esercizio 30, scegliendo $\frac{1}{2}$ come base delle funzioni esponenziali.
34. Ripetere l'esercizio 31, scegliendo $\frac{1}{2}$ come base delle funzioni esponenziali.

Il numero di Nepero come base per esponenziale e logaritmo

Il numero e

Gli esercizi dal 35 al 42 conducono ad impadronirsi del numero e e delle sue potenze.

Per svolgere gli esercizi è indispensabile lavorare con un calcolatore tascabile per uso scientifico ed è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 2.

35. Valendosi del calcolatore tascabile, calcolare il valore dell'espressione

$$(1) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

in corrispondenza ai seguenti valori di n : 10^2 , 10^3 , 10^4 , 10^5 , 10^6 , 10^7 .

Valutare, in ogni caso, la differenza fra un valore ed il valore precedentemente ottenuto; che cosa si osserva?

36. I calcolatori tascabili più comuni lavorano con numeri che presentano al massimo 8 cifre, perciò non possono distinguere il numero 1 dal numero $1+10^{-8}$. Si riesce a prevedere che cosa succede se proviamo a calcolare il valore dell'espressione (1) in corrispondenza a $n=10^8$?

37. Completare la seguente tabella valendosi del tasto $[e^x]$, presente sui più comuni calcolatori tascabili per uso scientifico.

x	0	1	2	3	4	5	10	100	200
e^x									

Si può prevedere qual'è la massima potenza di e che il calcolatore riesce a visualizzare?
(V. anche esercizio 100, pag. 596)

38. Completare la seguente tabella, valendosi del calcolatore tascabile.

x	-1	-2	-3	-4	-5	-10	-100	-200
e^x								

Si può prevedere qual'è la minima potenza di e che il calcolatore riesce a visualizzare?
(V. anche esercizio 102 pag. 597)

39. Completare la seguente tabella valendosi del calcolatore tascabile.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$
e^x								

Scrivere sotto forma di radicale le potenze di e di cui compaiono i valori approssimati nella tabella.

40. Completare la seguente tabella valendosi del calcolatore tascabile.

x	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{4}$
e^x								

Scrivere sotto forma di radicale le potenze di e di cui compaiono i valori approssimati nella tabella.

41. Completare la seguente tabella valendosi del calcolatore tascabile.

x	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{20}$	π	2π	$\frac{\pi}{2}$
e^x								

42. Completare la seguente tabella valendosi del calcolatore tascabile.

x	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{8}$	$-\sqrt{10}$	$-\sqrt{20}$	$-\pi$	-2π	$-\frac{\pi}{2}$
e^x								

Il logaritmo naturale

Gli esercizi dal 43 al 48 conducono ad impadronirsi del logaritmo naturale.

Per svolgere gli esercizi è indispensabile valersi di un calcolatore tascabile per uso scientifico ed è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 4.

43. Completare la seguente tabella valendosi del tasto **LNx**, presente sui più comuni calcolatori tascabili per uso scientifico.

x	1	2	3	7	8	19	20	54	55
$\ln x$									

Riprendere la tabella compilata svolgendo l'esercizio 37 ed indicare due numeri interi a e b , tali che $\ln a < 5$ e $\ln b > 5$.

44. Completare la seguente tabella valendosi del calcolatore tascabile.

x	0,37	0,36	0,14	0,13	0,05	0,04	0,019	0,018
$\ln x$								

Riprendere la tabella compilata svolgendo l'esercizio 38 ed indicare due numeri a e b , tali che $\ln a < -5$ e $\ln b > -5$.

45. Tenendo presenti le considerazioni sul cambiamento di base, svolte nella Parte prima, paragrafo 9, dimostrare che è vera, per qualunque numero a reale positivo, la seguente relazione fra logaritmi decimali e logaritmi naturali:

$$\ln a = \frac{\log a}{\log e}, \quad \text{ossia} \quad \ln a = m \log a.$$

Scrivere il valore approssimato del numero m con due cifre decimali.

46. Ripetere l'esercizio 45 per dimostrare la relazione

$$\log a = \frac{\ln a}{\ln 10}, \quad \text{ossia} \quad \log a = p \ln a.$$

Scrivere il valore approssimato del numero p con due cifre decimali.

Quale relazione lega il numero p al numero m , calcolato nell'esercizio precedente?

47. Confrontare i logaritmi decimali con quelli naturali, valendosi del calcolatore tascabile per completare le seguenti due tabelle:

I)

x	1	10	100	1000	10^8	10^{20}	10^{50}	10^{99}
$\log x$								
$\ln x$								

II)

x	1	e	e^2	e^4	e^{10}	e^{50}	e^{100}	e^{227}
$\ln x$								
$\log x$								

48. Ripetere l'esercizio 47 a partire dalle seguenti due tabelle:

I)

x	1	0,1	0,01	0,001	10^{-8}	10^{-20}	10^{-50}	10^{-99}
$\log x$								
$\ln x$								

II)

x	1	e^{-1}	e^{-2}	e^{-4}	e^{-10}	e^{-50}	e^{-100}	e^{-227}
$\ln x$								
$\log x$								

Grafico di funzioni esponenziali o logaritmiche in base e

Grafico di $y=e^x$, $y=\ln x$

Gli esercizi dal 49 al 59 conducono ad impadronirsi del grafico delle funzioni $y=e^x$ e $y=\ln x$.

Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti le nozioni espone nel paragrafo 4.

49. Tracciare su carta millimetrata il grafico della funzione $y=e^x$, valendosi anche delle tabelle compilate per risolvere gli esercizi 37 e 38.
50. Dopo aver svolto l'esercizio 49, tracciare il grafico della funzione $y=e^{-x}$, valendosi della simmetria rispetto all'asse delle y .
51. Dopo aver svolto l'esercizio 49, tracciare il grafico della funzione $y=\ln x$, valendosi della simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.
52. Dopo aver tracciato su carta millimetrata il grafico della curva $y=\ln x$, disegnare le seguenti rette secanti la curva, scegliendo un'opportuna unità di misura:
- a) passante per $A(1,0)$ e $B(2; \ln 2)$,
 - b) passante per $A(1,0)$ e $C(1,5; \ln 1,5)$,
 - c) passante per $A(1,0)$ e $D(1,1; \ln 1,1)$.

Scrivere l'equazione di ciascuna retta e fissare l'attenzione sulla relativa pendenza che cosa si osserva?

53. Svolgendo l'esercizio precedente, si sono considerate tre rette secanti, che intersecano la curva nel punto $A(1,0)$ e in un secondo punto: si osserva che quando il secondo punto si avvicina ad A , la retta secante tende a diventare la tangente t alla curva in A . I risultati dell'esercizio precedente portano ad intuire che la retta t ha pendenza 1.

Verificare che la retta t , tangente alla curva $y=\ln x$ in $A(1,0)$ ha pendenza $m=1$.

(Si può procedere nel modo seguente:

- si considera una retta secante s , congiungendo $A(1,0)$ con un punto P della curva vicino ad A , che si indica con $P[1+h, \ln(1+h)]$;
- si calcola la pendenza m della retta s , data da

$$m = \frac{\ln(1+h)}{h};$$

- si applica la proprietà III di pag. 595, valida anche per i logaritmi naturali, per scrivere:

$$m = \ln(1+h)^{\frac{1}{h}};$$

- invece del numero h , si considera il suo inverso $n = \frac{1}{h}$ e si esamina la relazione:

$$m = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

- si fa avvicinare P ad A ; mentre h diventa sempre più piccolo, n diventa..., $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ si avvicina a..., m si avvicina a...

54. Dall'esercizio precedente risulta che la retta t , tangente alla curva $y=\ln x$ in $A(1,0)$ ha pendenza $m=1$.

Scrivere l'equazione della retta t e spiegare perché risulta

$$\ln x \cong x - 1$$

per valori di x vicini ad 1.

55. Dopo aver svolto l'esercizio 54, scrivere l'equazione della retta t' , tangente alla curva $y=e^x$, in $A'(0,1)$ e spiegare perché risulta

$$e^x \cong x + 1$$

per valori di x vicini a 0.

(Tenere presente che la curva d'equazione $y=e^x$ è simmetrica della $y=\ln x$ rispetto alla bisettrice del I e III quadrante, perciò t' è la simmetrica di t ...)

56. Dopo aver svolto l'esercizio precedente, scrivere l'equazione della retta t'' , tangente alla curva d'equazione $y=e^{-x}$ nel punto $A''(0,1)$.

(Tenere presente che la curva d'equazione $y=e^{-x}$ è la simmetrica di $y=e^x$ rispetto all'asse delle y , perciò t'' è simmetrica di t' ...)

57. Generalizzare il procedimento indicato nell'esercizio 54, per indicare la pendenza m della retta t tangente alla curva $y=\ln x$ nel suo punto $A(a, \ln a)$.

(Considerare la pendenza della retta s che congiunge $A(a, \ln a)$ ed un punto $P[(a+h), \ln(a+h)]$. La retta s ha una pendenza m , data da

$$m = \frac{\ln(a+h) - \ln a}{h}.$$

Applicare le proprietà dei logaritmi e delle potenze per scrivere

$$m = \ln \left[\left(1 + \frac{h}{a} \right)^{\frac{a}{h}} \right]^{\frac{1}{a}}.$$

Invece del numero h , considerare $n = \frac{a}{h}$; si ha:

$$m = \ln \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{\frac{1}{a}}.$$

Così, quando h diventa sempre più piccolo,

$$n \text{ diventa...}, \quad \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{\frac{1}{a}} \text{ si avvicina a...}, \quad m \text{ si avvicina a...}$$

Si ottiene $m = \frac{1}{a}$

58. Dall'esercizio precedente risulta che la retta t , tangente alla curva $y=\ln x$ in $A(a, \ln a)$ ha pendenza $m=\frac{1}{a}$.
 Scrivere l'equazione della retta t e della retta t' , tangente alla curva $y=e^x$, in $A'(\ln a, a)$.
 Scrivendo $b=\ln a$, si ha $a=e^b$ e si può scrivere $A'(b, e^b)$; in tal caso, come si esprime la pendenza m' della retta t' ?
*(Tenere presente che la curva d'equazione $y=e^x$ è simmetrica della $y=\ln x$ rispetto alla bisettrice del I e III quadrante, perciò t' è la simmetrica di t ...
 Si ottiene $m=e^b$)*
59. Dopo aver svolto l'esercizio precedente, determinare l'equazione della retta t'' , tangente alla curva d'equazione $y=e^{-x}$, nel punto $A''(b, e^{-b})$ e valutarne la pendenza m'' .
*(Tenere presente che la curva d'equazione $y=e^{-x}$ è la simmetrica di $y=e^x$ rispetto all'asse delle y , perciò t'' è simmetrica di t' ...
 Si ottiene $m''=-e^{-b}$).*

Grafici ottenuti a partire da $y=e^x$ o $y=\ln x$, operando affinità e traslazioni

Gli esercizi dal 60 al 72 conducono ad impadronirsi dei grafici che si possono ottenere operando con affinità e traslazioni a partire dalle curve d'equazione $y=e^x$ o $y=\ln x$.

Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 5.

60. Tracciare i grafici delle seguenti funzioni:

$$\text{I) } y=e^x, \quad \text{II) } y=2e^x, \quad \text{III) } y=4e^x, \quad \text{IV) } y=\frac{1}{2}e^x, \quad \text{V) } y=\frac{1}{4}e^x.$$

Descrivere le trasformazioni che mutano la curva (I) in ciascuna delle altre.
(Per le trasformazioni affini v. anche cap. 1, Parte terza).

61. Ripetere l'esercizio 60, a partire dalle seguenti funzioni:

$$\text{I) } y=\ln x, \quad \text{II) } y=2 \ln x, \quad \text{III) } y=3 \ln x, \quad \text{IV) } y=\frac{1}{2} \ln x, \quad \text{V) } y=\frac{1}{3} \ln x.$$

62. Ripetere l'esercizio 60, a partire dalle seguenti funzioni:

$$\text{I) } y=e^x, \quad \text{II) } y=e^{2x}, \quad \text{III) } y=e^{3x}, \quad \text{IV) } y=e^{\frac{x}{2}}, \quad \text{V) } y=e^{\frac{x}{3}}.$$

63. Ripetere l'esercizio 60, a partire dalle seguenti funzioni:

$$\text{I) } y=\ln x, \quad \text{II) } y=\ln 2x, \quad \text{III) } y=\ln 4x, \quad \text{IV) } y=\ln \frac{x}{2}, \quad \text{V) } y=\ln \frac{x}{4}.$$

64. Ripetere l'esercizio 60, a partire dalle seguenti funzioni:

$$\text{I) } y=e^x, \quad \text{II) } y=\frac{1}{2}e^{2x}, \quad \text{III) } y=2e^{\frac{x}{2}}, \quad \text{IV) } y=\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}, \quad \text{V) } y=3e^{3x}.$$

65. Ripetere l'esercizio 60, a partire dalle seguenti funzioni:

$$\text{I) } y=\ln x, \quad \text{II) } y=2 \ln 2x, \quad \text{III) } y=\frac{1}{4} \ln 4x, \quad \text{IV) } y=4 \ln \frac{x}{2}, \quad \text{V) } y=\frac{1}{2} \ln \frac{x}{4}.$$

66. Ripetere l'esercizio 60, a partire dalle seguenti funzioni:

$$\text{I) } y=e^x, \quad \text{II) } y=e^{-x}, \quad \text{III) } y=-e^x, \quad \text{IV) } y=-e^{-x}.$$

Si può tracciare il grafico di $y=(-e)^x$?

(Per le simmetrie rispetto agli assi coordinati e rispetto all'origine O , v. cap. 1, Parte terza).

67. Ripetere l'esercizio 60, a partire dalle seguenti funzioni:

$$\text{I) } y=\ln x, \quad \text{II) } y=-\ln x, \quad \text{III) } y=\ln(-x), \quad \text{IV) } y=-\ln(-x).$$

68. Ripetere l'esercizio 60, a partire dalle seguenti funzioni:
 I) $y=e^x$, II) $y=e^x+1$, III) $y=e^x-2$, IV) $y=e^{x+1}$, V) $y=e^{x-2}$.
 (Per le traslazioni lungo gli assi, v. cap. 1, Parte terza).
69. Ripetere l'esercizio 60, a partire dalle seguenti funzioni:
 I) $y=\ln x$, II) $y=\ln x+2$, III) $y=\ln x-3$, IV) $y=\ln(x+2)$, V) $y=\ln(x-3)$.
70. Ripetere l'esercizio 60, a partire dalle seguenti funzioni:
 I) $y=e^x$, II) $y=1-3e^{x-1}$, III) $y=3+\frac{1}{2}e^{2-x}$.
71. Ripetere l'esercizio 60, a partire dalle seguenti funzioni:
 I) $y=\ln x$, II) $y=4-\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}-x\right)$, III) $y=1+2\ln(x-3)$.
72. Una somma A viene investita in un regime di capitalizzazione continua con un tasso d'interesse annuo r ; in quanto tempo la somma raddoppia?
 (Si ottiene $t=\frac{\ln 2}{r}$)

La scala semilogaritmica

Esaminare dei dati valendosi della scala semilogaritmica

Gli esercizi dal 73 al 78 conducono ad esaminare dei dati valendosi della scala semilogaritmica.

Per risolvere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 6. Altri quesiti di questo tipo sono proposti negli esercizi del cap. 4.

73. I seguenti dati approssimativi si riferiscono alla popolazione italiana maschile p rilevata nei censimenti ed espressa in decine di milioni:

anno	1861	1871	1881	1901	1911	1921	1931	1936	1951	1961	1971	1981
p	1	1,35	1,43	1,62	1,7	1,87	2,01	2,11	2,33	2,48	2,65	2,78

Rappresentare i dati in scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse il tempo x e sull'asse delle ordinate $y=\ln p$; a partire dal grafico ottenuto, scrivere la legge che, in prima approssimazione, lega p ad x .

74. Ripetere l'esercizio 73 a partire dai seguenti dati approssimativi relativi alla popolazione femminile p' rilevata nei censimenti ed espressa in decine di milioni.

anno	1861	1871	1881	1901	1911	1921	1931	1936	1951	1961	1971	1981
p'	1	1,33	1,42	1,63	1,76	1,92	2,10	2,19	2,43	2,58	2,77	2,88

75. Si organizza un esperimento di chimica, facendo reagire il perossido di sodio con il permanganato di potassio in una soluzione alcalina; in questo modo si sviluppa ossigeno, che viene raccolto in un apposito recipiente graduato. La tabella seguente presenta i dati raccolti durante un esperimento di questo tipo: t è il tempo misurato in minuti e V il volume di ossigeno, misurato in centilitri.

t	0	1	2	3	4	5
V	1	1,2	1,4	1,7	2,1	2,5

Rappresentare i dati in scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse il tempo x e sull'asse delle ordinate $y=\ln V$; a partire dal grafico ottenuto, scrivere la legge che, in prima approssimazione, lega V ad x .

76. Si studia il decadimento radioattivo del polonio, misurando in decine di grammi la massa M di un campione di questa sostanza al variare del tempo t , misurato in giorni. Si ottiene la tabella seguente:

t	0	2	4	6	8	10
M	1	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95

Rappresentare i dati in scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse il tempo x e sull'asse delle ordinate $y = \ln M$; a partire dal grafico ottenuto, scrivere la legge che, in prima approssimazione, lega M ad x .

Si riesce a prevedere dopo quanto tempo la massa dimezza?

77. La concentrazione C di una medicina nel sistema circolatorio di un uomo decresce al passare del tempo, mano a mano che il farmaco viene assorbito. In una ricerca sull'efficacia di un nuovo medicinale si è misurata C (in milligrammi per litro) al passare del tempo t misurato in ore, ottenendo la seguente tabella:

t	0	2	4	6	8	12
C	1	0,71	0,50	0,35	0,25	0,12

Rappresentare i dati in scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse il tempo x e sull'asse delle ordinate $y = \ln C$; a partire dal grafico ottenuto, scrivere la legge che, in prima approssimazione, lega C ad x .

78. Si studia la scarica di un condensatore, misurando la corrente i al passare del tempo t ; si ottiene la seguente tabella, dove i è misurata in milliampère e t in millisecondi.

t	0	1	2	3	4	5
i	1	0,60	0,37	0,22	0,13	0,08

Rappresentare i dati in scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse il tempo x e sull'asse delle ordinate $y = \ln i$; a partire dal grafico ottenuto, scrivere la legge che, in prima approssimazione, lega i ad x .

Grafici in scala semilogaritmica

Gli esercizi dal 79 all'85 conducono a tracciare dei grafici su una scala semilogaritmica.

Per risolvere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 6.

79. Tracciare in scala semilogaritmica i grafici delle seguenti funzioni e confrontare i disegni ottenuti:

$$a) y = e^x, \quad b) y = 2e^x, \quad c) y = \frac{1}{3}e^x, \quad d) y = \sqrt{2}e^x.$$

80. Ripetere l'esercizio 79 a partire dalle seguenti funzioni:

$$a) y = e^{-x}, \quad b) y = 4e^{-x}, \quad c) y = \frac{3}{4}e^{-x}, \quad d) y = \sqrt{3}e^x.$$

81. Ripetere l'esercizio 79 a partire dalle seguenti funzioni:

$$a) y = e^{-\frac{x}{2}}, \quad b) y = 3e^{-\frac{x}{2}}, \quad c) y = \frac{5}{2}e^{-\frac{x}{2}}, \quad d) y = \frac{1}{\sqrt{5}}e^{-\frac{x}{2}}.$$

82. Ripetere l'esercizio 79 a partire dalle seguenti funzioni:

$$a) y = e^x, \quad b) y = e^{4x}, \quad c) y = e^{-x}, \quad d) y = e^{\frac{x}{4}}.$$

83. Ripetere l'esercizio 79 a partire dalle seguenti funzioni:

$$a) y = \sqrt{7}e^{-x}, \quad b) y = \sqrt{7}e^{-3x}, \quad c) y = \sqrt{7}e^{3x}, \quad d) y = \sqrt{7}e^{-\frac{x}{3}}.$$

84. Ripetere l'esercizio 79 a partire dalle seguenti funzioni:

$$a) y = e^{x^2}, \quad b) y = e^{2x^2}, \quad c) y = e^{-x^2}, \quad d) y = e^{-3x^2}.$$

85. Ripetere l'esercizio 79 a partire dalle seguenti funzioni:

$$a) y=e^{\frac{1}{x}}, \quad b) y=e^{-\frac{1}{x}}, \quad c) y=e^{\frac{2}{x}}, \quad d) y=e^{-\frac{1}{2x}}.$$

Gli esercizi dall'86 al 92 conducono a riconoscere funzioni, di cui è noto il grafico in scala semilogaritmica.

Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 6.

86. Esaminare le seguenti espressioni, in cui si è indicato $z=\ln y$:

$$a) z=x, \quad b) z=x-2, \quad c) z=x+3, \quad d) z=x+\sqrt{2}.$$

Esprimere, in ogni caso, y in funzione di x .

87. Ripetere l'esercizio 86 a partire dalle seguenti espressioni:

$$a) z=-2x, \quad b) z=-2x+1, \quad c) z=-2x-\frac{5}{2}, \quad d) z=-2x+\sqrt{7}.$$

88. Ripetere l'esercizio 86 a partire dalle seguenti espressioni:

$$a) z=2x, \quad b) z=\frac{1}{2}x, \quad c) z=-x, \quad d) z=-\sqrt{3}x.$$

89. Ripetere l'esercizio 86 a partire dalle seguenti espressioni:

$$a) z=2x+4, \quad b) z=\frac{1}{2}x+4, \quad c) z=-x+4, \quad d) z=-\sqrt{3}x+4.$$

90. Ripetere l'esercizio 86 a partire dalle seguenti espressioni:

$$a) z=x^2, \quad b) z=3x^2, \quad c) z=-x^2, \quad d) z=-\frac{1}{2}x^2.$$

91. Ripetere l'esercizio 86 a partire dalle seguenti espressioni:

$$a) z=x^3, \quad b) z=x^4, \quad c) z=-x^3, \quad d) z=3x^4.$$

92. Ripetere l'esercizio 86 a partire dalle seguenti espressioni:

$$a) z=\frac{1}{x}, \quad b) z=-\frac{1}{x}, \quad c) z=\frac{1}{x^2}, \quad d) z=-\frac{1}{x^2}.$$

Problemi vari

I quesiti negli esercizi dal 93 al 99 sono tratti dai più vari campi della scienza e della tecnica e conducono a lavorare con leggi esponenziali o logaritmiche in base e .

93. Verso la metà del 1800, i fisici tedeschi G. Fechner e E. Weber studiarono il tipo di reazioni che l'organismo umano manifesta quando varia l'intensità di uno stimolo fisico (che può essere una luce, un suono, un odore, ...). Così osservarono che l'intensità S della sensazione corrispondente allo stimolo aumenta all'aumentare dell'intensità P dello stimolo, ma scoprirono che S non è proporzionale a P . Vale invece, in prima approssimazione, una legge di questo tipo:

$$S = \ln \frac{P}{P_0},$$

dove P_0 è l'intensità di soglia dello stimolo fisico, cioè la massima intensità P , in corrispondenza alla quale non si avverte alcuna sensazione (cioè risulta $S=0$).

Sapendo che il più piccolo peso che si riesce a percepire è $P_0=0,5$ grammi, valutare il rapporto fra le sensazioni S_1 ed S_2 corrispondenti ai pesi $P_1=10$ g e $P_2=100$ g.

94. Gli altimetri nella navigazione aerea sono basati sul fatto che all'aumentare della quota h diminuisce la pressione atmosferica p . Ma, per determinare la quota h , dopo aver rilevato la

pressione p , occorre tener presente che p dipende anche dalla temperatura T dell'aria. La legge che lega h , p , T è la seguente:

$$h = (30T + 8000) \ln \frac{p_0}{p},$$

dove la quota h è misurata in metri, la pressione p è misurata in centimetri di mercurio, la temperatura T è misurata in gradi centigradi e p_0 indica la pressione al livello del mare ($p_0 \approx 76$). Durante una scalata del monte Everest, due alpinisti rilevano una temperatura $T = -30^\circ$ ed una pressione $p = 24$ centimetri di mercurio.

Determinare l'altezza h a cui si trovano i due scalatori.

95. Alcuni test psicologici richiedono di memorizzare una lista di parole prive di senso; studiando i risultati di questi test, alcuni psicologi hanno trovato la seguente legge:

$$F = 1 - k \ln(t+1),$$

dove F è la frazione di persone che ricordano tutte le parole della lista dopo t ore e k è una costante che dipende da vari fattori, fra cui la lunghezza della lista di parole.

Si propone uno di questi test ad un certo gruppo di persone e si rileva che, dopo 3 ore, solo la metà ricorda l'intero elenco. Determinare il valore di k in questo esperimento e prevedere quale sarà la frazione di persone che ricorda l'intero elenco dopo 6 ore.

96. Se un oggetto che si trova ad una certa temperatura viene posto in un ambiente a temperatura più bassa, gradualmente si raffredda. Si trova la seguente legge, che regola il raffreddamento:

$$T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt},$$

dove

T indica la temperatura variabile dell'oggetto, misurata in $^\circ\text{C}$,

t il tempo, misurato in minuti,

T_0 è la temperatura iniziale dell'oggetto,

T_1 è la temperatura dell'ambiente,

k è una costante che dipende anche dal tipo di materiale con cui è realizzato l'oggetto.

Una sfera d'acciaio, portata alla temperatura di 130° , viene posta in un ambiente a 20° . Si misura la temperatura dell'oggetto dopo 10 minuti e si rileva che vale 112° ; quanto vale k ? quale sarà la temperatura dopo 20 minuti?

97. Studiando la carica di un condensatore, si trova la seguente legge:

$$q = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}),$$

dove E è la tensione applicata al condensatore, misurata in volt, mentre q indica la quantità di carica che si accumula nel condensatore al passare del tempo t ; q è misurata in microcoulomb e t in millisecondi.

Si applica al condensatore una tensione $E = 20\text{V}$; tracciare il grafico della legge indicata rappresentando sull'asse delle ascisse il tempo t e sull'asse delle ordinate la carica q . Qual'è la carica massima che si può accumulare nel condensatore?

98. Studiando il passaggio di corrente in un solenoide, si trova la seguente legge:

$$i = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}),$$

dove E è la tensione applicata al solenoide, misurata in volt, mentre i indica l'intensità di corrente che attraversa il solenoide al passare del tempo t ; i è misurata in milliampère, t è misurato in millisecondi.

Quale tensione bisogna applicare per avere una corrente $i = 10$, dopo un tempo $t = 2$?

99. La resistività r di un semiconduttore varia al variare della temperatura assoluta T , secondo la legge

$$r = Ae^{\frac{B}{T}},$$

dove r è misurata in ohm per metro e T è misurata in gradi Kelvin.

Relativamente a un certo campione di silicio si sono rilevati i valori seguenti:

$$- T = 273, r = 1,8;$$

$$- T = 293, r = 0,6.$$

Calcolare il valore dei coefficienti A e B .

Prevedere la resistività r quando risulta $T = 353$.

3. Parte terza

Esercizi

Progressioni aritmetiche

Gli esercizi dall'1 al 33 conducono ad impadronirsi delle progressioni aritmetiche.

Per svolgere gli esercizi, tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 1.

1. Trovare il 6° termine di una progressione aritmetica di cui i primi tre termini sono
 $-7 \quad -3 \quad +1$.
Confrontare il risultato ottenuto facilmente, in modo diretto, con il risultato che si ha valendosi della formula esposta nel paragrafo 1, dopo aver determinato la ragione d .
2. Determinare, in base alla formula, il 20° termine della progressione
 $0,5 \quad 2 \quad 3,5 \quad 5 \dots$
3. Verificare che i numeri delle seguenti successioni sono in progressione aritmetica, e, per ogni caso, determinare la ragione:
a) $0,2 \quad 0,6 \quad 0,1 \dots$
b) $\frac{4}{5} \quad \frac{11}{10} \quad \frac{7}{5} \dots$
c) $-\frac{2}{3} \quad -\frac{5}{3} \quad -\frac{8}{3} \dots$
4. Calcolare il termine a_n conoscendo:
a) $a_1=5, \quad d=2, \quad n=20$ b) $a_1=8, \quad d=\frac{1}{2}, \quad n=18$ c) $a_1=10, \quad d=-6, \quad n=12$
5. Calcolare il termine a_1 sapendo che:
a) $a_{20}=100, \quad d=3$ b) $a_{16}=8, \quad d=-2$ c) $a_{15}=-10, \quad d=4$ d) $a_8=-5, \quad d=-10$
6. Determinare la ragione d conoscendo:
a) $a_1=1, \quad a_{13}=25$ b) $a_1=2, \quad a_9=7$ c) $a_1=-20, \quad a_{21}=40$
d) $a_1=\frac{1}{2}, \quad a_8=\frac{9}{4}$ e) $a_1=-2, \quad a_{13}=36$ f) $a_1=-10, \quad a_{21}=-40$
7. Determinare n sapendo:
a) $a_1=4, \quad a_n=8, \quad d=2$ b) $a_1=-10, \quad a_n=10, \quad d=5$ c) $a_1=7, \quad a_n=-20, \quad d=-3$
d) $a_1=5, \quad a_n=55, \quad d=5$ e) $a_1=7, \quad a_n=77, \quad d=7$ f) $a_1=20, \quad a_n=100, \quad d=8$
8. Determinare il termine indicato nei seguenti casi, dopo aver calcolato il valore di a_1 :
a) a_{20} sapendo che $a_3=5, \quad d=4$ b) a_{18} sapendo che $a_{10}=6, \quad d=2$
c) a_{12} » » $a_6=2, \quad d=-6$ d) a_7 » » $a_3=2, \quad d=\frac{4}{5}$
e) a_9 » » $a_6=-3, \quad d=\frac{1}{2}$ f) a_{10} » » $a_4=6, \quad d=8$
9. Determinare S_n nei seguenti casi:
a) $a_1=2, \quad a_5=10$ b) $a_1=3, \quad a_{15}=20$ c) $a_1=-2, \quad a_{10}=8$
d) $a_1=-\frac{1}{4}, \quad a_8=-9$ e) $a_1=\frac{1}{2}, \quad a_{12}=\frac{9}{5}$ f) $a_1=\frac{3}{2}, \quad a_7=5$
10. Determinare la somma S_{20} dei primi 20 numeri naturali, la somma S_{40} dei primi 40 numeri naturali, e la somma S_{60} dei primi 60 numeri naturali.
Osservazioni.

11. Determinare la somma dei primi n numeri dispari e la somma dei primi n numeri pari. Risultano uguali queste due somme?
12. Riferirsi all'esercizio precedente. Verificare, in base alla formula, che la somma di un numero qualunque n di numeri dispari, a partire da 1, è data dal quadrato del numero n . Spiegare anche come si può interpretare questa proprietà valendosi dei *numeri figurati di Pitagora* (fig. 1).

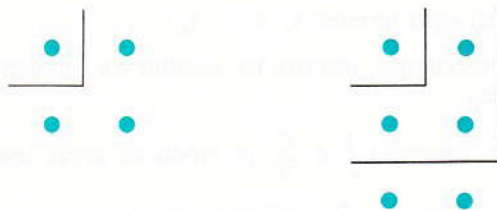


Fig. 1

13. Determinare a_n conoscendo:
 a) $a_1=4$ $n=8$ $S_n=96$ b) $a_1=7$ $n=10$ $S_n=200$ c) $a_1=-2$ $n=14$ $S_n=280$
14. Determinare a_1 sapendo che
 $a_5=\frac{3}{10}$ e $S_5=1$.
15. Determinare a_{16} sapendo che
 $a_1=2,2$ e $S_{16}=20$.
16. Determinare n sapendo:
 a) $a_1=3$ $a_n=21$ $S_n=60$ b) $a_1=5$ $a_n=37$ $S_n=168$ c) $a_1=-3$ $a_n=63$ $S_n=600$
17. Calcolare a_1 e a_n nei seguenti casi, dopo avere espresso a_n in funzione di a_1 :
 a) $d=2$, $n=10$, $S_n=110$ b) $d=-4$, $n=24$, $S_n=144$ c) $d=\frac{1}{2}$, $n=20$, $S_n=150$

Quando la progressione ha un piccolo numero di termini conviene mettere in evidenza il termine di mezzo o i due termini di mezzo; per esempio, una progressione di 3 termini si scriverà così

$$a-d \quad a \quad a+d,$$

e una di 4 termini si scriverà così

$$a-2d \quad a-d \quad a+d \quad a+2d.$$

Basandosi sui suggerimenti precedenti, si risolvano i seguenti quesiti:

18. La somma di tre termini di una progressione aritmetica è 90, e il 1° termine è 20. Determinare gli altri due termini e la ragione.
19. La somma di 5 termini di una progressione aritmetica è 200, e il 5° termine è 40. Scrivere i termini della progressione.
20. La somma di 4 termini in progressione aritmetica è 80, e il prodotto dei termini estremi è 336. Determinare i quattro numeri.
21. Determinare i termini di una progressione aritmetica sapendo che la ragione è uguale a 4 e il prodotto di due termini consecutivi è 780.
22. Determinare il valore di 4 numeri che formano una progressione aritmetica sapendo che la somma dei primi due è 60 e il prodotto degli altri due è 75.
23. In un triangolo rettangolo i tre angoli sono in progressione aritmetica. Determinare l'ampiezza degli angoli.
24. In un triangolo rettangolo di area uguale a 96 i tre lati sono in progressione aritmetica. Determinare la lunghezza dei tre lati.
25. In una progressione aritmetica di 8 termini la somma del 3° e del 6° è 174, e il prodotto dei due termini centrali è 7448. Determinare a_1 e la ragione.

26. Per inserire fra due numeri dati a, b (con $a < b$) k numeri $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ in modo che i termini
 $a, x_1, x_2, \dots, x_k, b$
 formino una progressione aritmetica, occorre prima di tutto determinare la ragione d .
 (A questo scopo basta valersi della formula

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

 ponendo

$$a_1 = a, \quad a_n = b, \quad n-1 = \dots$$

 Scrivere poi l'espressione di ogni termine x_1, x_2, \dots, x_k)
27. Riferendosi all'esercizio precedente, inserire tre termini fra i numeri 1 e 10 in modo che formino una progressione aritmetica.
28. Inserire cinque termini fra i numeri $\frac{1}{2}$ e $\frac{37}{50}$ in modo da avere una progressione aritmetica.
29. Inserire quattro termini fra i numeri 20 e 60 in modo da avere una progressione aritmetica.
30. Inserire otto termini fra 7 e 34 in modo da avere una progressione aritmetica.
31. Si dice che più numeri sono in progressione armonica se i loro inversi sono in progressione aritmetica.
 Verificare che i numeri $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ sono in progressione armonica.
 Verificare che il termine di mezzo è l'inverso della media aritmetica degli inversi degli altri due termini (*media armonica*).
32. Scrivere cinque numeri in progressione armonica.
 Calcolare poi la loro media armonica.
33. Determinare il 2° termine di una progressione armonica sapendo che il 1° termine è $\frac{1}{5}$ e il 3° è $\frac{1}{8}$.

Progressioni geometriche

Gli esercizi dal 34 al 68 conducono ad impadronirsi delle progressioni geometriche.

Per svolgere gli esercizi tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 2.

34. Verificare che i numeri delle seguenti successioni sono in progressione geometrica e, per ogni caso, determinare la ragione:
- a) 3 12 48 ... b) 5 2,5 $\frac{5}{4}$... c) $-\frac{2}{3}$ $-\frac{4}{9}$ $-\frac{8}{27}$...
- d) $-\frac{7}{8}$ $\frac{7}{6}$ $-\frac{14}{9}$... e) $\frac{3}{10}$ $-\frac{4}{5}$ $\frac{32}{15}$... f) 2 $2\sqrt{2}$ 4 ...
35. Trovare il 5° termine, a_5 , di una progressione geometrica di cui i primi tre termini sono
 2 4,5 10,125.
 Scrivere poi i primi tre termini di una progressione geometrica di cui il 1° termine è sempre il numero 2, e la ragione è doppia del caso ora visto. Si chiede: il 5° termine risulterà doppio di quello ottenuto prima?
36. Determinare il 12° termine della progressione geometrica di cui i primi tre termini sono
 1 0,4 $\frac{4}{25}$.
37. Determinare il termine a_n conoscendo:
- a) $a_1=3, \quad q=2, \quad n=10,$ b) $a_1=7, \quad q=\frac{1}{2}, \quad n=20$ [1536] [0,109375]
 c) $a_1=10, \quad q=-2, \quad n=12,$ d) $a_1=-5, \quad q=2, \quad n=13$ [-5120] [-20480]

38. Determinare la ragione e il termine incognito x conoscendo il 1° termine e il 3° nei seguenti casi:
 a) 5 x 125, b) 7 x 294
39. Determinare la ragione conoscendo il 1° termine e il 4° nei seguenti casi:
 a) $a_1=8$, $a_4=125$ b) $a_1=216$, $a_4=\frac{1}{729}$ $\left[q=\frac{5}{2}\right]$ $\left[q=\frac{9}{2}\right]$
40. Determinare il termine richiesto nei seguenti casi:
 a) $a_4=64$, $q=\frac{1}{2}$, $a_7=\dots$ b) $a_6=16$, $q=\frac{3}{2}$, $a_{10}=\dots$ c) $a_4=64$, $q=\frac{1}{2}$, $a_7=\dots$
 d) $a_2=20$, $q=4$, $a_5=\dots$ e) $a_8=9$, $q=\frac{1}{3}$, $a_5=\dots$ f) $a_5=\frac{9}{125}$, $q=\frac{3}{5}$, $a_2=\dots$
41. Calcolare il valore di x per cui i tre numeri, scritti nell'ordine indicato, formano una progressione geometrica:
 $x+1$ $x+2$ $x+3$ $\left[x=\frac{1}{2}\right]$
42. Calcolare il valore di x per cui i tre numeri, scritti nell'ordine indicato, formano una progressione geometrica:
 x $5x+1$ $9x$ $\left[x=-\frac{1}{8}; x=-\frac{1}{2}\right]$
43. Quale numero si deve aggiungere ai numeri 3, 24, 94 per ottenere tre termini consecutivi di una progressione geometrica?
 $[-270]$
44. Trovare tre numeri in progressione geometrica conoscendo la loro somma (463) e il loro prodotto (1728).
 $[3, 12, 48]$
45. Trovare tre numeri in progressione geometrica conoscendo la loro somma (65) e il loro prodotto (3375).
 $[5, 15, 45]$
46. La somma di tre numeri in progressione geometrica è 474 e il prodotto del 1° e del 3° numero è 196. Determinare i tre numeri.
 $\left[6, 14, \frac{98}{3}\right]$
47. Tre numeri a, b, c sono in progressione geometrica. Si sa che:
 $a+c=5b-12$ e $abc=4096$.
 Determinare questi numeri.
 $[4, 16, 64]$
48. Quattro numeri a, b, c, d sono in progressione geometrica. Si sa che:
 $abcd=729$ e $c-b=6$.
 Determinare i quattro numeri.
 Si ottengono due progressioni; come risultano le due ragioni?
 $[1, 3, 9, 27; -27, -9, -3, -1]$
49. In una progressione geometrica di quattro termini si sa che la somma del 1° e del 2° termine è uguale a un numero noto h , e che la somma del 3° e del 4° termine è uguale a un altro numero noto k . Determinare la ragione q e il 1° termine.
 (Conviene indicare i quattro termini con a, aq, aq^2, aq^3)
50. Per inserire fra due numeri dati a, b un certo numero k di medi geometrici $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, occorre trovare dei numeri che formino con i termini estremi a e b una progressione geometrica. La progressione avrà $k+2$ termini, e cioè il termine estremo b corrisponde al $(k+2)^{\text{mo}}$ numero. Ci si vale allora della formula $a_n=a_1q^{n-1}$, ponendo $a_1=a$, $a_n=b$, e $n-1=k+1$. Scrivere l'espressione di x_1, x_2 , e del termine generico x_k .
51. Riferendosi all'esercizio precedente inserire tre termini fra 1 e 16 in modo da avere una progressione geometrica.
 (Conviene determinare prima la ragione q)
 $[2, 4, 8]$

52. Inserire quattro medi geometrici fra $\frac{1}{3}$ e 81. [1, 3, 9, 27]
53. Inserire cinque medi geometrici fra 2 e 128.
54. Inserire due medi geometrici fra $\frac{1}{125}$ e 729.
55. Calcolare la somma S delle seguenti progressioni geometriche finite:
- a) $1 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{16}$ b) $-1 \quad \frac{1}{5} \quad -\frac{1}{25}$ c) $2 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{2}{27}$
- d) $5 \quad \frac{4}{5} \quad \frac{16}{125} \quad \frac{64}{125}$ e) $0,1 \quad 0,01 \quad 0,001 \quad 0,0001$ f) $0,25 \quad \frac{3}{4} \quad 2,25 \quad \frac{27}{4}$
56. Determinare la somma S_n dei primi n numeri naturali nei seguenti casi:
 $n=1$; $n=2$; $n=4$; $n=5$; $n=6$.
 Che cosa si osserva sulle differenze fra una somma e la precedente? e sulle differenze delle differenze?
57. Calcolare la somma S delle seguenti progressioni geometriche finite:
- a) $1 \quad r \quad r^2 \quad r^3 \quad r^4$ b) $r \quad r^2 \quad r^3 \quad r^4$ c) $1 \quad \frac{1}{r} \quad \frac{1}{r^2} \quad \frac{1}{r^4}$
- d) $\frac{1}{r} \quad \frac{1}{r^2} \quad \frac{1}{r^3} \quad \frac{1}{r^4}$ e) $r^2 \quad r^4 \quad r^8 \quad r^{16}$ f) $\frac{1}{r^2} \quad \frac{1}{r^4} \quad \frac{1}{r^8} \quad \frac{1}{r^{16}}$
58. Considerare quattro termini consecutivi di una progressione geometrica ed individuarli con a, b, c, d . Verificare che fra il prodotto P dei quattro termini, la loro somma S e la somma \bar{S} degli inversi passa la relazione:
 $P^2 \cdot \bar{S}^4 = S^4$.
 Portare un esempio numerico.
 Questa proprietà sarà valida anche per un numero qualunque n di termini?
59. Determinare la somma delle progressioni geometriche illimitate
- a) $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots$ b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$
- c) $5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots$ d) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$
60. Per ottenere la frazione generatrice di un numero decimale periodico si può procedere così:
 - scrivere il numero come somma S degli infiniti termini di una progressione con $r < 1$;
 - calcolare la somma S che indicherà, appunto, la frazione generatrice.
 Determinare la frazione generatrice dei seguenti numeri decimali.
 a) $0,(6) \quad 0,(54) \quad 0,(32) \quad 0,(38)$ b) $1,(34) \quad 3,(56) \quad 70,(3) \quad 813,(5)$
 Scrivere la regola generale per determinare la frazione generatrice.
61. Una formica F vuole raggiungere una crosta di pane P che si trova a 1 metro di distanza (fig. 2).

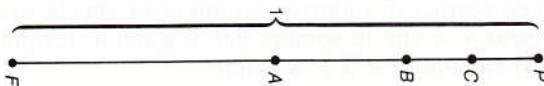


Fig. 2

La formica deve percorrere prima il tratto FA , metà del tratto FP , e cioè, in metri, la lunghezza $\frac{1}{2}$; poi deve percorrere il tratto AB , metà del tratto AP e portarsi così in B ; poi la metà del tratto BP , e così via.

Indicare la somma delle lunghezze che la formica deve percorrere successivamente. La formica arriverà mai in P ?

Confrontate questo problema con quello classico proposto da Zenone su "Achille e la tartaruga" (vedi Introduzione storica).

62. Riferirsi alla fig. 3. Scegliere uguale ad 1 la lunghezza del lato del quadrato grande Q . Calcolare l'area dei seguenti quadrati:

Q_1 , ottenuto congiungendo i punti medi dei lati di Q ,
 Q_2 , » » » » » » » » Q_1 ,
 Q_3 , » » » » » » » » Q_2

 Determinare poi la somma delle aree di questi quadrati pensando di continuare indefinitamente il processo.

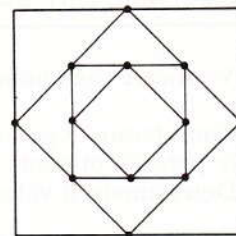


Fig. 3

63. Riferirsi all'esercizio precedente. Determinare la somma dei perimetri dei successivi quadrati prima costruiti.
64. Riferirsi all'esercizio 62. Inscrivere nel quadrato Q un cerchio, poi in questo cerchio un quadrato avente per vertici i punti medi di Q , e così via. Calcolare la somma delle aree degli infiniti cerchi che si ottengono con questo procedimento.
65. Riferirsi alla fig. 4. Si disegna un angolo di 60° ; su uno dei suoi lati si considera un punto P che ha dal vertice la distanza a ; da P si conduce la perpendicolare PQ all'altro lato dell'angolo. Da Q si conduce la perpendicolare QR al primo lato. Da R la perpendicolare RS al secondo lato. Pensando di continuare indefinitamente questa costruzione, determinare la somma delle lunghezze delle infinite perpendicolari.

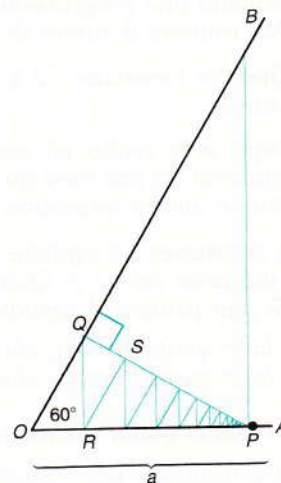


Fig. 4

66. Nel cerchio inscritto in un triangolo equilatero di lato $2a$ (fig. 5) inscrivere un nuovo triangolo equilatero, e immaginare di ripetere la costruzione. Determinare la somma delle aree dei successivi triangoli equilateri.

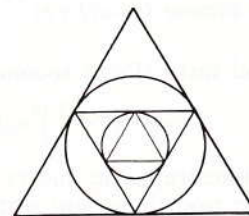


Fig. 5

67. Riferirsi all'esercizio precedente. Determinare la somma delle aree dei successivi cerchi.
68. Riferirsi alla fig. 6. $ABCD$ è un quadrato di centro O ; le diagonali sono AC , BD e le mediane EG , FH . Dal punto F condurre la perpendicolare FI a BO ; da I la perpendicolare IK a GO ; da K la perpendicolare KL a CO , e così via. Si ottiene un poligono a spirale. Dimostrare che i triangoli AFO , FIO , IKO , ... sono simili. Determinare il rapporto delle aree di due triangoli consecutivi come AFO , FIO . Si scopre che questi rapporti hanno tutti lo stesso valore; dunque le aree formano una progressione geometrica. Determinare l'area del poligono spirale come somma di...

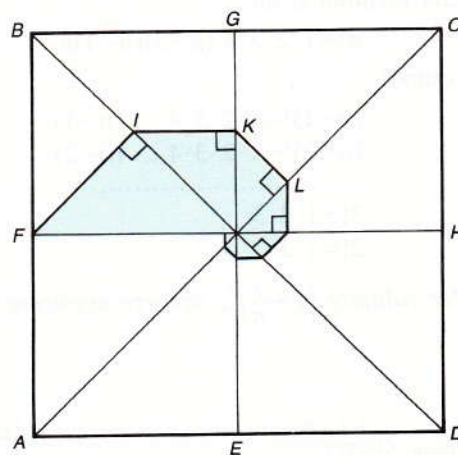


Fig. 6

Esercizi vari sulle progressioni

69. Verificare che i numeri $-12; -8; -4; 0; 4; 8; 12$, formano una progressione aritmetica, di ragione r . Considerare le potenze che hanno come base 10 e come esponenti i numeri dati. Dimostrare che le potenze ottenute formano una progressione geometrica, di ragione r' . Determinare il valore di r e di r' .
70. Ripetere l'esercizio 69, a partire dai numeri $-4; -2; -4; 0; 4; 8; 12$ e dalle potenze che hanno per base e e per esponenti questi numeri.
71. Dopo aver svolto i due esercizi precedenti, dimostrare la seguente proprietà generale: calcolando le potenze che hanno per base un qualunque numero reale positivo b e per esponente i termini di una progressione aritmetica di ragione r , si ottiene una progressione geometrica di ragione b^r .
72. Verificare che i numeri $5; 10; 15; 20; 25; 30; 35$ formano una progressione geometrica di ragione r . Considerare i logaritmi decimali dei numeri assegnati. Dimostrare che i numeri ottenuti formano una progressione aritmetica di ragione r' . Determinare il valore di r e di r' .
73. Ripetere l'esercizio 72 a partire dai numeri $3; 6; 9; 12; 15; 18; 24$, di cui si valutano i logaritmi naturali.
74. Dopo aver svolto gli esercizi 72 e 73 dimostrare la seguente proprietà generale: calcolando i logaritmi (in una base qualunque $b > 0$) dei termini di una progressione geometrica di ragione r , si ottiene una progressione aritmetica di ragione $\log_b r$.
75. Si costituisce un capitale C versando ogni anno una quota fissa a in una banca che offre un tasso d'interesse annuo r . Quanto vale il capitale C dopo n anni?
(Si può pensare il capitale C costituito addizionando i seguenti contributi:
- la 1^a quota versata, che resta depositata n anni e diventa $a(1+r)^n$,
 - la 2^a quota versata, che resta depositata $n-1$ anni e diventa $a(1+r)^{n-1}$,
 -
 - l'ultima quota versata, che resta depositata 1 anno e diventa $a(1+r)$.
- In definitiva si deve calcolare la somma dei primi n termini di una progressione geometrica che ha come primo termine $a(1+r)$ e ragione $(1+r)$.
Si ottiene $C = a(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}$
76. Nel testo (Parte seconda, paragrafo 2) si è detto che, per qualunque valore di n risulta

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Dimostrare che questa affermazione è vera, basandosi sulla formula per la potenza del binomio, che riportiamo qui sotto¹:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n!}{(n-1)!1!} a^{n-1}b + \frac{n!}{(n-2)!2!} a^{n-2}b^2 + \frac{n!}{(n-3)!3!} a^{n-3}b^3 \dots + b^n;$$

nella formula si ha:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (n-2)(n-1)n,$$

e quindi

$$(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots (n-1)$$

$$(n-2)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots (n-2)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$2! = 1 \cdot 2$$

(Per valutare $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, occorre applicare la formula indicata, considerando $a=1$ e $b=\frac{1}{n}$).

¹ La dimostrazione della formula per la potenza del binomio si trova nel testo *La matematica nella realtà* vol. 2, pagg. 513-517.

Si debbono dunque addizionare i seguenti termini:

$$\begin{aligned}
 1^n &= 1, \\
 \frac{n!}{(n-1)!1!} 1^{n-1} \frac{1}{n} &= \frac{n!}{(n-1)!n} = 1, \\
 \frac{n!}{(n-2)!2!} 1^{n-2} \frac{1}{n^2} &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{2!} < \frac{1}{2!}, \\
 \frac{n!}{(n-3)!3!} 1^{n-3} \frac{1}{n^3} &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{3!} < \frac{1}{3!}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \left(\frac{1}{n}\right)^n &= \frac{1}{n^n}.
 \end{aligned}$$

In definitiva si ottiene

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n^n}.$$

Così risulta ovvio che $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$.

Inoltre risulta

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

dato che si ha

$$\begin{aligned}
 3! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 > 1 \cdot 2 \cdot 2 = 2^2, \\
 4! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 > 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

$$\text{Ora } \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = S_n$$

è la somma dei primi n termini della progressione geometrica, che ha 1 come primo termine e ragione..., perciò si ha

$$S_n = \dots \quad e \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + S_n < 3$$