2
Le coniche

Parte prima
Le coniche e la loro equazione comune

Parte seconda
La parabola

Parte terza
L'ellisse

Parte quarta
L'iperbole

Le coniche nel tempo e nello spazio

La clessidra. *Il nome viene dal greco: "clepto-idra" significa "rubare acqua"; il cono di sotto ruba acqua a quello di sopra (fig. 1).*

Il tempo che l'acqua, o la sabbia, impiega per scendere dall'uno all'altro recipiente dà... una misura di tempo.

Dice Demostene, il famoso oratore ateniese, che in tribunale ad ogni avvocato difensore era concesso di parlare «un certo numero di clessidre», cioè di voltare una clessidra tante volte, come noi diciamo «un certo numero di minuti».

Sono stati gli Egiziani a inventare questo "orologio"? o i Caldei o i Fenici, o forse i Cinesi? Non si sa. Quello che si sa è che questo apparecchio per misurare il tempo era molto usato in Grecia.

Può essere che, avendolo sempre fra le mani, e voltandolo e poi voltandolo ancora, qualcuno abbia osservato che la superficie libera dell'acqua o della sabbia assumeva forme diverse (fig. 2).

Fig. 1. Una clessidra greca.

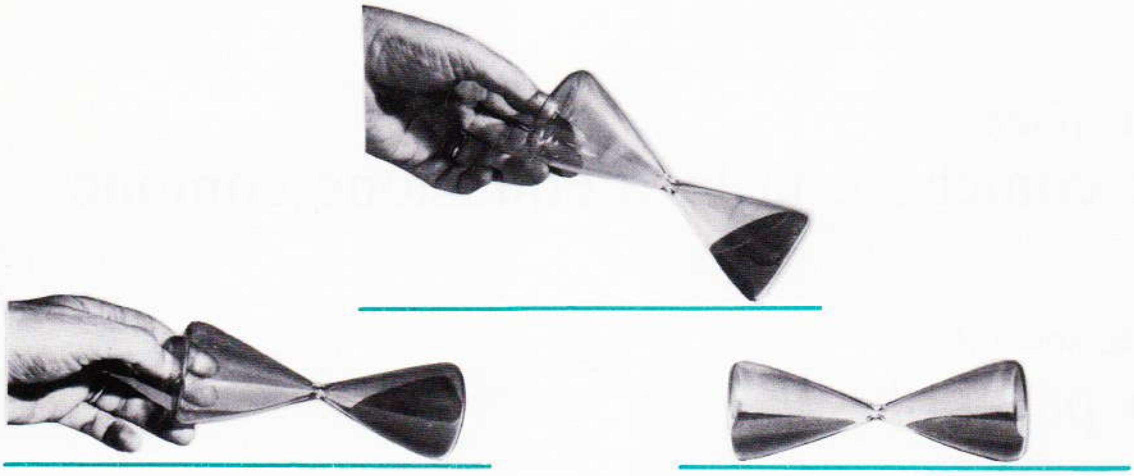


Fig. 2

Sono queste forme, e più precisamente le curve che costituiscono il bordo della superficie libera, che i Greci chiamarono ***coniche*** *per ricordare, appunto, che sono sezioni piane del cono; e, a seconda della forma, diedero loro il nome di* ***ellisse, parabola, iperbole*** *(fig. 3).*

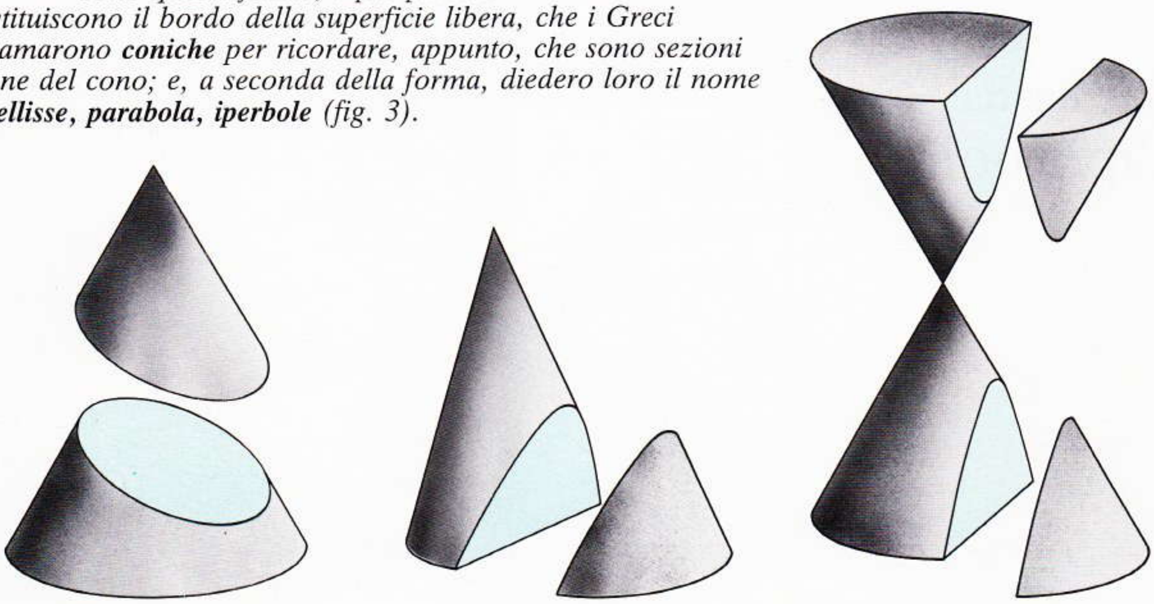


Fig. 3

Non si sa, in verità, se sia stata la clessidra a condurre all'osservazione delle coniche: la storia non riferisce niente a questo proposito. Quello che la storia ufficiale ci ha tramandato è che le coniche sono nate, in Grecia, per risolvere un problema che nulla sembra avere in comune con queste curve: **il problema della duplicazione del cubo**. *Si tratta di questo: come costruire, con gli strumenti usuali, e cioè riga e compasso, un segmento che rappresenti il lato di un cubo doppio di un cubo dato; per esempio, se il cubo dato ha spigolo uguale a 1 e quindi volume uguale a 1, si vuole costruire con esattezza lo spigolo di un cubo di volume 2. È chiaro che, se indichiamo con x lo spigolo del cubo di volume 2 (fig. 4), dovrà essere*

$x^3=2$ *da cui* $x=\sqrt[3]{2}$.

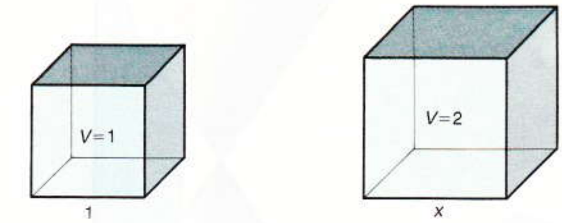


Fig. 4

Questo problema, che a noi non sembra di tanta importanza, aveva presso i Greci un valore non solo matematico ma anche... religioso; era stato infatti proposto ai matematici dell'Accademia di Atene dai sacerdoti che volevano raddoppiare un altare di forma cubica.

Ora, il problema della duplicazione del cubo – si capì parecchi secoli dopo – non è risolubile utilizzando solo riga e compasso; e il matematico greco Menecmo (IV secolo a.C.) l'aveva risolto valendosi proprio del disegno di curve "nuove": la parabola o l'iperbole. È così che le coniche fecero il loro ingresso in matematica: un ingresso un po' "in sordina", come strumento utile per risolvere il problema della duplicazione dell'altare!

Fu lo stesso Menecmo che si accorse che le curve che aveva utilizzato si potevano ottenere come sezioni di un cono; e precisamente si poteva avere la parabola tagliando un cono di apertura 90° con un piano perpendicolare a una generatrice (fig. 5), l'ellisse tagliando un cono di apertura minore di 90° con un piano perpendicolare a una generatrice (fig. 6), e un'iperbole tagliando un cono di apertura maggiore di 90° con un piano sempre perpendicolare a una generatrice (fig. 7).

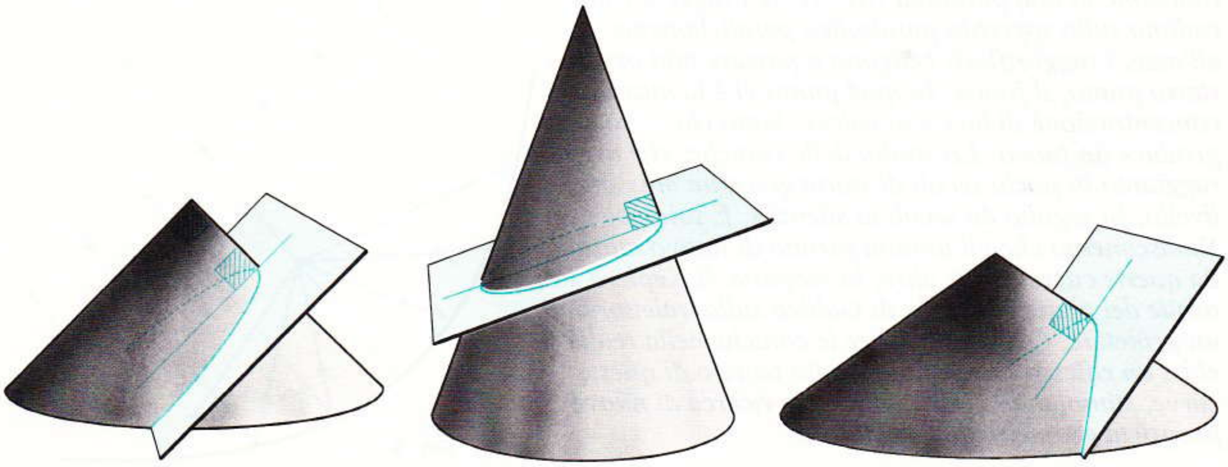


Fig. 5 Fig. 6 Fig. 7

A distanza di un secolo, alla fine del III secolo a.C., il grande matematico greco Apollonio ebbe delle coniche una visione più unitaria: non c'era bisogno di riferirsi a coni di apertura diversa; le coniche, sia la parabola che l'ellisse e l'iperbole, potevano ottenersi, tutte e tre, come sezioni di uno stesso cono con piani ad inclinazione diversa (fig. 8). Si passa per continuità da una all'altra: basta variare l'inclinazione.

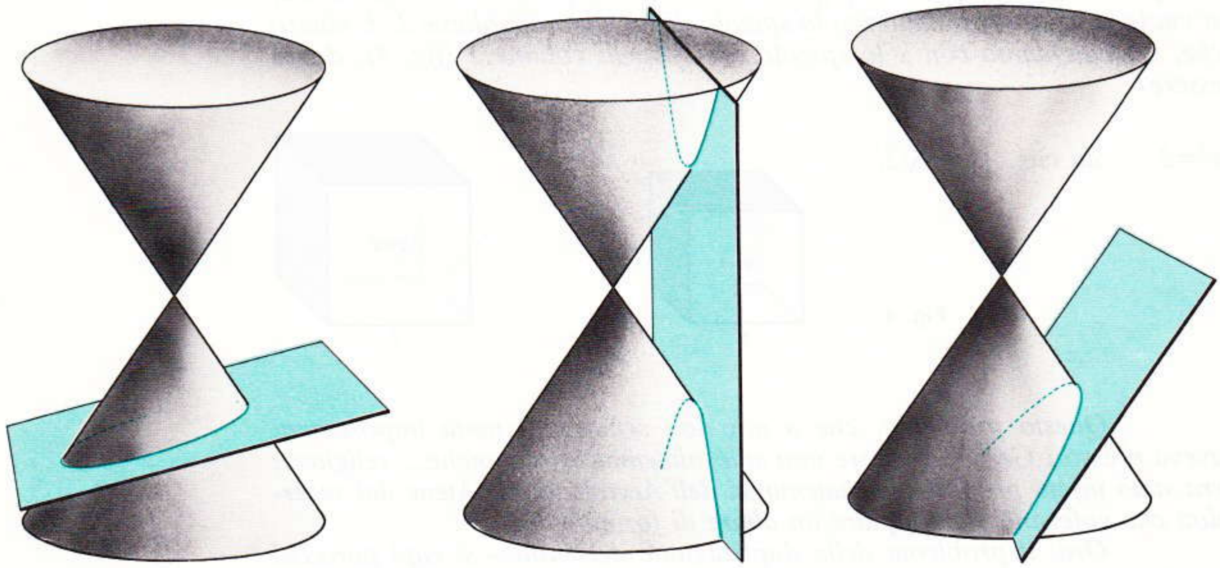


Fig. 8

Il lavoro di Apollonio è opera di un grande matematico: lo studio delle coniche appare, ancora una volta, come motivato da un'indagine teorica piuttosto che da un'osservazione della realtà. Mentre la realtà, indipendentemente dalla clessidra, era lì, pronta a mostrarcele: la curva che si vede più spesso, infatti, è un'ellisse perché, quando osserviamo un cerchio, ci appare, in generale, con la forma di ellisse; e anche la parabola era lì, " a portata di mano": basta lanciare un sasso per vedere delinearsi la sua traiettoria che è, appunto, una parabola.

Al genio di Archimede, contemporaneo di Apollonio, non sfuggì quella proprietà della parabola che ne doveva fare poi, ai tempi nostri, uno strumento fondamentale per la trasmissione e la ricezione delle onde: lo specchio, ideato da Archimede al fine di incendiare le navi romane che avanzavano verso il porto di Siracusa, non era altro che un paraboloide, cioè la superficie che si ottiene dalla rotazione di una parabola (fig. 9); se i raggi del sole cadono sullo specchio parabolico parallelamente all'asse, i raggi riflessi vengono a passare tutti per uno stesso punto, il fuoco. In quel punto vi è la massima concentrazione di luce e di calore, tanto che.... si produce un fuoco. Lo studio delle coniche, che aveva raggiunto in pochi secoli di storia greca un altissimo livello, fu seguito da secoli di silenzio. È solo col Rinascimento che gli uomini furono di nuovo attirati da queste curve: fra le altre, la scoperta di Keplero sulle orbite dei pianeti e quella di Galileo sulla traiettoria di un proiettile. Questo ritrovare le coniche nella realtà ebbe un riflesso anche sullo studio teorico di queste curve, stimolando i matematici alla ricerca di nuove proprietà geometriche e analitiche.

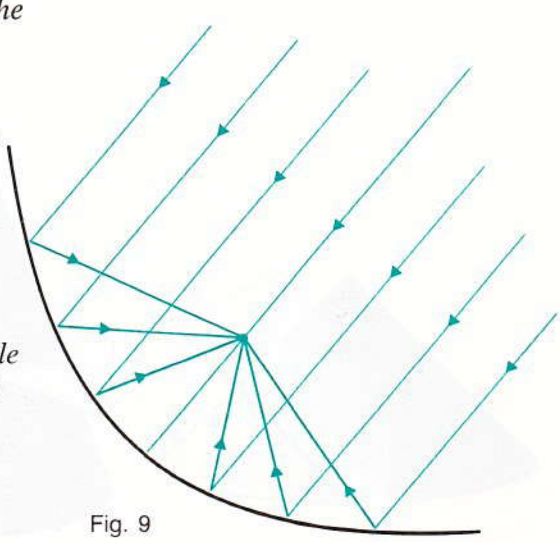


Fig. 9

2. Parte prima

Le coniche e la loro equazione comune

1. Le coniche come sezioni piane del cono

Prima di studiare le coniche da un punto di vista matematico cerchiamo di *vederle*. Le figg. 1 e 2 rappresentano la fotografia di un cilindro e di un cono. Il cilindro è realizzato con due dischi uguali di perspex che hanno al bordo dei forellini; i dischi sono tenuti ad una certa distanza per mezzo di un'asta rigida inserita nei centri, e per i forellini passa un filo elastico in modo che si hanno così delle generatrici. Per ottenere il cono a due falde, basta tenere fisso un disco e ruotare l'altro sul suo stesso piano; i fili elastici vanno a passare tutti per uno stesso punto, il vertice del cono. Occorre "staccarsi" dal modello per concepire il cono come *superficie illimitata*, senza basi: le generatrici sono perciò delle rette che passano per un punto e si appoggiano ad una circonferenza (fig. 3).

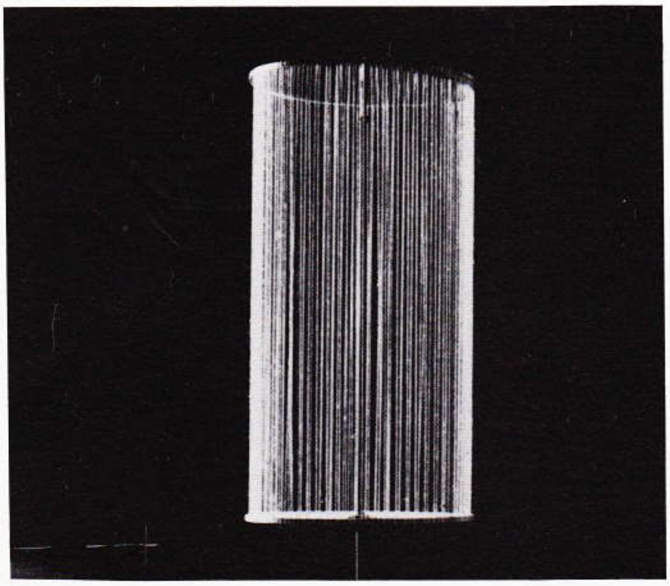


Fig. 1

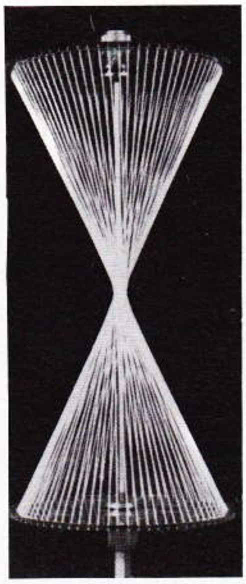


Fig. 2

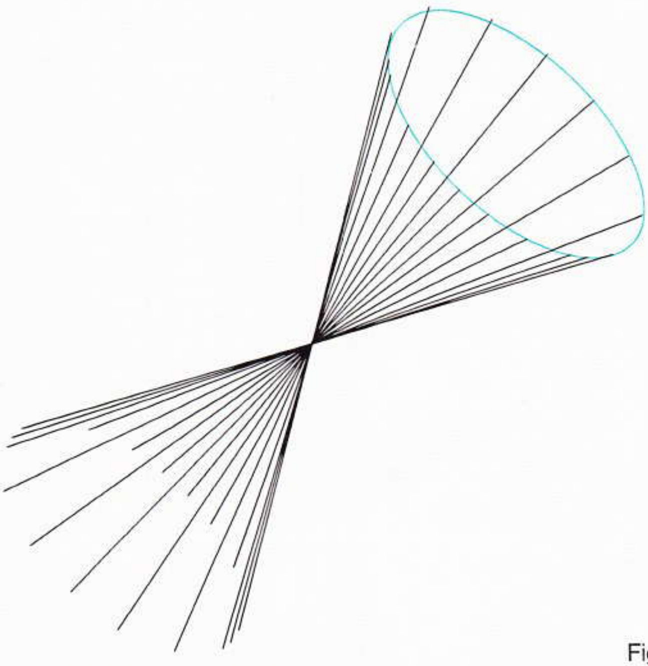


Fig. 3

Procediamo ora con un'esperimento, valendoci di un proiettore, dove al posto della diapositiva è inserita una lamina opaca con una fenditura; si realizza in tal modo un "piano di luce". Se questo piano di luce colpisce il nostro "cono di fili" si vedrà, su ogni filo, un puntino luminoso, e i punti luminosi visualizzeranno la sezione del cono con un piano (fig. 4). Si ottiene come sezione:

- un'*ellisse*, e come caso particolare un cerchio, se il piano incontra tutte le generatrici (fig. 5);
- una *parabola* se il piano è parallelo a una generatrice (fig. 6): il punto luminoso, sezione del piano con quella generatrice, "sfugge" all'infinito;
- un'*iperbole*, con i suoi due rami, se il piano di luce è parallelo a due generatrici (fig. 7): sono due, ora, i punti di luce che "sfuggono" all'infinito.

Come caso particolare si possono avere *due rette* passanti per il vertice (fig. 8).

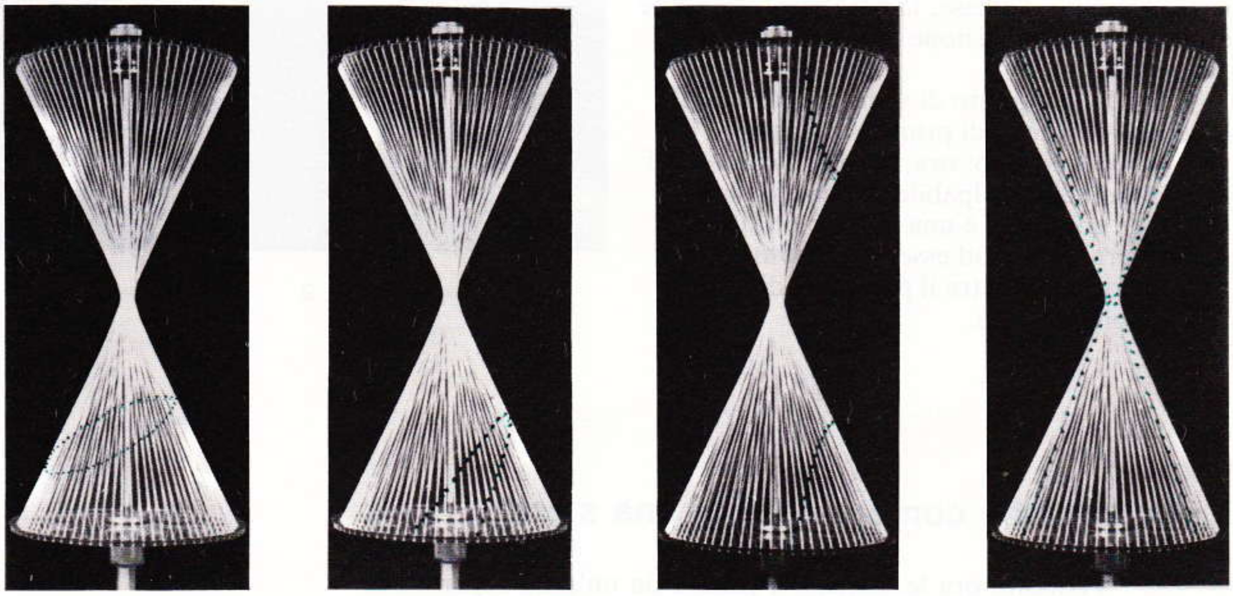


Fig. 4

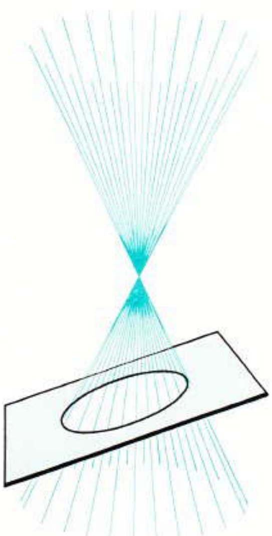


Fig. 5

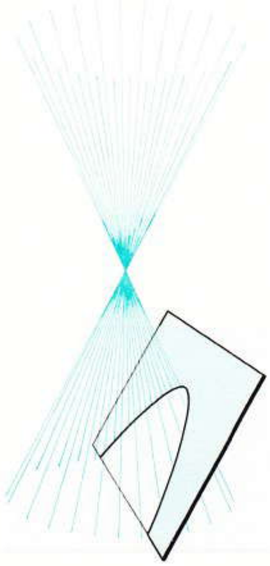


Fig. 6

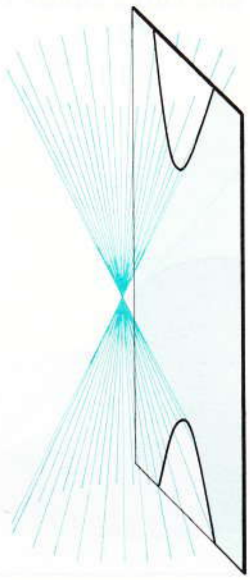


Fig. 7

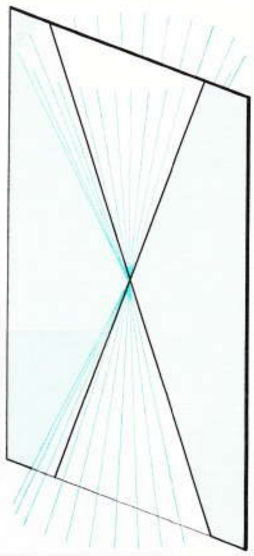


Fig. 8

Le tre curve – ellisse, parabola, iperbole – si dicono *coniche* proprio perché si ottengono come *sezioni del cono*. Al variare della posizione del piano secante varia dunque la forma della conica, e, per continuità, si passa da una curva all'altra; si capisce così che le tre coniche, pur avendo una forma ben diversa, hanno qualcosa in comune: appartengono alla stessa famiglia.

Lo stesso effetto si può ottenere con un lume a paralume cilindrico (fig. 9): i raggi di luce uscenti dalla lampadina e compresi entro i due bordi del paralume costituiscono un cono; se questo cono di luce è segato da un piano, per esempio da una parete, vediamo apparire su questa delle curve luminose che sono, appunto, l'ellisse, la parabola, l'iperbole a seconda della posizione del lume rispetto alla parete.

Da un punto di vista matematico il fenomeno è quello di prima; da un punto di vista fisico è diverso: ora, infatti, il cono è "di luce" e quindi impalpabile, mentre il piano secante è concreto, è una parete; prima, invece, era il cono ad essere concreto, formato di fili, mentre il piano era di luce, impalpabile dunque.

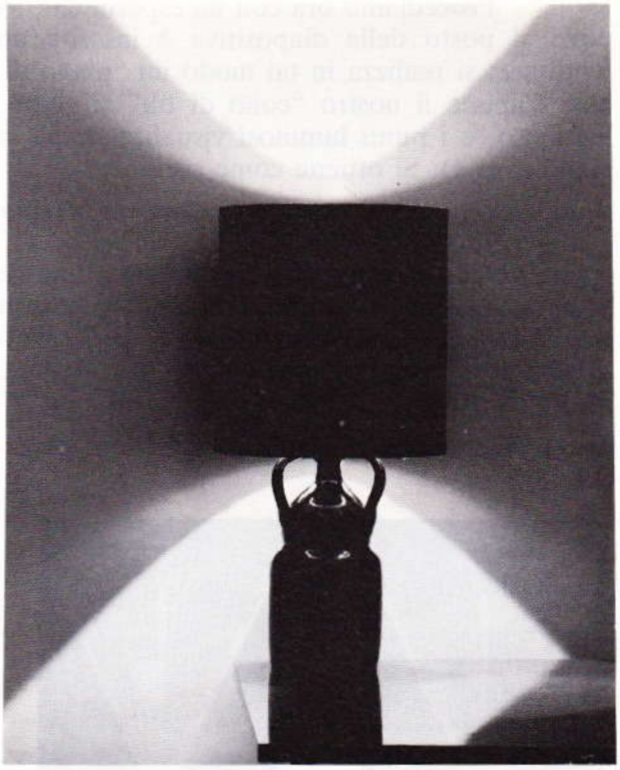


Fig. 9

2. Le coniche come ombra di una sfera

Vedremo ora le coniche a partire da un'altra esperienza.
Una palla, poggiata su un tavolo, indicato in fig. 10 con α, viene illuminata da una sorgente puntiforme S: nel caso della figura, l'ombra della palla appare come una curva chiusa compresa fra i punti A e B.

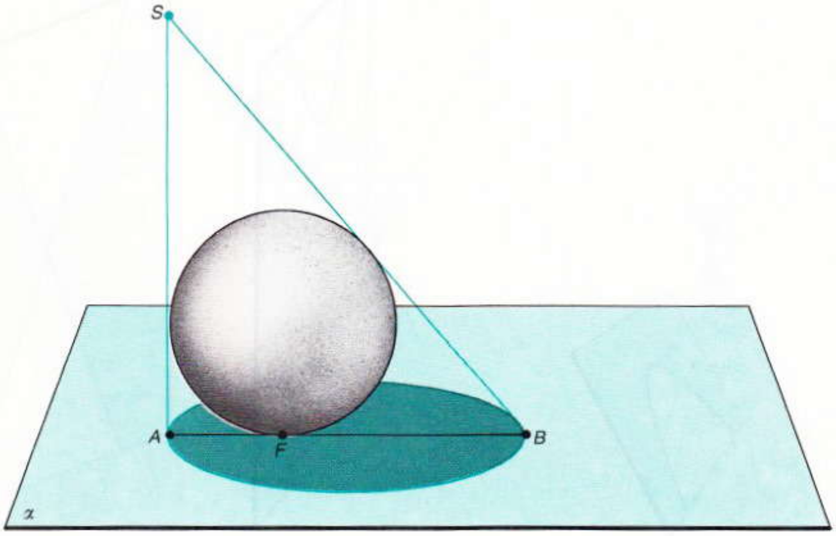


Fig. 10

Questa curva si può anche considerare come la sezione, col piano α del tavolo, del cono di vertice S che "abbraccia" la sfera lungo il cerchio di diametro HK (fig. 11).

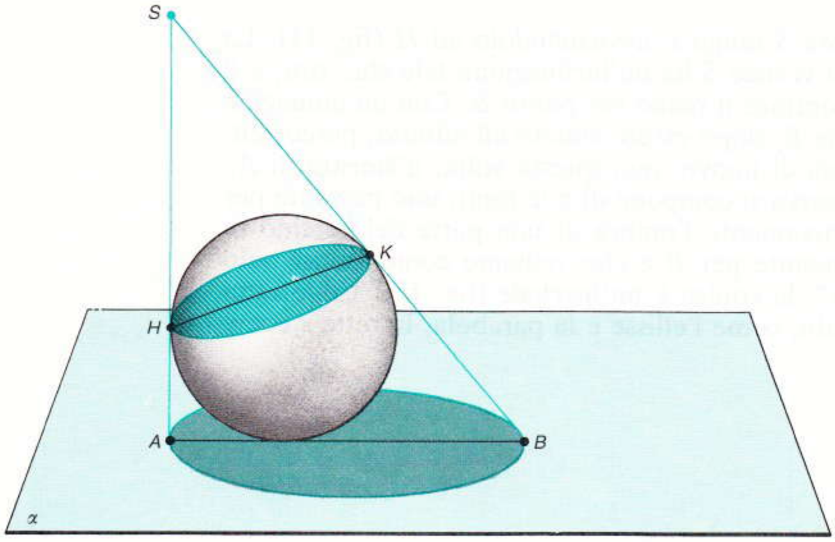


Fig. 11

La curva, essendo sezione di un cono, *è una conica*; nel caso della figura è **un'ellisse**.

Si può anche dire che *l'ellisse è l'ombra, sul piano α, del cerchio di diametro HK*; al diametro HK del cerchio corrisponde il segmento AB che, per il modo stesso con cui si proietta, viene ad essere *un asse di simmetria* dell'ellisse.

Osserviamo ora la fig. 12: la sfera, che tocca il piano α nel punto F, è sempre nella stessa posizione, ma abbiamo abbassato S lungo la retta t, tangente alla sfera in H. Sono rimasti fissi i punti H ed A, ma è cambiata la posizione di K, ed è quindi cambiata l'inclinazione del piano del cerchio rispetto al piano α. Di conseguenza è cambiata la posizione di B, ombra del punto K: B si è allontanato da A lungo la retta AF e l'ellisse-ombra "si è allungata".

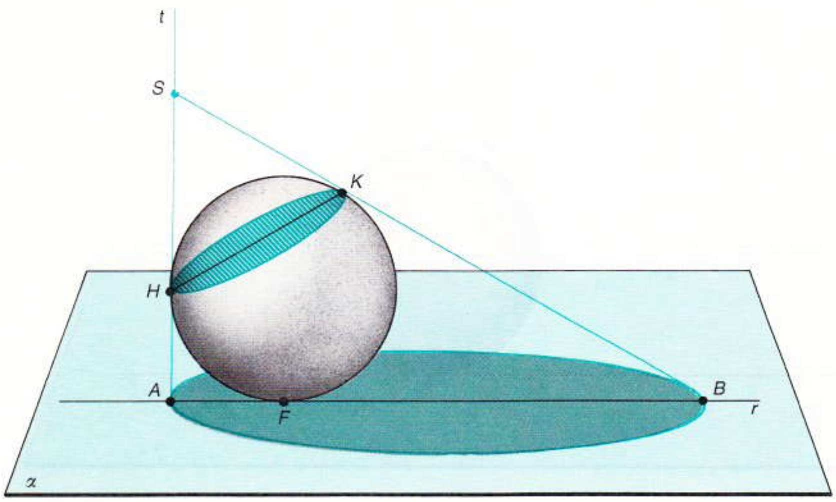


Fig. 12

Spostiamo ancora S lungo la retta t; portiamo S al livello del "polo Nord" della sfera (fig. 13), e osserviamo: il raggio di luce SK risulta ora parallelo al piano α, e quindi il punto K non ha ombra sul piano; si può immaginare che *il punto B sia andato all'infinito*: l'ellisse si è aperta e si è ottenuta **la parabola**.

Abbassiamo ancora S lungo t, avvicinandolo ad H (fig. 14). La generatrice SK del cono di vertice S ha un'inclinazione tale che, ora, è il suo prolungamento ad incontrare il piano nel punto B. Con un'immagine dinamica si può pensare che B, dopo essere andato all'infinito, percorrendo r a destra di A, compaia di nuovo, ma, questa volta, a sinistra di A.

Si capisce che la curva si compone di due rami, uno passante per A e che rappresenta effettivamente l'ombra di una parte del cerchio di diametro HK, e l'altro passante per B e che vediamo come ombra solo "con gli occhi della mente"; la conica è **un'iperbole** (fig. 15). I due rami dell'iperbole hanno entrambi, come l'ellisse e la parabola, la retta r come asse di simmetria.

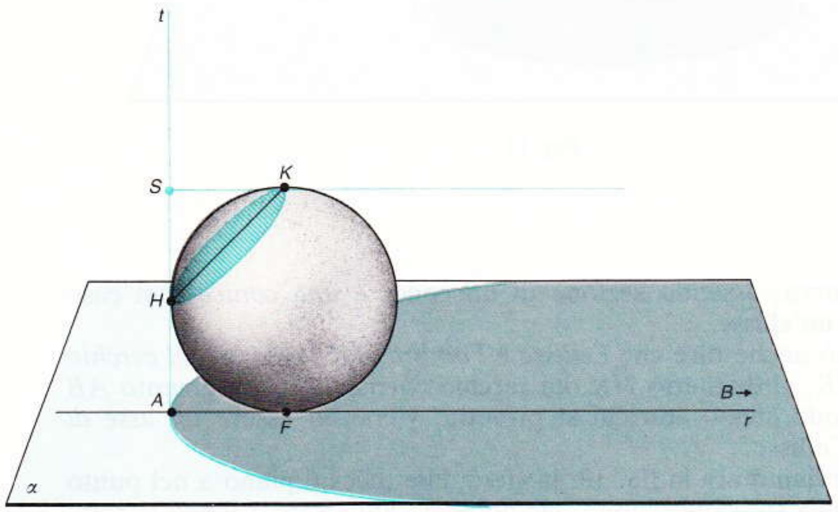


Fig. 13

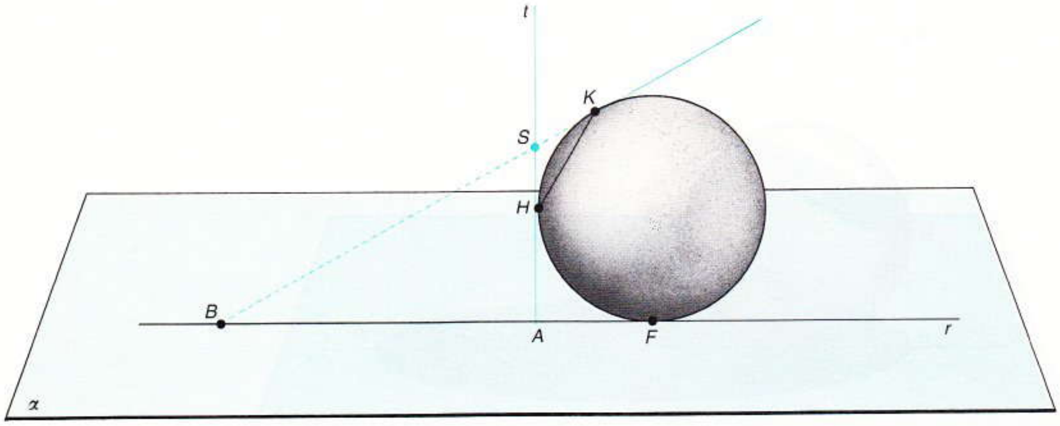


Fig. 14

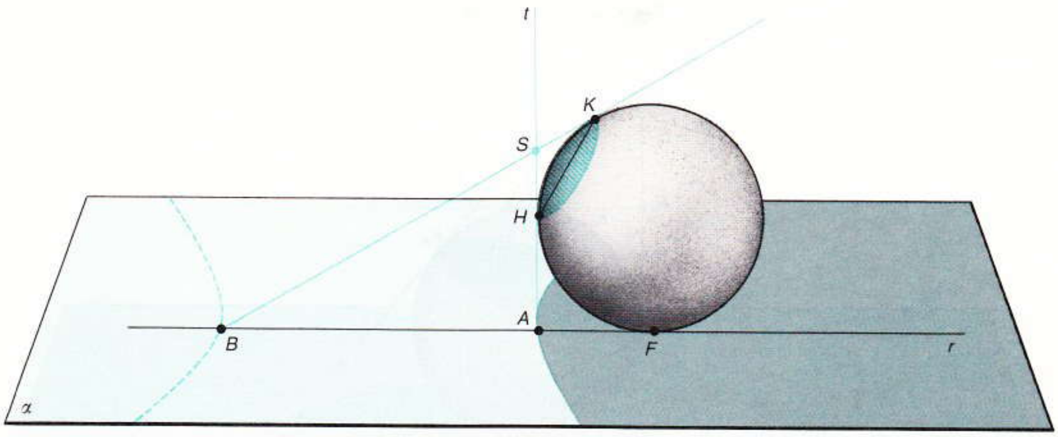


Fig. 15

Anche se B non è – come abbiamo detto – ombra del punto K, i due rami dell'iperbole possono considerarsi come proiezione da S del cerchio di diametro HK.

Abbiamo così ottenuto *le tre coniche come ombra (o proiezione) di un cerchio*.

3. La scoperta di un rapporto costante che caratterizza le coniche

Abbiamo visto che le tre coniche – ellisse, parabola, iperbole –, così diverse fra loro, si possono ottenere come ombre di una sfera su un piano. Vedremo ora che questa comune "origine" dà luogo a una proprietà comune sul piano di proiezione.

Osserviamo la fig. 16: è disegnata l'ellisse che si ottiene proiettando dal punto S il cerchio di diametro HK; F è il punto in cui la sfera tocca il piano α, d è la retta in cui il piano del cerchio incontra il piano α, e D è il punto in cui la retta HK incontra la retta AF.

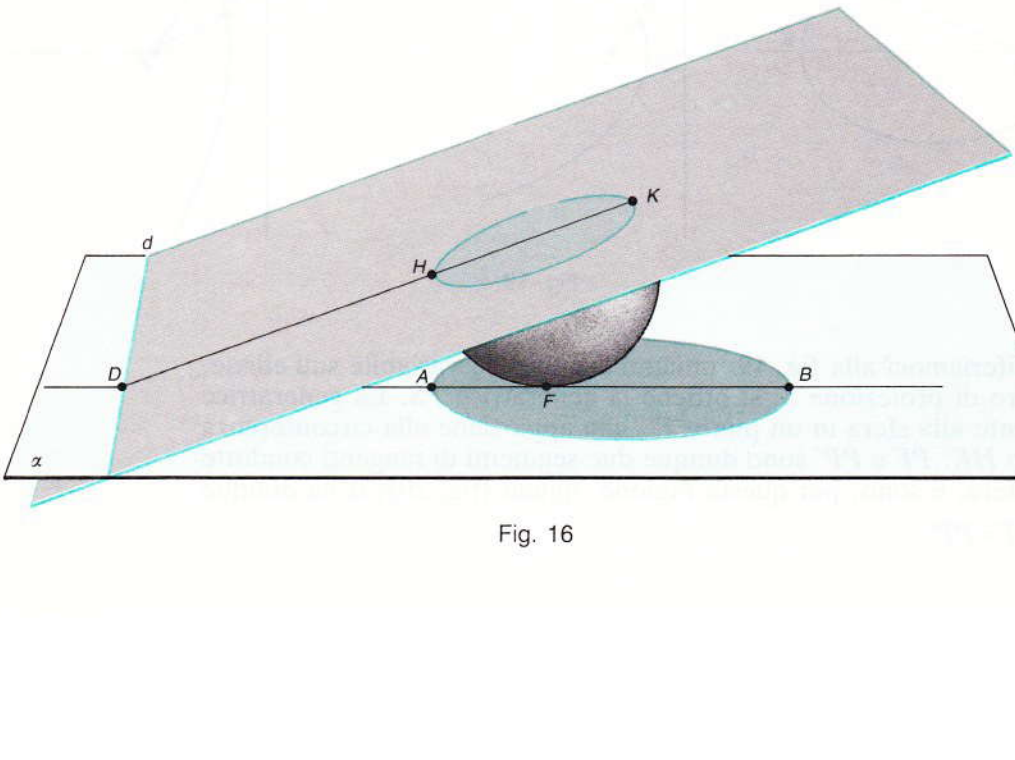


Fig. 16

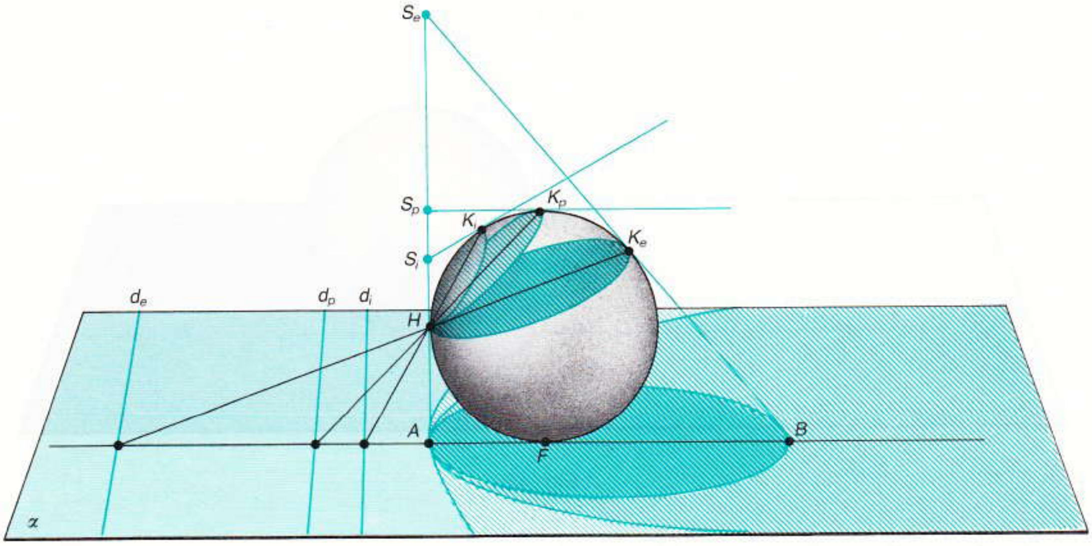


Fig. 17

È chiaro che, al variare di S sulla retta AH, varia la posizione della retta d, mentre il punto F rimane fisso (fig. 17).

Sono proprio la retta d e il punto F gli elementi fondamentali che "riuniscono" le tre coniche; la retta d prende il nome di **direttrice** e il punto F di **fuoco**, per una proprietà fisica che scopriremo nei Complementi (v. pagg. 560-565).

Si nota che se un punto P percorre una conica (fig. 18), qualunque essa sia, varia sia la sua distanza da F che la sua distanza dalla retta d; si osserva inoltre che se PF aumenta, anche Pd aumenta. Ci si chiede: queste due distanze saranno, in qualche modo, legate fra loro? Scopriremo che, effettivamente, esiste un legame fra PF e Pd.

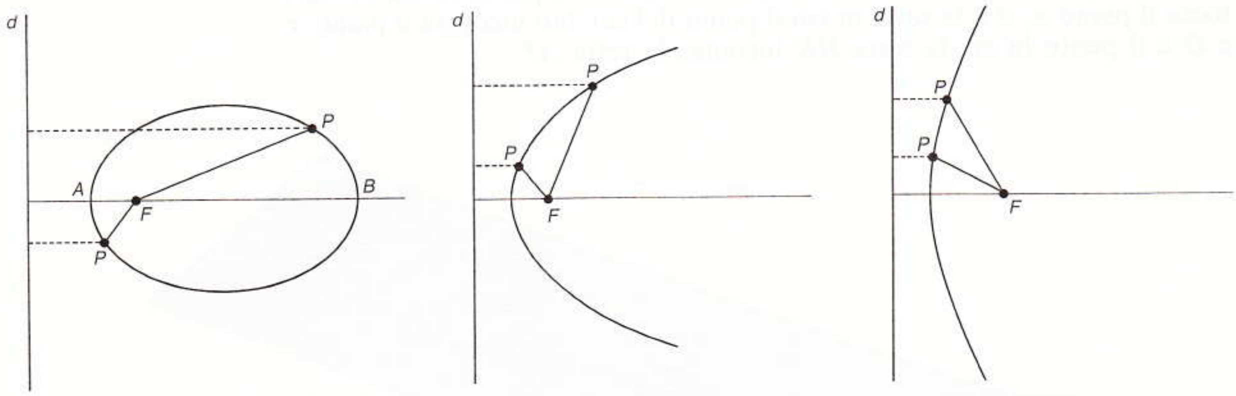


Fig. 18

Riferiamoci alla fig. 19: uniamo il punto P, variabile sull'ellisse, con il centro di proiezione S; si ottiene la generatrice PS. La generatrice PS è tangente alla sfera in un punto P', che appartiene alla circonferenza di diametro HK. PF e PP' sono dunque due segmenti di tangenti condotte da P alla sfera, e sono, per questa ragione, uguali (fig. 20); si ha dunque

$$PF = PP'.$$

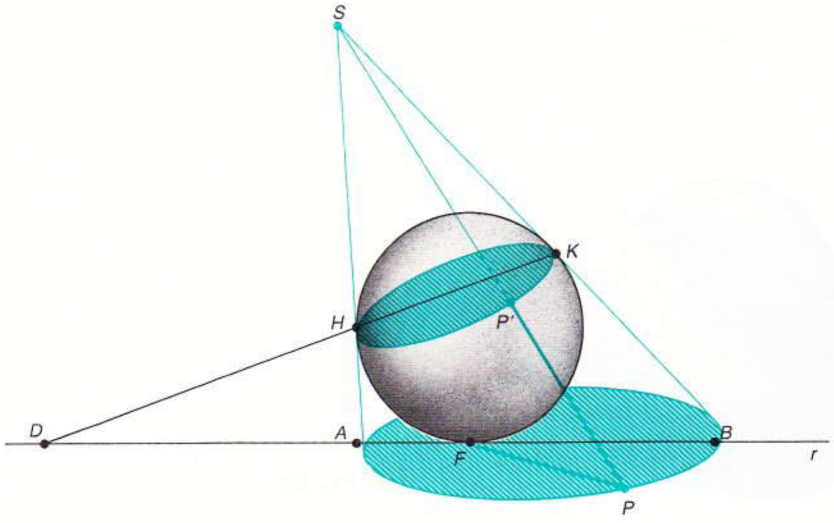


Fig. 19

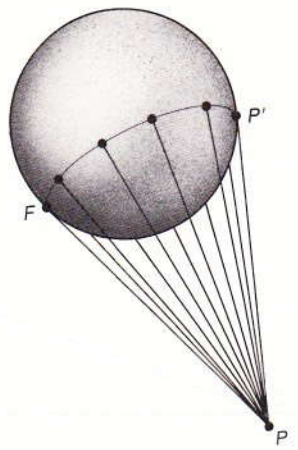


Fig. 20

Quanto alla distanza del punto P dalla retta d, si può "leggere" sulla retta r (fig. 21) dato che risulta

$$Pd = ZD.$$

Allora, invece di considerare PF e Pd, possiamo ragionare sulle distanze PP' e ZD (fig. 22). Vedremo che il rapporto

$$\frac{PP'}{ZD}$$

non varia quando P si muove sull'ellisse.
Cominciamo a far coincidere P con A; quando

$$P \equiv A$$

risulta

$$P' \equiv H \qquad \text{e} \qquad Z \equiv A;$$

in questo caso particolare, dunque, il rapporto $\frac{PP'}{ZD}$ è dato da $\frac{AH}{AD}$.

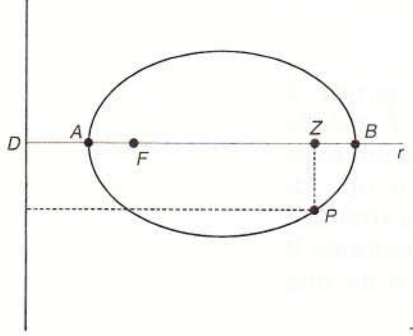


Fig. 21

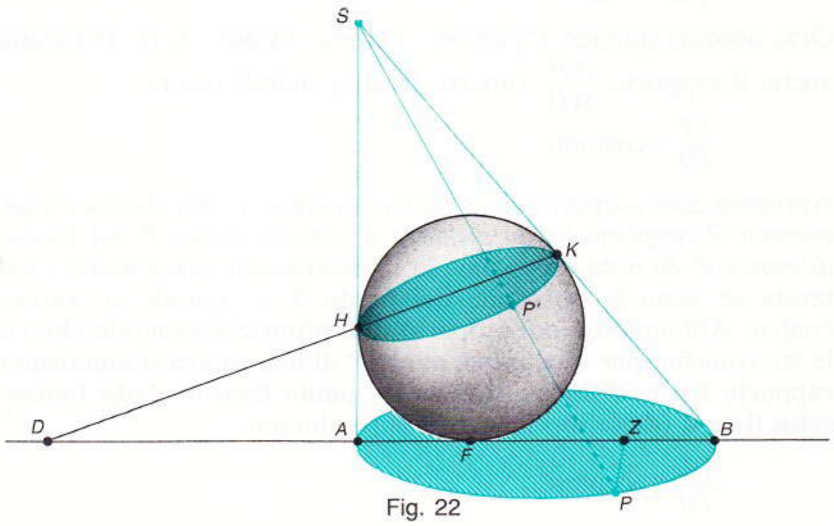


Fig. 22

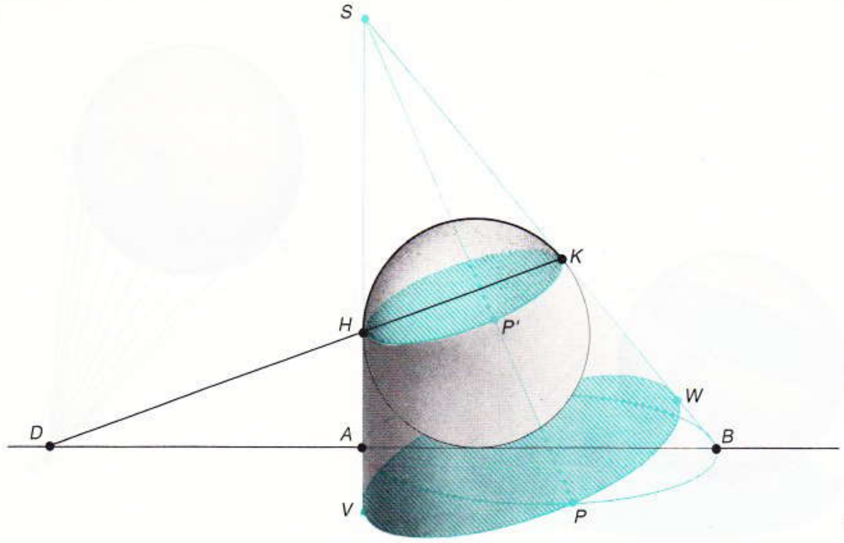


Fig. 23

Quando P percorre l'ellisse, dovunque si trovi, possiamo sempre sostituire a PP' un tratto uguale appartenente alla retta SA (fig. 23): basta costruire, per P, un piano parallelo al piano del cerchio di diametro HK. Il cono di vertice S segherà questo piano secondo un cerchio di diametro VW (parallelo ad HK); si ottiene un tronco di cono che ha per basi i cerchi paralleli di diametri HK e VW. È chiaro che i tratti delle generatrici che formano questo tronco di cono sono tutti uguali; si ha perciò:

$$PP' = VH.$$

Allora, il rapporto $\frac{PP'}{ZD}$ si potrà scrivere:

$$\frac{PP'}{ZD} = \frac{VH}{ZD}.$$

E finalmente, per il teorema di Talete (riferirsi alla fig. 24), risulta

$$\frac{VH}{ZD} = \frac{AH}{AD},$$

e quindi

$$\frac{PP'}{ZD} = \frac{AH}{AD}$$

da cui

$$\frac{PF}{Pd} = \frac{AH}{AD}.$$

Ora, siccome quando P percorre l'ellisse, i punti A, H, D rimangono fissi, anche il rapporto $\frac{AH}{AD}$ rimarrà fisso, e quindi risulta

$$\frac{PF}{Pd} = \text{costante}.$$

Abbiamo così scoperto che *l'ellisse è caratterizzata da questa proprietà: è costante il rapporto fra le distanze di un suo punto P dal fuoco F e dalla direttrice d*. Si nota, però, che la dimostrazione ora condotta rimane inalterata se varia la posizione del punto S, e, quindi, se varia il tipo di conica. Abbiamo quindi scoperto una proprietà generale che caratterizza le tre coniche: **per qualunque punto *P* di una conica si mantiene costante il rapporto fra le distanze di *P* da un punto fisso *F* (detto fuoco) e da una retta fissa *d* (detta direttrice)**. Risulta dunque:

$$\frac{PF}{Pd} = \text{costante}.$$

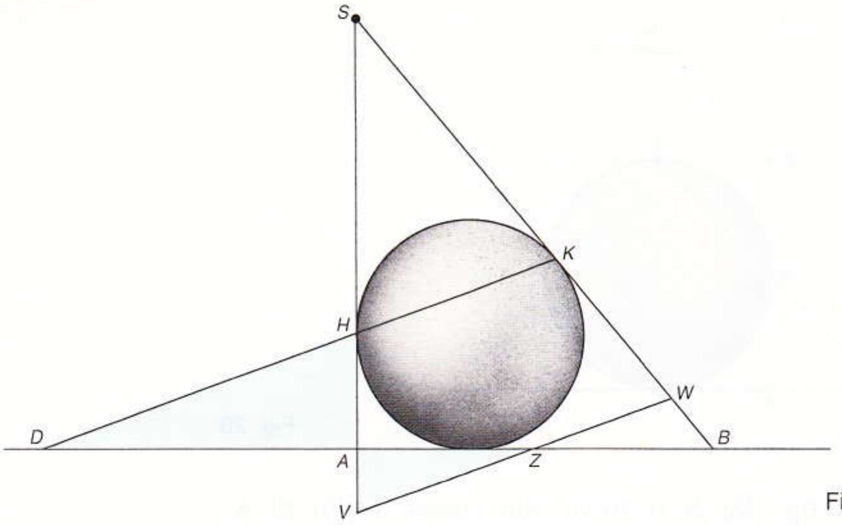


Fig. 24

La costante è detta **eccentricità**; si indica con e. La proprietà che caratterizza le coniche si riassume dunque nella formula

$$\boxed{\frac{PF}{Pd}=e}\ .$$

4. Il valore dell'eccentricità per la parabola, per l'ellisse e per l'iperbole

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che il rapporto $e=\frac{PF}{Pd}$ non varia al variare del punto P sulla conica. Conviene allora, per calcolare il valore di e, riferirsi a un punto P che si trovi in una particolare posizione: facciamo coincidere P con A (figg. 25, 26, 27). Si ottiene:

$$e=\frac{AF}{AD}.$$

Osservando le figure si capisce che il valore di e cambia al variare del tipo di conica. Esamineremo i tre casi, cominciando dalla **parabola**.

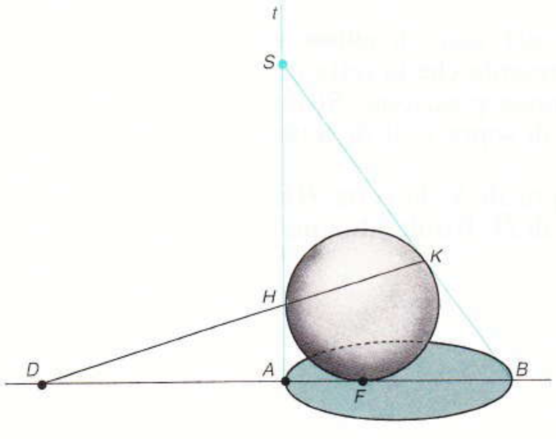


Fig. 25

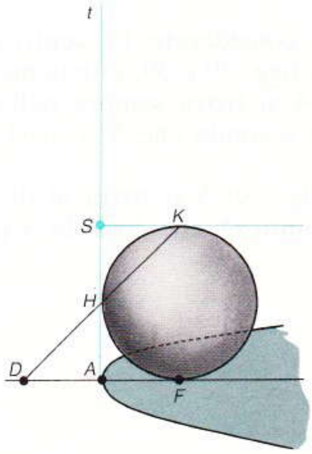


Fig. 26

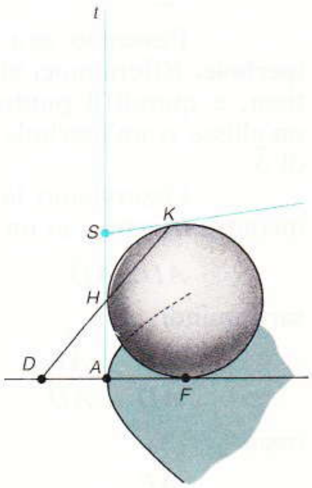


Fig. 27

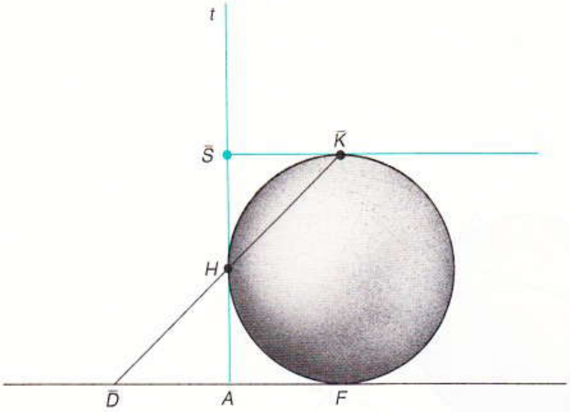


Fig. 28

Consideriamo la fig. 28: S si trova allo stesso livello di K; abbiamo indicato con $\bar{S}$ la sua posizione, e con $\bar{K}$ e $\bar{D}$ le posizioni di K e D in questo caso della parabola. Risulta:

$$\bar{S}H=\bar{S}\bar{K}$$

come tratti di tangenti condotte da $\bar{S}$ alla sfera; il triangolo $\bar{S}H\bar{K}$ è quindi isoscele. Dovrà, allora, essere isoscele anche il triangolo $AH\bar{D}$ che è simile a $\bar{S}H\bar{K}$ per avere gli angoli uguali; sarà dunque:

$$AH=A\bar{D}.$$

Ma, risulta anche che:

$$AH=AF$$

come tratti di tangenti condotte da A alla fera; si ha quindi:

$$AF=A\bar{D}$$

e cioè

$$\frac{AF}{A\bar{D}}=1.$$

Si scopre così che, nel caso della **parabola**, **l'eccentricità vale 1**:

$$\frac{PF}{Pd}=1,$$

ossia

$$\boxed{e=1}.$$

Passiamo ora a considerare l'eccentricità nel caso di **ellisse e iperbole.** Riferiamoci alle figg. 29 e 30, e teniamo presente che la retta t è fissa, e quindi il punto A si trova sempre nella stessa posizione. Si ha un'ellisse o un'iperbole a seconda che S si trovi al di sopra o al di sotto di $\bar{S}$.

Osserviamo la fig. 29: S si trova al di sopra di $\bar{S}$; la retta HK incontra la retta r in un punto D, che dista da A più di $\bar{D}$. Risulta dunque

$$AD>A\bar{D};$$

sarà quindi

$$\frac{AF}{AD}<\frac{AF}{A\bar{D}},$$

ossia

$$\frac{AF}{AD}<1.$$

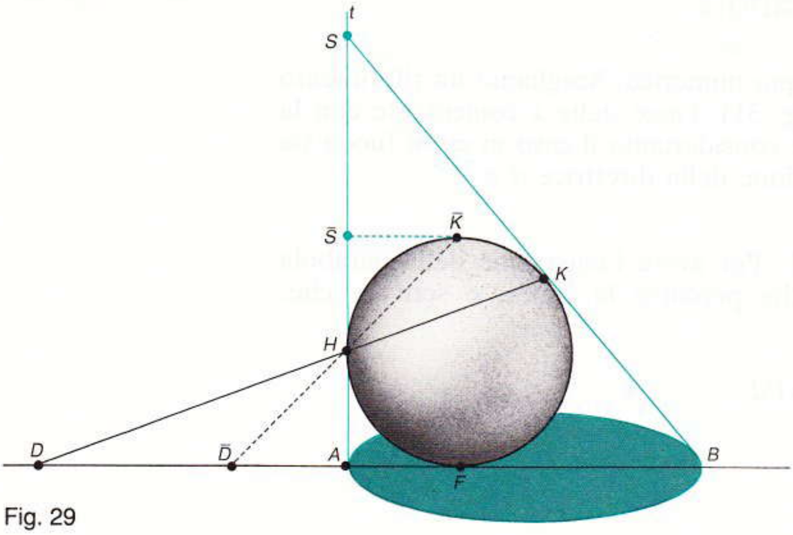


Fig. 29

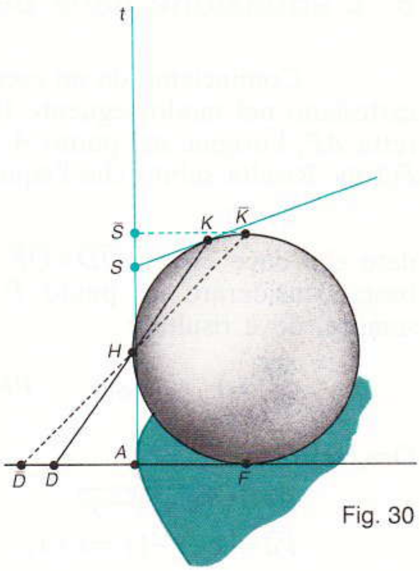


Fig. 30

In generale si avrà

$$\frac{PF}{Pd}<1.$$

Si capisce che a mano a mano che S si allontana da A sempre al di sopra di $\overline{S}$, sulla retta t, il punto D si allontana da A, e, dunque, aumenta la distanza AD. Per l'ellisse, si verifica dunque, sempre:

$$\boxed{e<1}.$$

Nel caso dell'iperbole (fig. 30), invece, siccome S si trova sempre al di sotto di $\overline{S}$, il punto D sarà più vicino ad A (di quanto è $\overline{D}$). Risulta dunque:

$$AD<A\overline{D}$$

e quindi

$$\frac{AF}{AD}>\frac{AF}{A\overline{D}}$$

ossia

$$\frac{AF}{AD}>1.$$

Si conclude che per l'iperbole

$$\boxed{e>1}.$$

Le tre coniche sono dunque caratterizzate dal rapporto costante

$$\frac{PF}{Pd}=e.$$

Il valore di e permette di distinguere una conica dall'altra; si ha:

$e=1$	nel caso della parabola
$e<1$	» » dell'ellisse
$e>1$	» » dell'iperbole.

Nelle pagine seguenti scopriremo altre proprietà delle coniche, fissando un riferimento cartesiano e traducendo in equazione la proprietà

$$\frac{PF}{Pd}=e.$$

5. L'equazione della parabola

Cominciamo da un esempio numerico. Scegliamo un riferimento cartesiano nel modo seguente (fig. 31): l'asse delle x coincidente con la retta AF, l'origine nel punto A; e consideriamo il caso in cui il fuoco sia $F(1,0)$. Risulta subito che l'equazione della direttrice d è:

$$x=-1,$$

dato che deve essere $\overline{OD}=\overline{OF}=1$. Per avere l'equazione della parabola basta considerare un punto P che percorre la curva, e scrivere che, sempre, deve risultare

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pd}}=1 \qquad \text{ossia} \qquad PF=Pd.$$

Ora, siccome

$$\overline{PF}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$
$$\overline{Pd}=|x-(-1)|=x+1,$$

si ha

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=x+1.$$

Per avere l'equazione in forma razionale, eleviamo i due membri al quadrato. Si ottiene:

$$(x-1)^2+y^2=(x+1)^2$$

ossia

$$x^2-2x+1+y^2=x^2+2x+1.$$

Si ha infine l'equazione

$$y^2-4x=0$$

o anche

$$\boxed{x=\frac{1}{4}y^2}\ .$$

È facile passare al caso più generale, considerando una parabola (fig. 32) avente il fuoco in un punto $F(f,0)$, e quindi come direttrice la retta

$$x=-f.$$

Partendo dalla condizione

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pd}}=1 \qquad \text{ossia} \qquad \overline{PF}=\overline{Pd},$$

si ha

$$\sqrt{(x-f)^2+y^2}=x+f.$$

Elevando i due membri al quadrato e poi sviluppando si ottiene

$$(x-f)^2+y^2=(x+f)^2$$
$$x^2-2fx+f^2+y^2=x^2+2fx+f^2,$$

e quindi l'equazione della parabola considerata è

$$y^2-4fx=0$$

ossia

$$x=\frac{1}{4f}y^2.$$

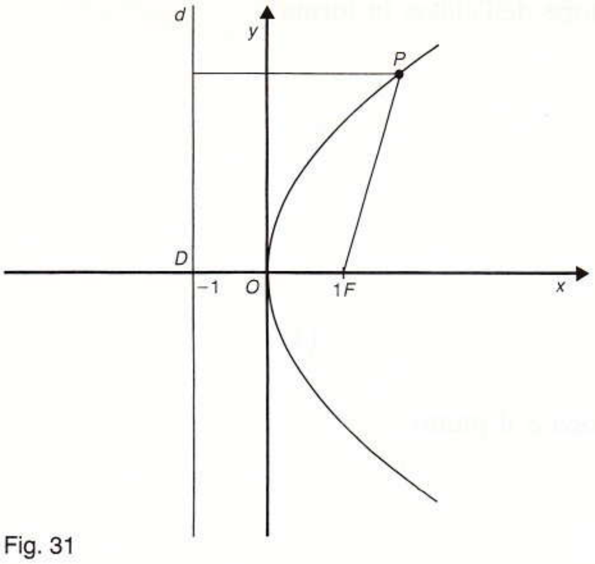


Fig. 31

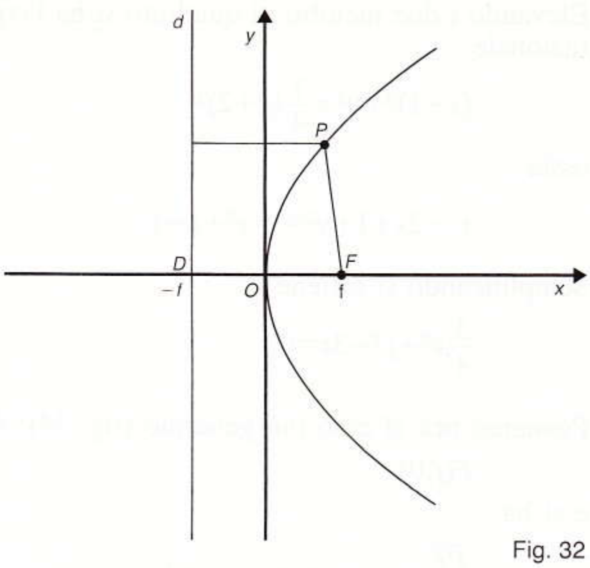


Fig. 32

6. L'equazione dell'ellisse

Dopo aver disegnato un'ellisse, abbiamo scelto il riferimento cartesiano in modo analogo a quanto si è fatto per la parabola (fig. 33). Cominciamo dal seguente caso numerico:

$$F(1{,}0), \qquad e=\frac{1}{2}.$$

Dato che $\overline{OF}=1$, sarà $\overline{OD}=2$, e quindi l'equazione della direttrice è

$$x=-2.$$

Per avere l'equazione dell'ellisse, basta scrivere che, per un qualunque punto $P(x,y)$, deve essere

$$\overline{PF}=\frac{1}{2}\overline{Pd};$$

ossia

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\frac{1}{2}(x+2).$$

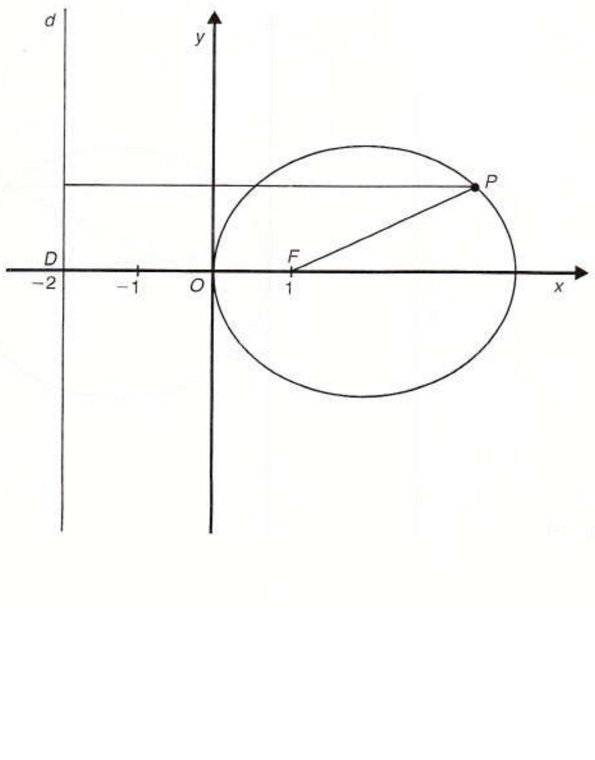


Fig. 33

Elevando i due membri al quadrato si ha l'equazione dell'ellisse in forma razionale

$$(x-1)^2+y^2=\frac{1}{4}(x+2)^2$$

ossia

$$x^2-2x+1+y^2=\frac{1}{4}x^2+x+1.$$

Semplificando si ottiene

$$\frac{3}{4}x^2+y^2-3x=0 \qquad (1)$$

Passiamo ora al caso più generale (fig. 34): il fuoco è il punto

$$F(f,0),$$

e si ha

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pd}}=e, \qquad \text{con} \qquad e<1.$$

In particolare, per il punto O si ha

$$\frac{\overline{OF}}{\overline{OD}}=e \qquad \text{ossia} \qquad \frac{f}{\overline{OD}}=e \qquad \text{da cui} \qquad \overline{OD}=\frac{f}{e}.$$

L'equazione della direttrice d è dunque

$$x=-\frac{f}{e}.$$

Si arriva all'equazione dell'ellisse a partire dalla relazione

$$\overline{PF}=e\cdot\overline{Pd},$$

in cui scriveremo

$$\overline{PF}=\sqrt{(x-f)^2+y^2} \qquad \text{e} \qquad \overline{Pd}=x+\frac{f}{e}.$$

Si ha:

$$\sqrt{(x-f)^2+y^2}=e\left(x+\frac{f}{e}\right).$$

Elevando i due membri al quadrato, e poi sviluppando, si ha:

$$(x-f)^2+y^2=e^2\left(x+\frac{f}{e}\right)^2,$$
$$(1-e^2)x^2+y^2-2f(1+e)x=0.$$

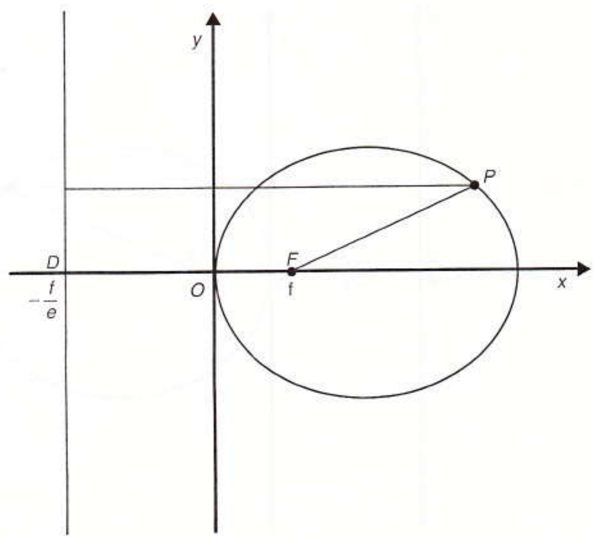


Fig. 34

7. L'equazione dell'iperbole

Riferiamoci all'iperbole di fig. 35: sulla curva si trovano tutti i punti P per cui risulta

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pd}}=2 \qquad \text{ossia} \qquad \overline{PF}=2\cdot\overline{Pd}.$$

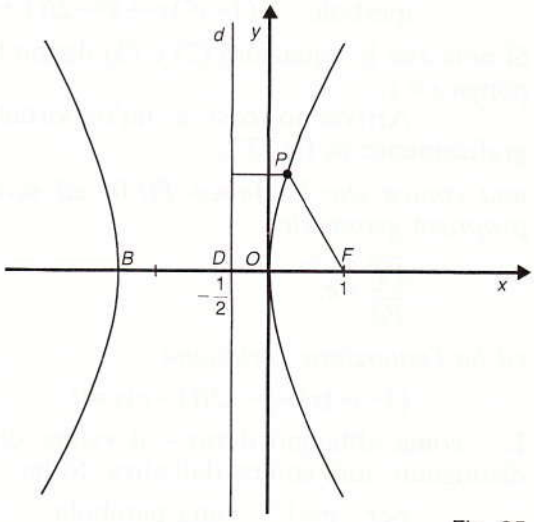


Fig. 35

Abbiamo scelto anche questa volta $F(1,0)$, e dato che risulta

$$\frac{\overline{OF}}{\overline{OD}}=2 \qquad \text{e} \qquad \overline{OF}=1$$

si ha

$$\overline{OD}=\frac{1}{2};$$

l'equazione della direttrice è quindi

$$x=\frac{1}{2}.$$

Si arriva all'equazione dell'iperbole a partire dalla relazione

$$\overline{PF}=e\cdot\overline{Pd},$$

in cui scriveremo

$$\overline{PF}=\sqrt{(x-1)^2+y^2} \qquad \text{e} \qquad \overline{Pd}=\left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=x+\frac{1}{2}.$$

Un punto P si trova sull'iperbole solo se risulta

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Elevando i due membri al quadrato e sviluppando si ottiene l'equazione

$$(x-1)^2+y^2=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$3x^2-y^2+6x=0.$$

Più in generale, se consideriamo l'iperbole (fig. 36) che ha il fuoco $F(f,0)$ e che è caratterizzata dalla proprietà

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pd}}=e \qquad \text{con} \qquad e>1,$$

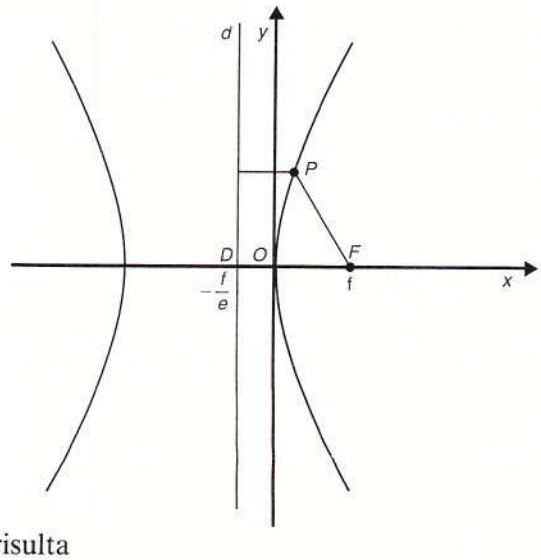


Fig. 36

troviamo che la direttrice ha l'equazione

$$x=-\frac{f}{e}.$$

E l'equazione dell'iperbole si ottiene dalla

$$\overline{PF}=e\cdot\overline{Pd};$$

si ha

$$\sqrt{(x-f)^2+y^2}=e\left(x+\frac{f}{e}\right)$$

ossia

$$(1-e^2)x^2+y^2-2f(1+e)x=0.$$

È la stessa equazione ottenuta per l'ellisse, ma ora risulta

$$e>1.$$

In conclusione, confrontando i risultati ottenuti, si ha:

parabola: $y^2-4fx=0$ (1)

ellisse: $(1-e^2)x^2+y^2-2f(1+e)x=0$ con $e<1$ (2)

iperbole: $(1-e^2)x^2+y^2-2f(1+e)x=0$ con $e>1$ (3)

Si nota che le equazioni (2) e (3) danno luogo all'equazione (1) quando si ponga $e=1$.

Arriviamo così a un'importante conclusione che è descritta graficamente in fig. 37:

una conica che ha fuoco F(f,0) ed eccentricità e, è caratterizzata dalla proprietà geometrica

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pd}}=e,$$

ed ha l'equazione cartesiana

$$(1-e^2)x^2+y^2-2f(1+e)x=0.$$

È – come abbiamo detto – il valore dell'eccentricità e che permette di distinguere una conica dall'altra. Si ha:

per $e=1$ una parabola
» $e<1$ un'ellisse
» $e>1$ un'iperbole.

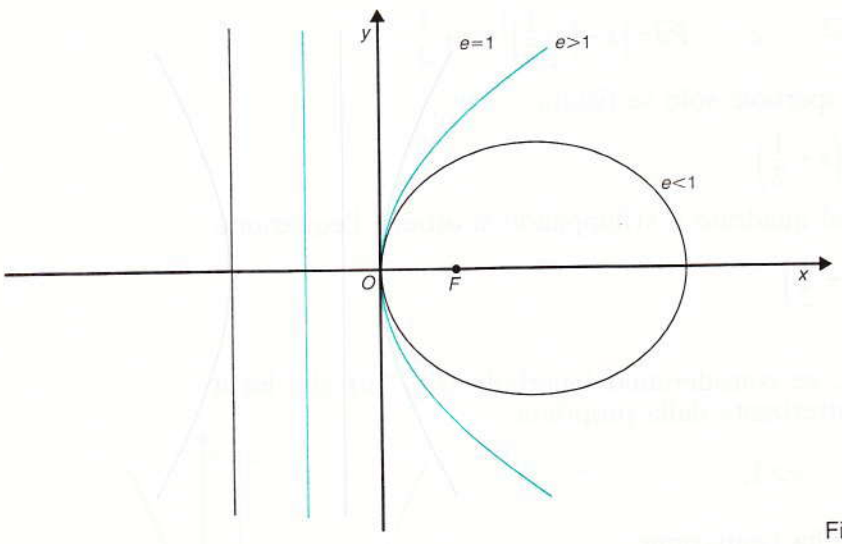


Fig. 37

2. Parte seconda
La parabola

1. La forma della parabola e la posizione del fuoco

Nelle pagine precedenti abbiamo ottenuto l'equazione della parabola (fig. 1) che ha fuoco $F(f,0)$ e direttrice di equazione $x=-f$,nella forma

$$x=\frac{1}{4f}y^2. \tag{1}$$

Se operiamo una simmetria rispetto alla retta d'equazione

$$y=x,$$

otteniamo la parabola di fig. 2; questa parabola ha l'equazione

$$y=\frac{1}{4f}x^2;$$

il fuoco è $F(0,f)$ e la direttrice d, parallela all'asse delle x, ha l'equazione

$$y=-f.$$

L'equazione della parabola che ha per asse di simmetria l'asse delle y si presenta dunque nella forma

$$y=ax^2$$

con

$$a=\frac{1}{4f}.$$

Così, per esempio, rappresentano parabole le equazioni

$$a)\ y=\frac{1}{8}x^2;\quad b)\ y=\frac{1}{4}x^2;\quad c)\ y=\frac{1}{2}x^2;\quad d)\ y=x^2;\quad e)\ y=2x^2,$$

perché sono del tipo

$$y=ax^2.$$

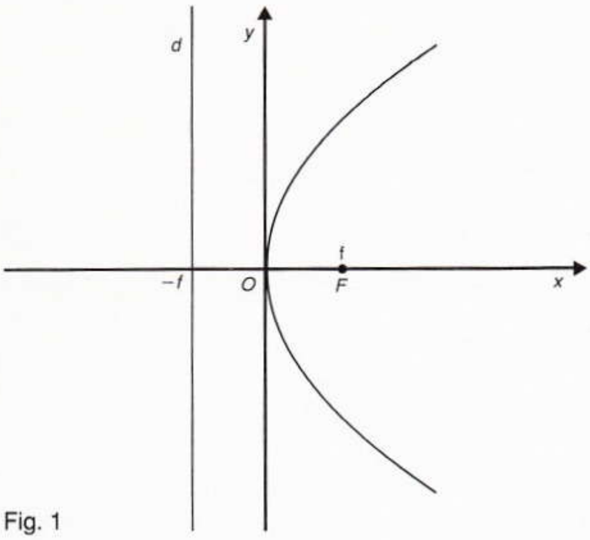


Fig. 1

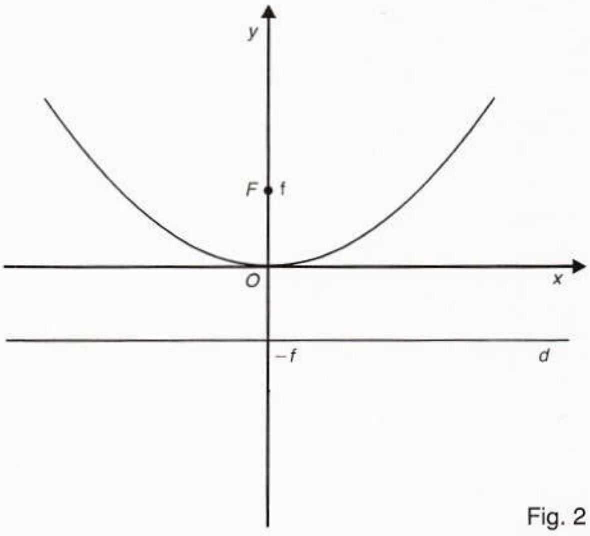


Fig. 2

È facile indicare, per ciascuna di queste parabole, la distanza focale f; infatti, dato che risulta

$$a=\frac{1}{4f},$$

si ha

$$f=\frac{1}{4a}.$$

Dunque, nei casi sopra indicati le distanze focali sono

$$a)\ f=2; \quad b)\ f=1; \quad c)\ f=\frac{1}{8}; \quad d)\ f=\frac{1}{4}; \quad e)\ f=\frac{1}{2}.$$

In fig. 3 sono rappresentate, in colori diversi, queste parabole; ne abbiamo indicato il fuoco e la direttrice. In tutti questi casi le parabole passano per $O(0,0)$ ed hanno l'asse delle y come asse di simmetria. Nell'equazione x compare solo al 2° grado, per cui, se operiamo una simmetria rispetto all'asse delle y, cambiando cioè segno alle ascisse, l'equazione non cambia; questo fatto conferma che l'asse delle y è di simmetria.

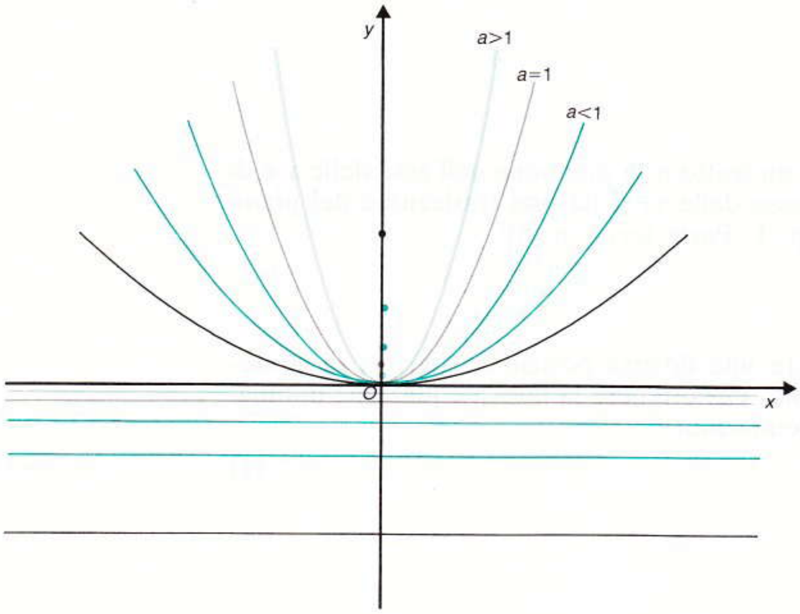


Fig. 3

Si osserva che:

- se $\boldsymbol{a>1}$, la parabola cresce più rapidamente della

  $y=x^2$,

  e all'aumentare di a la parabola diventa "sempre più stretta", mentre il fuoco F si avvicina al vertice O;
- se $\boldsymbol{0<a<1}$, la parabola cresce più lentamente della

  $y=x^2$,

  e al diminuire di a la parabola diventa "sempre più larga", mentre il fuoco si allontana dal vertice O.

Si può ottenere un'equazione con $\boldsymbol{a<0}$, operando una simmetria rispetto all'asse delle x (fig. 4).

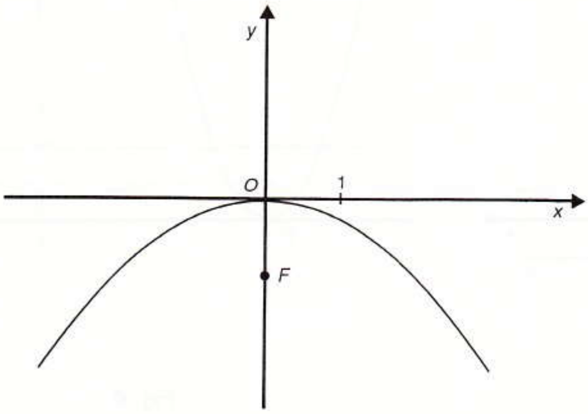


Fig. 4

2. Equazione della parabola non passante per O e con direttrice parallela all'asse delle ascisse

Abbiamo trovato che l'equazione della parabola che passa per O e che ha la direttrice parallela all'asse delle x (fig. 5) è

$$y=ax^2 \tag{1}$$

dove a è un coefficiente numerico. Il vertice della parabola è l'origine O; il fuoco è il punto

$$F\left(0,\frac{1}{4a}\right),$$

e la direttrice ha l'equazione

$$y=-\frac{1}{4a}.$$

Se si opera una traslazione di un tratto p in direzione dell'asse delle x e di un tratto q in direzione dell'asse delle y, si ha una traslazione del piano descritta dalle equazioni (Cap. 1, Parte terza, n. 5):

$$\begin{cases} x'=x+p \\ y'=y+q. \end{cases}$$

La parabola viene ad occupare una diversa posizione (fig. 6); di conseguenza la sua equazione cambia. Per ottenere la nuova equazione dobbiamo sostituire ad x e a y nell'equazione

$$y=ax^2 \tag{1}$$

le espressioni seguenti

$$\begin{cases} x=x'-p \\ y=y'-q. \end{cases}$$

La (1) diventa

$$y'-q=a(x'-p)^2$$

ossia

$$y'=a(x'-p)^2+q \tag{2}$$

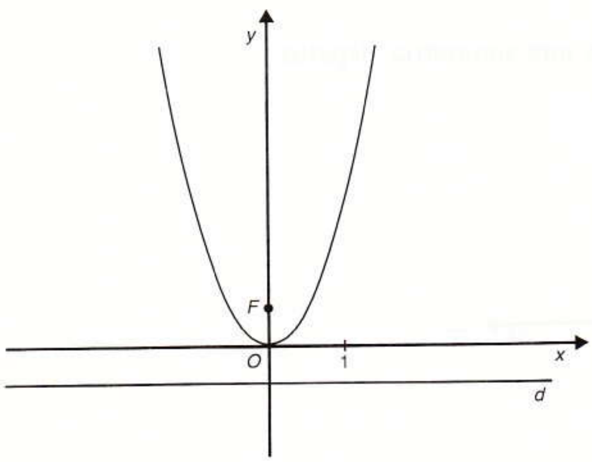


Fig. 5

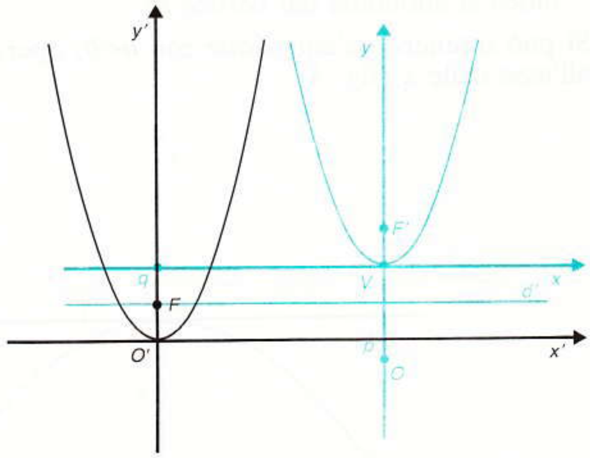


Fig. 6

Il vertice V e il fuoco F' vengono ad avere le coordinate

$$V(p,q), \qquad F'\left(p, q+\frac{1}{4a}\right),$$

e la direttrice d ha l'equazione

$$y=q-\frac{1}{4a}.$$

Se sviluppiamo l'equazione (2) si ottiene

$$y'=a(x'^2-2px'+p^2)+q$$

ossia

$$y'=ax'^2-2apx'+(ap^2+q).$$

Si ha quindi, indicando per semplicità di scrittura con x e y le coordinate, che:

un'equazione del tipo

$$y=ax^2-2apx+(ap^2+q) \tag{3}$$

rappresenta una parabola che ha i seguenti elementi caratteristici:

– l'asse di simmetria d'equazione $x=p$,
– il vertice $V(p,q)$,
– il fuoco $F\left(p, q+\frac{1}{4a}\right)$,
– la direttice d d'equazione $y=q-\frac{1}{4a}$.

La (3) si può scrivere più semplicemente così:

$$y=ax^2+bx+c \tag{4}$$

dove abbiamo scritto:

$$\begin{cases} b=-2ap \\ c=ap^2+q. \end{cases} \tag{5}$$

3. Studio della parabola d'equazione $y=ax^2+bx+c$. Fuoco e direttrice

Vediamo ora come si può determinare il vertice V, il fuoco F e la direttrice d di una parabola di cui è data l'equazione nella forma:

$$y=ax^2+bx+c.$$

Cominciamo con un esempio numerico. La parabola ha l'equazione

$$y=3x^2-6x+5.$$

Risulta, in base alle (5) del paragrafo precedente:

$$-6=-2\cdot 3p$$
$$5=3p^2+q,$$

dove p,q sono le coordinate del vertice V. Si ottiene

$$p=1$$
$$q=5-3=2,$$

e quindi il vertice $V(1,2)$.

Per determinare la posizione del fuoco, che ha l'ascissa $p=1$ come il vertice, dobbiamo calcolarne l'ordinata f; è data da

$$f=q+\frac{1}{4a},$$

e quindi nel nostro caso si ha

$$f=2+\frac{1}{4\cdot 3}=2+\frac{1}{12}=\frac{25}{12}.$$

Risulta dunque $F\left(1,\frac{25}{12}\right)$.

L'equazione della direttrice sarà:

$$y=q-\frac{1}{4a},$$

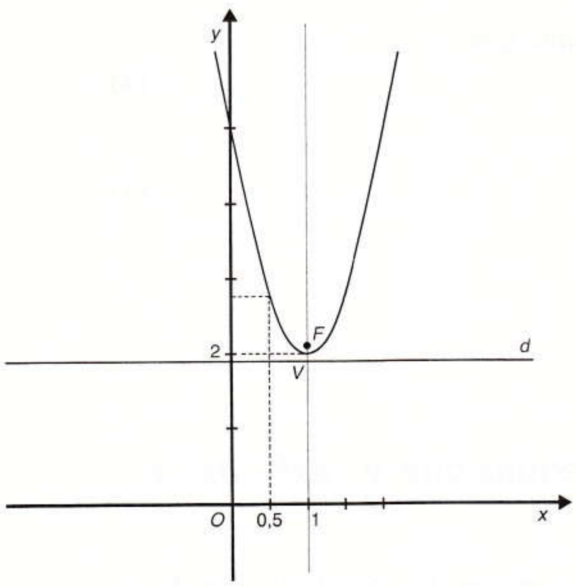
cioè, nel nostro caso,

$$y=2-\frac{1}{12}$$

ossia

$$y=\frac{23}{12}.$$

Per disegnare la parabola assegnamo ad x opportuni valori e calcoliamo i corrispondenti valori di y; si ottiene il grafico di fig. 7.



x	y
0	5
0,25	3,6875
0,5	2,75
1	2
1,5	2,75
⋮	⋮

Fig. 7

È chiaro che il procedimento seguito ha carattere generale. Se la parabola ha l'equazione

$$y=ax^2+bx+c, \tag{4}$$

le coordinate p,q del vertice si ottengono in base alle relazioni

$$\begin{cases} -2ap=b \\ q+ap^2=c. \end{cases}$$

Si ha:

$$\begin{cases} p=-\dfrac{b}{2a} \\ q+a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2=c \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} p=-\dfrac{b}{2a} \\ q=c-\dfrac{b^2}{4a}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}. \end{cases}$$

L'espressione $4ac-b^2$, che si trova a numeratore della frazione che dà q, è il discriminante Δ dell'equazione

$$ax^2+bx+c=0$$

cambiato di segno:

$$4ac-b^2=-(b^2-4ac)=-\Delta.$$

Possiamo allora scrivere più brevemente

$$p=-\frac{b}{2a}$$

$$q=-\frac{\Delta}{4a}.$$

La parabola d'equazione

$$y=ax^2+bx+c$$

ha dunque

- vertice $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$,
- fuoco $F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$,
- direttrice d'equazione $y=-\frac{1+\Delta}{4a}$.

Infine, come abbiamo visto nel caso numerico, per tracciare la parabola (fig. 8) si assegnano dei valori opportuni ad x e si calcolano i corrispondenti valori di y.

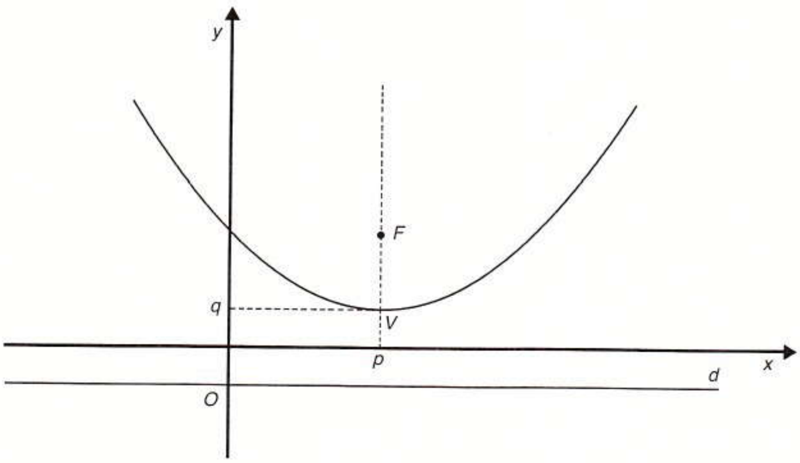


Fig. 8

2. Parte terza
L'ellisse

1. L'equazione "normale" dell'ellisse

Nella Parte prima, paragrafo 6, abbiamo studiato l'ellisse d'equazione:

$$\frac{3}{4}x^2+y^2-3x=0. \qquad (1)$$

Il fuoco è: $F(1,0)$; la direttrice ha l'equazione $x=-2$; l'eccentricità è: $e=\frac{1}{2}$. Abbiamo disegnato l'ellisse in fig. 1.

L'equazione (1) non ha la forma, detta *normale*, che abbiamo trovato nella Parte terza, paragrafo 2, del Cap. 1, e cioè

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (2)$$

che si traduce nel grafico di fig. 2.

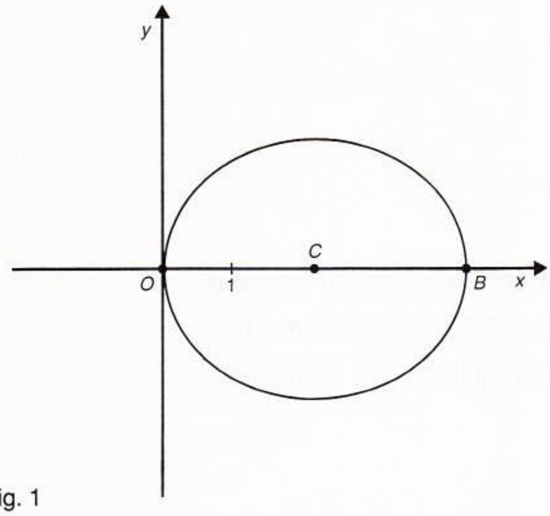


Fig. 1

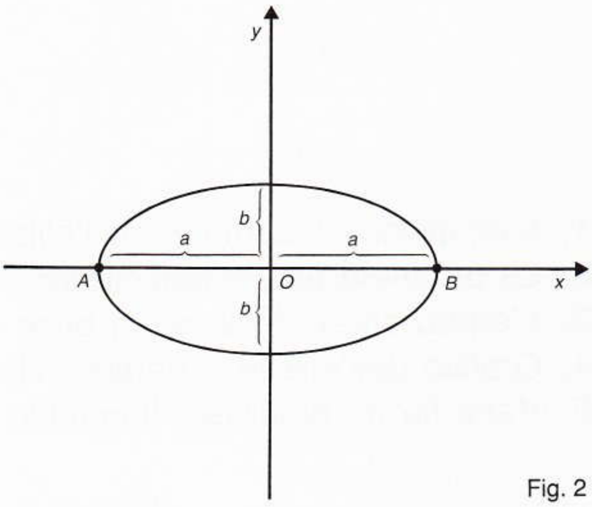


Fig. 2

Ci si rende conto, osservando le figg. 1 e 2, che le due ellissi non sono disposte nello stesso modo rispetto agli assi cartesiani: nella fig. 2 l'origine O si trova nel punto medio dell'asse AB, mentre nella fig. 1 il punto O appartiene all'ellisse. Si capisce che, a partire dall'equazione (1), si potrà ottenere un'equazione del tipo (2), operando un'opportuna traslazione del piano.

A questo scopo determiniamo le coordinate del punto B in cui l'ellisse d'equazione (1) interseca l'asse delle x (fig. 3). Si ha:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x^2+y^2-3x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} \frac{3}{4}x^2-3x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

da cui, assieme ad $y=0$:

$$\frac{3}{4}x(x-4)=0 < \begin{matrix} \frac{3}{4}x=0 \rightarrow x_1=0 \\ x-4=0 \rightarrow x_2=4. \end{matrix}$$

Oltre all'origine, si ha il punto B

$$B(4,0).$$

Il punto medio del segmento OB è

$$C(2,0).$$

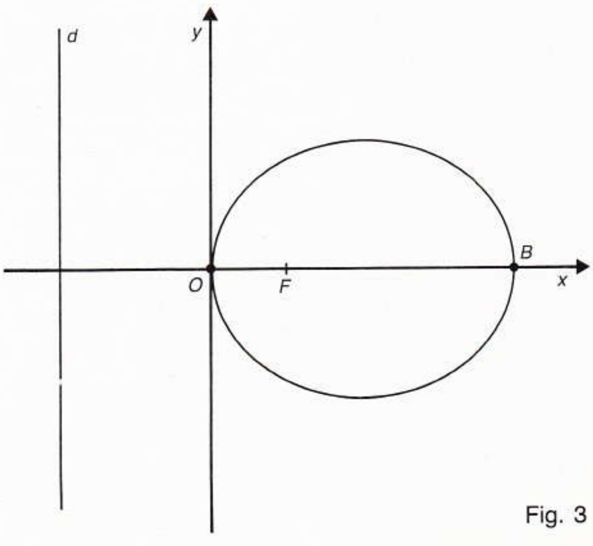


Fig. 3

Se ora vogliamo che il punto C coincida con l'origine O, dobbiamo operare una traslazione del piano *di 2 unità* lungo l'asse delle x, verso sinistra (fig. 4). Tale traslazione è descritta dalle seguenti equazioni (Cap. 1, Parte terza, paragrafo 5):

$$\begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x=x'+2 \\ y=y'. \end{cases}$$

Applicando questa traslazione all'equazione

$$\frac{3}{4}x^2+y^2-3x=0$$

si ottiene l'equazione

$$\frac{3}{4}(x'+2)^2+y'^2-3(x'+2)=0$$

ossia

$$\frac{3}{4}x'^2+3x'+3+y'^2-3x'-6=0$$

da cui

$$\frac{3}{4}x'^2+y'^2=3.$$

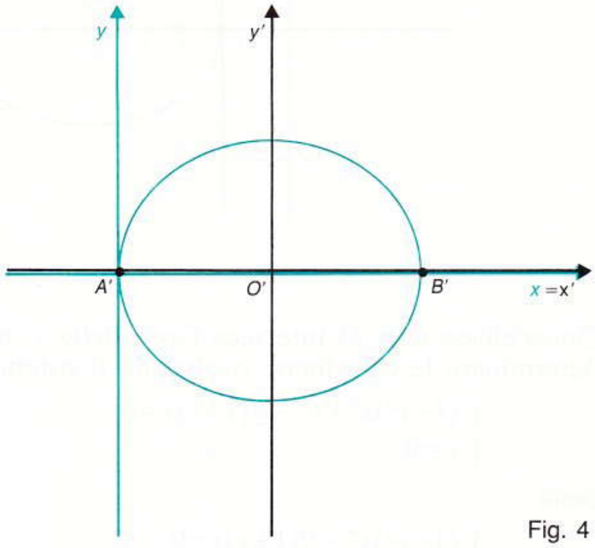


Fig. 4

Dividendo i due membri per il termine noto 3, si ha:

$$\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{3}=1.$$

Si ottiene così l'equazione dell'ellisse in forma normale.
I punti d'intersezione con l'asse delle x sono ora (fig. 5):

$$A'(-2,0) \quad \text{e} \quad B'(2,0);$$

il fuoco si trova in

$$F'(-1,0),$$

e la direttrice ha l'equazione

$$x'=-4.$$

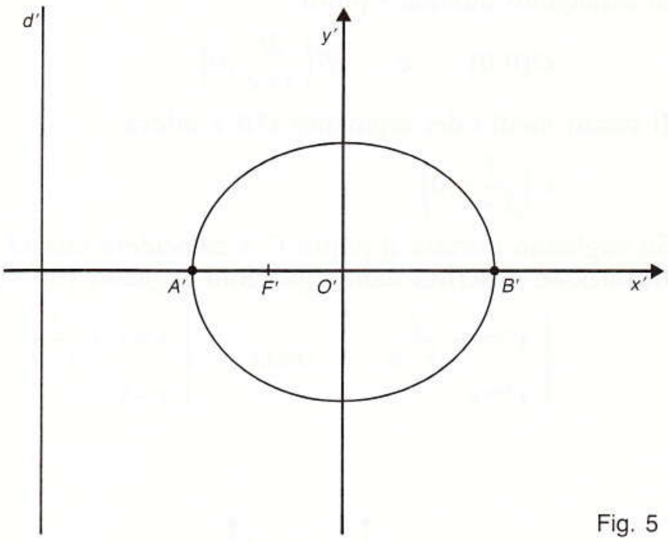


Fig. 5

L'ellisse è simmetrica rispetto agli assi cartesiani; questa proprietà geometrica corrisponde al fatto che nell'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

x e y compaiono solo a 2° grado, e non vengono quindi alterate se viene cambiato il segno delle ascisse o delle ordinate.

Il procedimento seguito ha carattere generale, e può essere ripetuto a partire da un'ellisse d'equazione

$$(1-e^2)x^2+y^2-2f(1+e)x=0. \qquad (3)$$

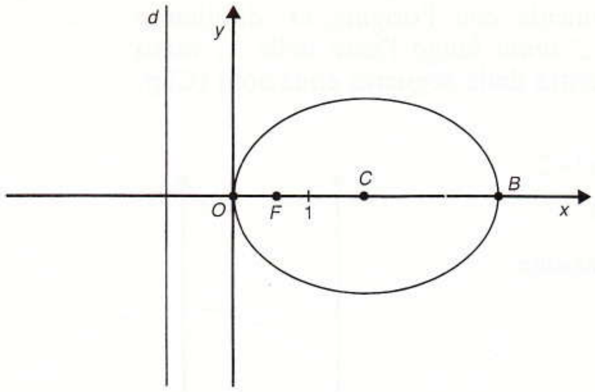


Fig. 6

Quest'ellisse (fig. 6) interseca l'asse delle x in due punti di cui possiamo determinare le coordinate risolvendo il sistema

$$\begin{cases} (1-e^2)x^2+y^2-2f(1+e)x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} (1-e^2)x^2-2f(1+e)x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

da cui, assieme ad $y=0$, si ha:

$$x[(1-e^2)x-2f(1+e)]=0 < \begin{matrix} x_1=0 \\ x_2=\dfrac{2f(1+e)}{1-e^2}=\dfrac{2f(1+e)}{(1-e)(1+e)}=\dfrac{2f}{1-e}. \end{matrix}$$

Si ottengono dunque i punti:

$$O(0,0) \qquad \text{e} \qquad B\left(\frac{2f}{1-e},0\right).$$

Il punto medio del segmento OB è allora:

$$C\left(\frac{f}{1-e},0\right).$$

Se vogliamo portare il punto C a coincidere con O, dobbiamo operare la traslazione descritta dalle equazioni seguenti (fig. 7):

$$\begin{cases} x'=x-\dfrac{f}{1-e} \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} x=x'+\dfrac{f}{1-e} \\ y=y'. \end{cases}$$

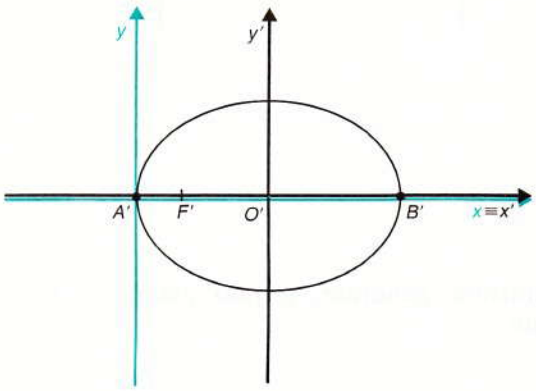


Fig. 7

In seguito a questa traslazione l'equazione (3) si trasforma in

$$(1-e^2)\left(x'+\frac{b}{1-e}\right)^2+y'^2-2f(1+e)\left(x'+\frac{f}{1-e}\right)=0$$

che, sviluppata e ordinata, si scrive:

$$(1-e)^2x'^2+y'^2=f^2\frac{1+e}{1-e}.$$

Dividendo i due membri per il termine noto, si ottiene:

$$\frac{x'^2}{\dfrac{f^2}{(1-e)^2}}+\frac{y'^2}{\dfrac{f^2(1+e)}{1-e}}=1. \qquad (4)$$

Si osserva che i denominatori della (4) sono entrambi positivi, dato che $0<e<1$; possiamo perciò porre:

$$a^2=\frac{f^2}{(1-e)^2}, \qquad b^2=\frac{f^2(1+e)}{1-e}.$$

In tal modo, indicando per semplicità di scrittura le coordinate con x e y, si arriva proprio a un'equazione del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (2)$$

L'ellisse (fig. 8) interseca ora l'asse delle x nei punti

$$A(-a,0) \qquad \text{e} \qquad B(a,0)$$

dove

$$a=\frac{f}{1-e}.$$

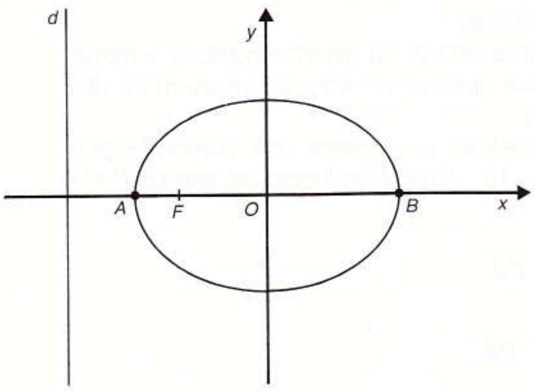


Fig. 8

Anche il fuoco F ha subito la stessa traslazione lungo l'asse delle x verso sinistra, di un tratto uguale ad $\frac{f}{1-e}$; perciò ora la sua ascissa, che è negativa, è data da

$$f-\frac{f}{1-e}=\frac{f-fe-f}{1-e}=-\frac{fe}{1-e}.$$

Risulta dunque

$$\overline{OF}=\frac{fe}{1-e};$$

questa lunghezza OF prende il nome di **distanza focale**, ed è spesso indicata con la lettera c. Si ha dunque

$$\overline{OB}=\overline{OA}=a=\frac{f}{1-e}$$

$$\overline{OF}=c=\frac{fe}{1-e};$$

risulta da queste due relazioni che

$$c=a\cdot e,$$

ossia

$$e=\frac{c}{a}.$$

Possiamo concludere che: *se l'ellisse ha l'equazione scritta nella forma*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

l'eccentricità e *è data dal rapporto*

$$e=\frac{\overline{OF}}{\overline{OB}}=\frac{c}{a}.$$

2. La proprietà focale dell'ellisse. Una semplice costruzione

Abbiamo già osservato nel paragrafo precedente che l'ellisse d'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ha per assi di simmetria gli assi coordinati.

Ora, il fatto che l'ellisse ha due assi di simmetria porta a scoprire l'esistenza di *un altro fuoco, F', e di un'altra direttrice, d'*, simmetrici di F e di d rispetto all'asse delle y (fig. 9).

L'esistenza di due fuochi conduce a scoprire una notevole proprietà dell'ellisse. Riferiamoci alla fig. 10, dove è indicato un punto P che percorre l'ellisse. Si ha sempre:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pd}}=e \qquad \text{ossia} \qquad \overline{PF}=e\cdot\overline{Pd}$$

$$\frac{\overline{PF'}}{\overline{Pd'}}=e \qquad \text{ossia} \qquad \overline{PF'}=e\cdot\overline{Pd'}.$$

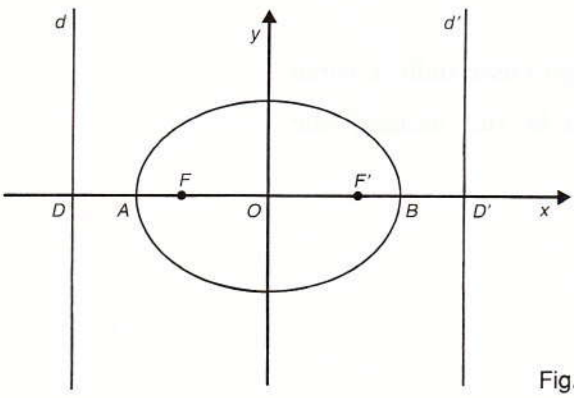


Fig. 9

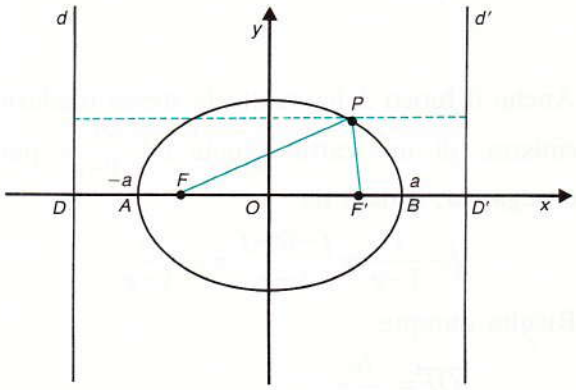


Fig. 10

Risulta quindi:

$$\overline{PF}+\overline{PF'}=e(\overline{Pd}+\overline{Pd'})=e\cdot\overline{DD'}.$$

Ora, siccome

$$e=\text{costante},\qquad \overline{DD'}=\text{costante},$$

risulta

$$\overline{PF}+\overline{PF'}=\text{costante}.$$

Si scopre così che: **l'ellisse è il luogo dei punti tali che la somma delle distanze dai due fuochi è costante.**

Il valore della costante si ottiene subito se si fa coincidere il punto P con A (fig. 10); si ha:

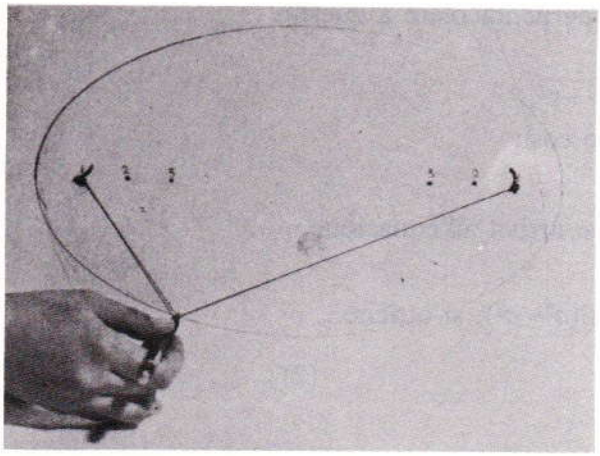
$$\overline{AF}+\overline{AF'}=2a.$$

In generale, si avrà:

$$\boxed{\overline{PF}+\overline{PF'}=2a}\,.$$

La scoperta di questa proprietà relativa ai due fuochi conduce ad una semplicissima **costruzione** dell'ellisse: basta, come si vede nella fotografia (fig. 11), valersi di un pezzo di spago i cui estremi siano fissati a due chiodi, F e F', piantati su una tavoletta; tenendo ben teso lo spago con l'aiuto di una matita, la punta di questa traccia sulla tavoletta un'ellisse.

La proprietà focale dell'ellisse si può anche vedere sotto l'aspetto seguente (fig. 12): è chiaro che i triangoli di base FF' e aventi la somma degli altri due lati uguale al pezzo di spago, hanno lo stesso perimetro; l'ellisse è dunque il luogo dei "vertici liberi" di triangoli di uguale base e isoperimetrici. È interessante osservare che mentre questi triangoli hanno lo stesso perimetro, non hanno la stessa area (fig. 13): l'area varia ed è massima quando è massima l'altezza relativa alla base FF', e cioè nel caso del triangolo isoscele.



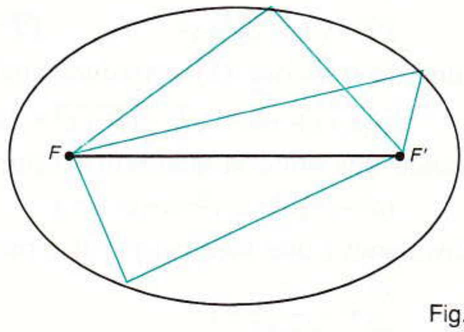


Fig. 12

Fig. 11

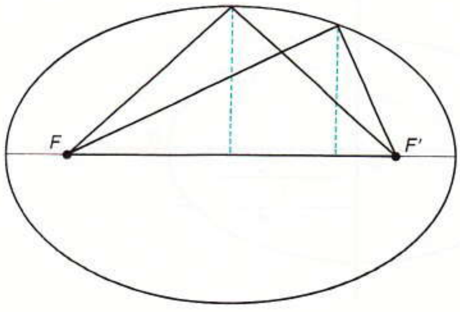


Fig. 13

3. L'equazione dell'ellisse in base alla proprietà dei fuochi

Abbiamo visto che l'ellisse è caratterizzata dalla seguente proprietà:

è il luogo dei punti del piano tali che la somma delle distanze da due punti fissi, detti fuochi, è costante.

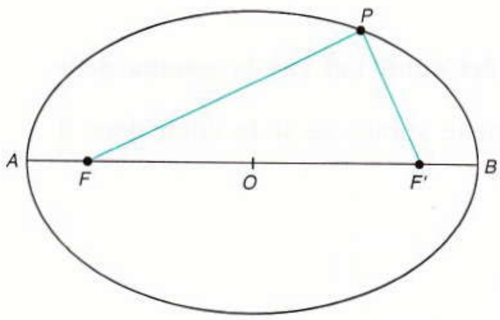


Fig. 14

Se P è un punto che percorre l'ellisse e se F, F' sono i fuochi (fig. 14) si ha:

$$\overline{PF}+\overline{PF'}=\text{costante}.$$

Il valore della costante è facilmente individuabile perché se P coincide con uno degli estremi del diametro AB, si ha:

$$\overline{AF}+\overline{AF'}=2a.$$

È quindi valida, in generale, la relazione

$$PF+PF'=2a. \tag{1}$$

Vediamo ora come la (1) si possa tradurre in equazione.

Riferiamoci alla fig. 15, dove abbiamo scelto come asse delle ascisse la retta FF' e come asse delle ordinate la perpendicolare a questa passante per il punto medio O di FF'. Si ha:

$$\overline{PF}=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad \text{e} \quad \overline{PF'}=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

e quindi la relazione (1) si traduce analiticamente così:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Elevando due volte al quadrato e semplificando si arriva all'equazione

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Se dividiamo i due membri per il termine noto $a^2(a^2-c^2)$, si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \tag{2}$$

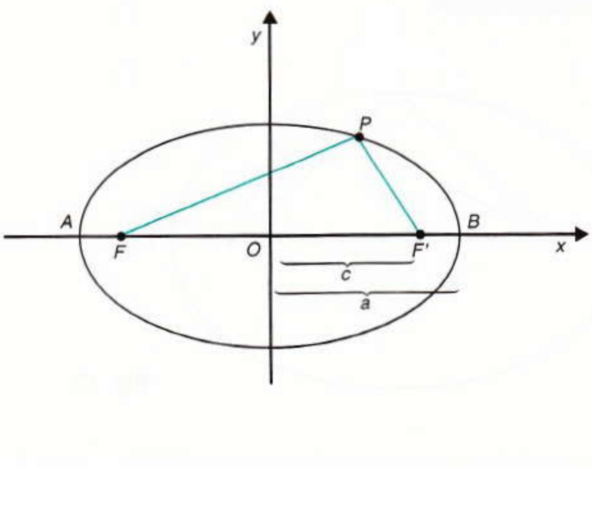


Fig. 15

Ora, siccome (fig. 16)

$$a>c \qquad \text{e quindi} \qquad a^2>c^2,$$

risulta

$$a^2-c^2>0;$$

questo valore positivo si indica abitualmente con b^2, e cioè si pone

$$a^2-c^2=b^2.$$

L'equazione (2) si scrive allora

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (3)$$

Si osserva che se P va a coincidere con uno degli estremi del semiasse minore HK (fig. 16), per esempio con H, si forma un triangolo isoscele FHF'. Ora, siccome risulta sempre

$$\overline{FH}+\overline{HF'}=2a,$$

si avrà

$$\overline{HF}=\overline{HF'}=a,$$

e, per il teorema di Pitagora,

$$\overline{OH}=\sqrt{a^2-c^2}=b.$$

Si capisce così perché b indica proprio la lunghezza del semiasse minore OH.

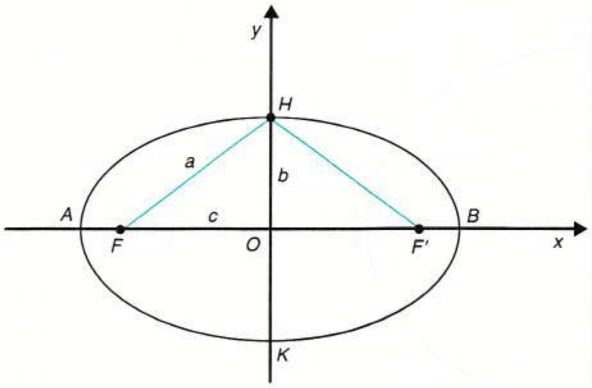


Fig. 16

4. Grafico dell'ellisse a partire dalla sua equazione normale

Cominciamo con un esempio numerico. L'equazione

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

rappresenta un'ellisse, dato che è del tipo

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

I semiassi a, b, sono:

$$a=5, \qquad b=4,$$

perché

$$a^2=25, \qquad b^2=16.$$

Sappiamo che deve essere

$$a^2-c^2=b^2 \qquad \text{da cui} \qquad c^2=a^2-b^2;$$

perciò, in questo caso, si ha

$$c=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3.$$

Siamo ora in grado di tracciare, approssimativamente, il grafico dell'ellisse (fig. 17), valendosi anche della proprietà

$$\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$$

ossia, nel nostro caso,

$$\overline{PF}+\overline{PF'}=10.$$

È chiaro che il procedimento ora esposto ha carattere generale. Se l'equazione di un'ellisse (fig. 18) è

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

a indica la lunghezza del semiasse maggiore $\overline{OA}=\overline{OB}$

b indica la lunghezza del semiasse minore $\overline{OH}=\overline{OK}$

c indica la distanza focale, data da $\sqrt{a^2-b^2}$.

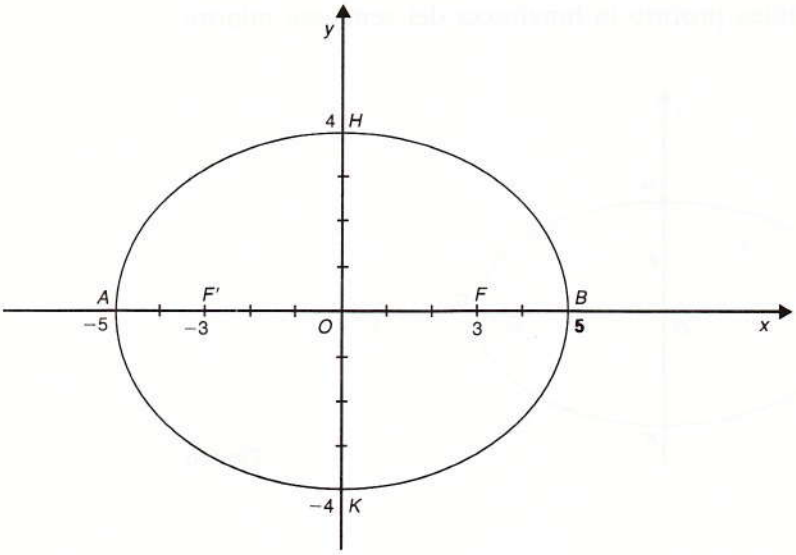


Fig. 17

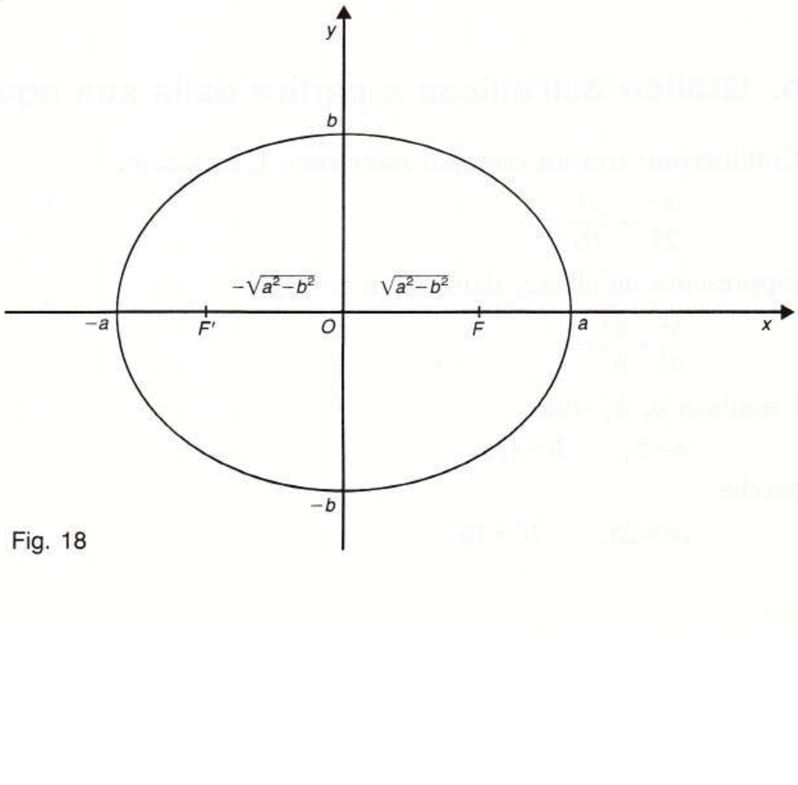


Fig. 18

5. Varie forme di ellisse. Il cerchio

Abbiamo visto che l'equazione dell'ellisse avente per centro l'origine e per assi gli assi coordinati è

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

dove a, b rappresentano le lunghezze dei semiassi (fig. 19). Un caso particolare si ha quando $b=a$ (fig. 20); l'equazione diventa

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

ossia

$$x^2+y^2=a^2.$$

Si tratta di un **cerchio** di raggio a.

È interessante passare *in modo dinamico* dall'ellisse al cerchio (fig. 21). Si ha che via via che i fuochi F, F' si avvicinano al centro O, e quindi c diminuisce, l'ellisse tende al cerchio; quando poi risulta

$$F\equiv F'\equiv 0 \qquad \text{e quindi} \qquad c=0,$$

si ha il cerchio d'equazione

$$x^2+y^2=a^2.$$

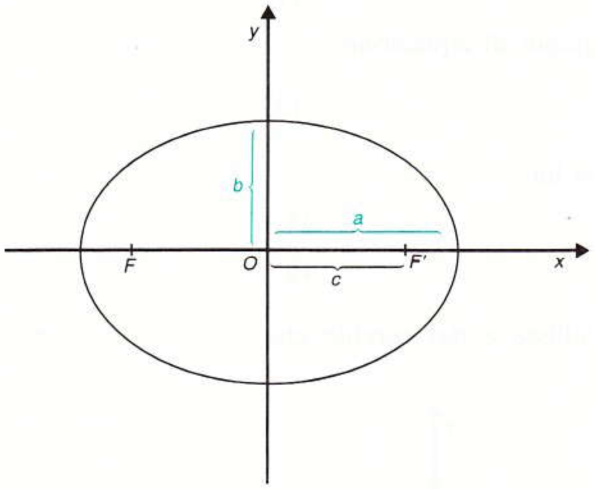


Fig. 19

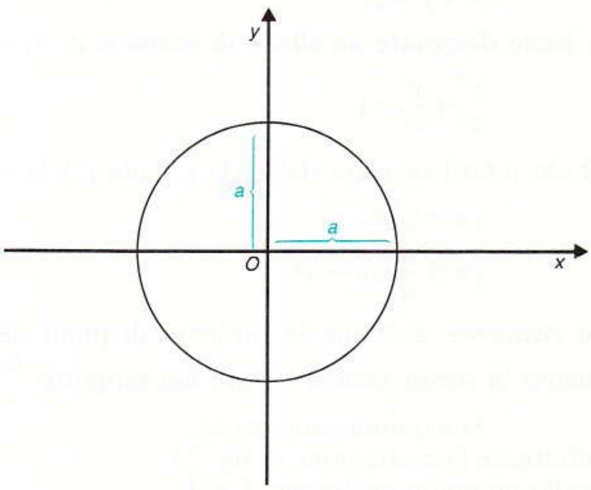


Fig. 20

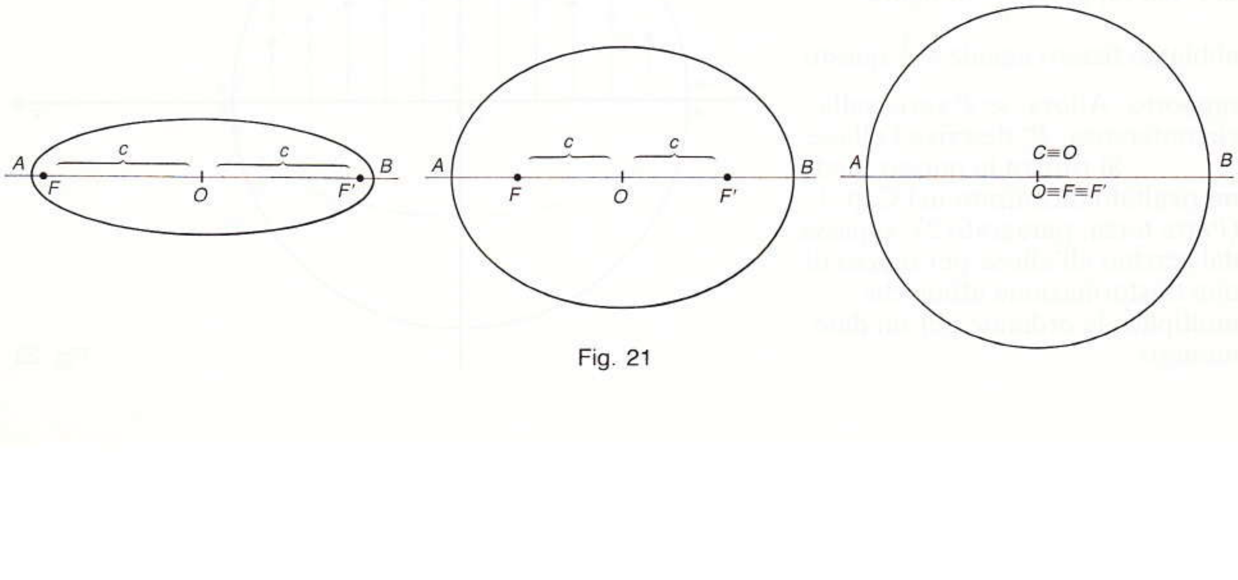


Fig. 21

Se, invece, i fuochi si allontanano uno dall'altro (fig. 22), si ottengono ellissi sempre più "allungate", fino a che, al limite, l'ellisse degenera nel segmento AB.

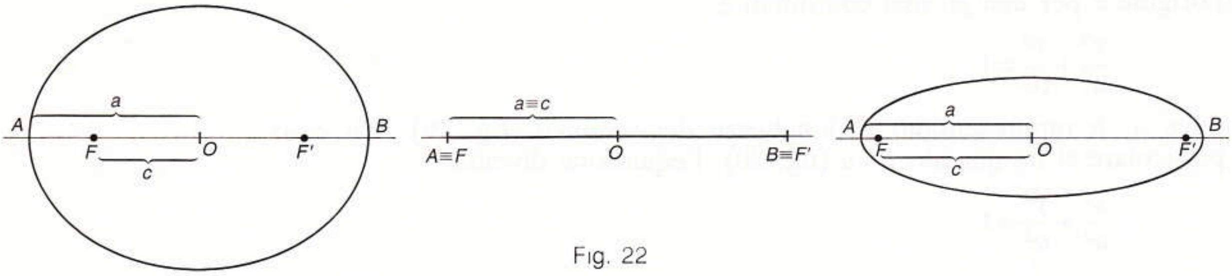


Fig. 22

La forma dell'ellisse dipende dunque dalla distanza che i fuochi hanno dal centro O rispetto alla lunghezza dell'asse maggiore AB, cioè del rapporto $\frac{c}{a}=e$.

Ci rendiamo ora conto dell'origine del termine **eccentricità**: proviene dal latino "*ex-centrum*", che vuol dire "fuori dal centro", e dice quindi di quanto l'ellisse "è schiacciata". Il cerchio è un'ellisse che ha eccentricità $e=0$; il segmento AB, ottenuto al limite, è un'ellisse di eccentricità $e=1$.

Una volta disegnato il cerchio di centro O e raggio a, e quindi di equazione

$$x^2+y^2=a^2. \tag{1}$$

è facile disegnare un'ellisse di semiassi a, b, e quindi di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2}$$

Basta infatti ricavare dalla (1) e dalla (2) la y; si ha

$$y=\pm\sqrt{a^2-x^2} \tag{1'}$$

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}. \tag{2'}$$

Si riconosce così che le ordinate di punti dell'ellisse e del cerchio che hanno la stessa ascissa x sono nel rapporto $\frac{b}{a}$.

Si è quindi condotti ad effettuare la costruzione di fig. 23: scelto un punto qualunque P del cerchio (escludiamo i punti A e B), per avere il punto corrispondente P' dell'ellisse basta alterare l'ordinata di P nel rapporto $\frac{b}{a}$; in figura abbiamo fissato uguale a $\frac{1}{2}$ questo rapporto. Allora, se P varia sulla circonferenza, P' descrive l'ellisse.

Si ritrova in questo modo un risultato incontrato nel Cap. 1 (Parte terza, paragrafo 2): si passa dal cerchio all'ellisse per mezzo di una trasformazione affine che moltiplica le ordinate per un dato numero.

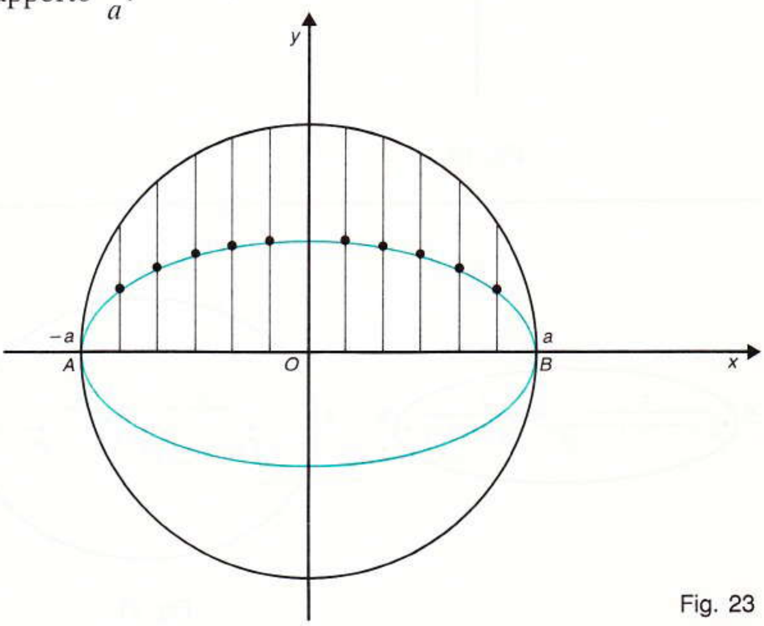


Fig. 23

2. Parte quarta
L'iperbole

1. L'equazione dell'iperbole in forma normale

Nella Parte prima, paragrafo 7, abbiamo ottenuto per l'iperbole (fig. 1) avente fuoco $F(1,0)$, direttrice d d'equazione $x=-\frac{1}{2}$, ed eccentricità $e=2$, la seguente equazione

$$3x^2-y^2+6x=0. \tag{1}$$

Vogliamo ora operare una trasformazione del piano in modo da avere l'equazione di questa iperbole in forma più espressiva: *la forma normale.*

Cominciamo col determinare le coordinate dei punti d'intersezione dell'iperbole con l'asse delle x; oltre al punto O, si ottiene l'ascissa del punto B risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 3x^2-y^2+6x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} 3x^2+6x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} 3x(x+2)=0 \\ y=0 \end{cases} < \begin{matrix} 3x=0 & \rightarrow x_1=0 \\ x+2=0 & \rightarrow x_2=-2. \end{matrix}$$

Si ottengono i punti (fig. 2)

$$O(0,0) \quad \text{e} \quad B(-2,0).$$

Il punto medio del segmento OB è

$$C(-1,0).$$

Portiamo allora l'origine nel punto C. Dovremo operare una traslazione di 1 lungo l'asse delle x verso destra (fig. 3). La traslazione è descritta dalle seguenti equazioni (Cap. 1, Parte terza, paragrafo 5):

$$\begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x=x'-1 \\ y=y'. \end{cases}$$

Questa traslazione trasforma l'equazione (1) nella

$$3(x'-1)^2-y'^2+6(x'-1)=0$$

ossia

$$3x'^2-6x'-y'^2+6x'-6=0$$

da cui

$$3x'^2-y'^2=3.$$

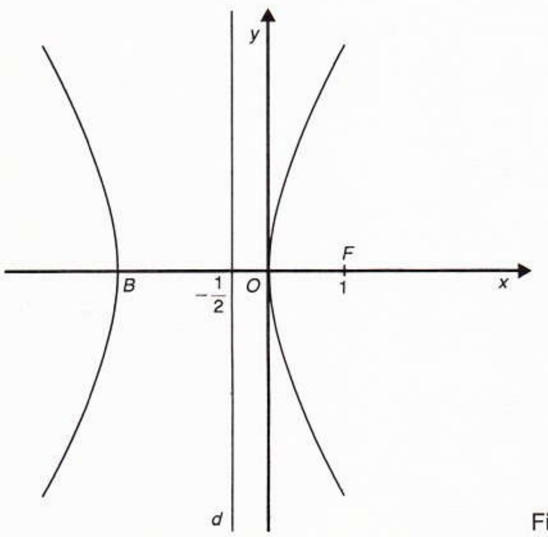


Fig. 1

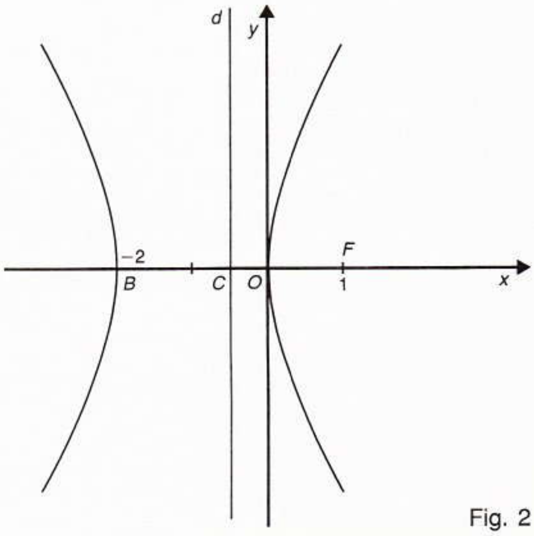


Fig. 2

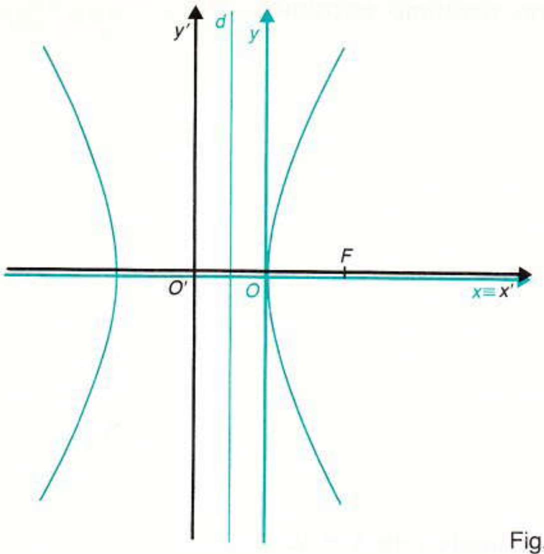


Fig. 3

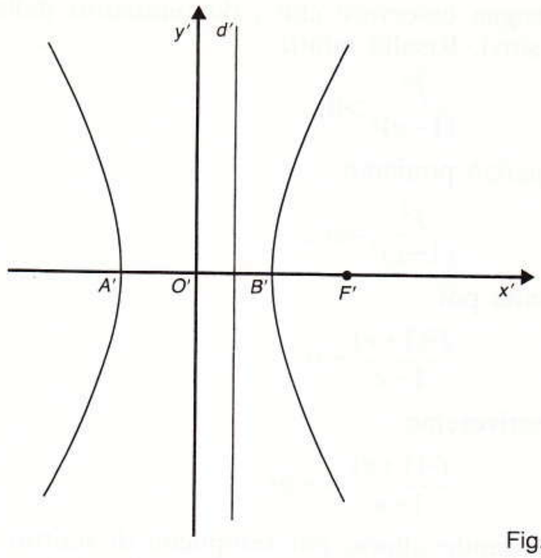


Fig. 4

Dividendo i due membri per il termine noto, si ottiene

$$x'^2-\frac{y'^2}{3}=1. \qquad (2)$$

I punti d'intersezione dell'iperbole con l'asse delle x (fig. 4) sono ora i seguenti

$$A'(-1,0), \qquad B'(1,0);$$

il fuoco è

$$F'(2,0),$$

e la direttrice d' ha l'equazione

$$x'=\frac{1}{2}.$$

L'equazione (2) che abbiamo ottenuto "assomiglia" a quella dell'ellisse; si nota una sola diversità: i monomi x'^2 e $\frac{y'^2}{3}$ sono uniti dal segno "$-$" anziché dal segno "$+$".

Si capisce che se si svolge, nel caso generale, il procedimento ora seguito in un caso numerico, si è condotti a ripetere gli stessi calcoli eseguiti nella Parte terza, paragrafo 1, a proposito dell'ellisse. Infatti l'equazione dell'iperbole che ha fuoco $F(f,0)$ ed eccentricità e, si presenta ancora nella forma

$$(1-e^2)x^2+y^2-2f(1+e)x=0,$$

ma, ora, risulta sempre

$$e>1.$$

La stessa traslazione eseguita per l'ellisse e cioè

$$\begin{cases} x'=x-\dfrac{f}{1-e} \\ y'=y \end{cases}$$

conduce a scrivere l'equazione dell'iperbole nella forma

$$\frac{x'^2}{\dfrac{f^2}{(1-e)^2}}+\frac{y'^2}{\dfrac{f^2(1+e)}{1-e}}=1. \qquad (3)$$

Bisogna osservare che i denominatori della (3) non risultano entrambi positivi. Risulta infatti

$$\frac{f^2}{(1-e)^2}>0,$$

e perciò poniamo

$$\frac{f^2}{(1-e)^2}=a^2;$$

risulta poi

$$\frac{f^2(1+e)}{1-e}<0$$

e scriveremo

$$\frac{f^2(1+e)}{1-e}=-b^2.$$

Indicando allora, per semplicità di scrittura, le coordinate con x e y, si arriva all'**equazione normale dell'iperbole** (fig. 5):

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

La curva interseca l'asse delle x nei punti

$$A(-a,0) \qquad \text{e} \qquad B(a,0),$$

con

$$a=\frac{f}{1-e};$$

il fuoco F si trova nel punto

$$F(c,0)$$

con

$$c=\frac{fe}{1-e}.$$

Risulta dunque, anche per l'iperbole (4), che

$$\overline{OB}=\overline{OA}=a=\frac{f}{1-e}$$

$$\overline{OF}=c=\frac{fe}{1-e}$$

e quindi

$$c=a\cdot e,$$

per cui l'eccentricità e è data da

$$e=\frac{\overline{OF}}{\overline{OB}}=\frac{c}{a}.$$

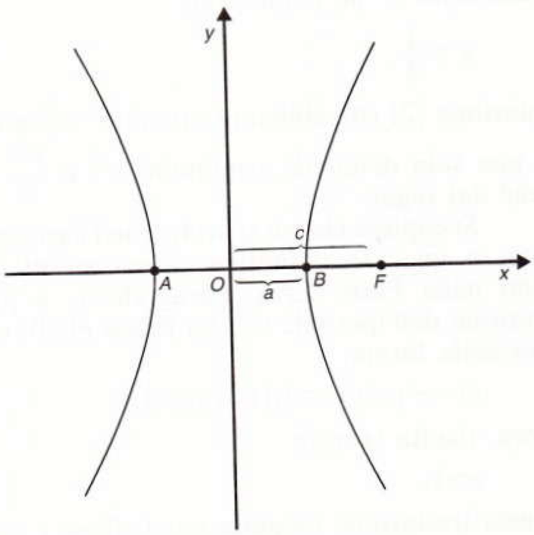


Fig. 5

2. La proprietà focale dell'iperbole. Una semplice costruzione

L'equazione dell'iperbole ottenuta nel paragrafo precedente

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

presenta sia x che y al 2° grado. Ciò significa che, come nel caso dell'ellisse, l'equazione rimane inalterata quando si opera una simmetria rispetto all'asse delle x o rispetto all'asse delle y; quindi, anche l'iperbole ha gli assi coordinati come assi di simmetria. Questa proprietà porta a scoprire che anche l'iperbole ha **un altro fuoco, F', e un'altra direttrice, d',** simmetrici di F e di d rispetto all'asse delle y (fig. 6).

L'esistenza di due fuochi e di due direttrici conduce a scoprire una notevole proprietà dell'iperbole, sulle distanze di un punto dell'iperbole dai due fuochi. Riferiamoci alla fig. 7, e consideriamo un punto P che varia sull'iperbole. Si ha:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pd}}=e \qquad \text{ossia} \qquad \overline{PF}=e\cdot\overline{Pd}$$

$$\frac{\overline{PF'}}{\overline{Pd'}}=e \qquad \text{ossia} \qquad \overline{PF'}=e\cdot\overline{Pd'}$$

Ora, se P percorre il ramo più vicino al fuoco F, risulta:

$$\overline{PF'}-\overline{PF}=e(\overline{Pd'}-\overline{Pd})=e\cdot\overline{DD'};$$

se, invece, P percorre il ramo più vicino al fuoco F', si ha:

$$\overline{PF}-\overline{PF'}=e(\overline{Pd}-\overline{Pd'})=e\cdot\overline{DD'}.$$

Ora, siccome

$$e=\text{costante}, \qquad \overline{DD'}=\text{costante},$$

si avrà

$$\overline{PF'}-\overline{PF}=\text{costante} \qquad (\text{o } \overline{PF}-\overline{PF'}=\text{costante}).$$

Si conclude che **l'iperbole è il luogo dei punti tali che la differenza delle distanze dai due fuochi è costante.**

Il valore della costante si può scoprire se si porta il punto P a coincidere con A (o con B); si ha:

$$\overline{AF'}-\overline{AF}=2a \qquad (\text{o } \overline{BF}-\overline{BF'}=2a).$$

Quindi, per un punto P che percorre un ramo d'iperbole si ha:

$$\overline{PF'}-\overline{PF}=2a \qquad (\text{o } \overline{PF'}-\overline{PF}=2a).$$

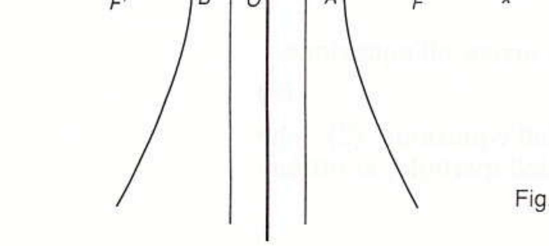


Fig. 6

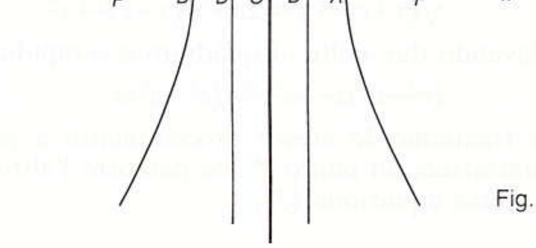


Fig. 7

La **costruzione** a cui conduce questa proprietà è meno immediata di quella relativa all'ellisse, ma è possibile eseguirla valendosi sempre di un pezzo di spago. Ecco come (fig. 8): si fa passare uno spago attraverso due fori, F e F', praticati in una tavoletta di legno, posta in posizione orizzontale. Si tiene lo spago al di sotto della tavoletta in modo che, al di sopra, si formi un triangolo di base FF' e vertice opposto un punto P, che corrisponde alla punta di una matita. La differenza fra i lati PF e PF' avrà un certo valore k; se si tira lo spago al di sotto della tavoletta, come è indicato in figura, la matita, che obbliga lo spago a essere sempre ben teso, traccia sul piano della tavoletta un arco di curva. E si tratta di un arco d'iperbole di fuochi F e F' perché, quando si tira lo spago, ai due tratti PF e PF' viene via via tolta la stessa lunghezza; risulta quindi, sempre

$$\overline{PF}-\overline{PF'}=k.$$

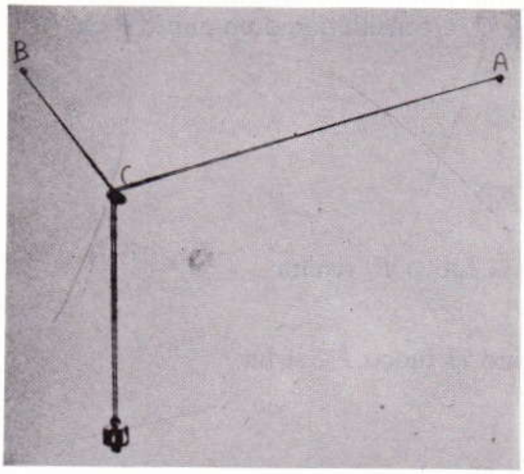


Fig. 8

3. L'equazione dell'iperbole in base alla proprietà focale

Abbiamo visto che una proprietà caratteristica dell'iperbole è questa: **l'iperbole è il luogo dei punti P del piano tali che è costante la differenza da due punti fissi, F, F', detti fuochi.** Si ha dunque

$$\overline{PF'}-\overline{PF}=2a \tag{1}$$

$$\overline{PF}-\overline{PF'}=2a. \tag{2}$$

Sia la (1) che la (2) si possono tradurre in equazione. Riferiamoci alla fig. 9 dove abbiamo scelto come asse delle ascisse la retta FF' e come asse delle ordinate la perpendicolare alla FF' nel punto medio O. Si ha:

$$F(c,0), \qquad F'(-c,0),$$

$$\overline{PF'}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, \qquad \overline{PF}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

La relazione (1) si traduce analiticamente così:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

ossia

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Elevando due volte al quadrato e semplificando si arriva all'equazione:

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=(c^2-a^2)a^2. \tag{3}$$

Se ripetiamo lo stesso procedimento a partire dall'equazione (2), che caratterizza un punto P che percorre l'altro ramo dell'iperbole, si ottiene la stessa equazione (3).

Dunque, l'equazione (3) esprime analiticamente la condizione che deve soddisfare un punto $P(x,y)$ che percorre l'iperbole.

Procedendo come nel caso dell'ellisse, dividiamo i due membri della (3) per il termine noto $a^2(c^2-a^2)$; si ottiene:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1.$$

Ora, siccome

$$c>a \qquad \text{e quindi} \qquad c^2>a^2,$$

risulta sempre

$$c^2-a^2>0,$$

e possiamo porre

$$c^2-a^2=b^2.$$

Otteniamo così l'equazione dell'iperbole nella forma già nota

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{4}$$

4. Grafico dell'iperbole a partire dalla sua equazione normale. Gli asintoti

Cominciamo con un esempio numerico. È data l'equazione

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1. \tag{1}$$

Riconosciamo che si tratta di un'iperbole dato che è del tipo

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

I punti in cui la curva interseca l'asse delle x sono $A(-a,0)$ e $B(a,0)$; i fuochi sono $F(c,0)$ e $F'(-c,0)$. È facile determinare il valore di a e di c (fig. 9); si ha

$$a^2=16 \qquad \text{da cui} \qquad a=\pm 4$$

$$c^2-a^2=9 \qquad \text{da cui} \qquad c=\pm\sqrt{9+16}=\pm\sqrt{25}=\pm 5.$$

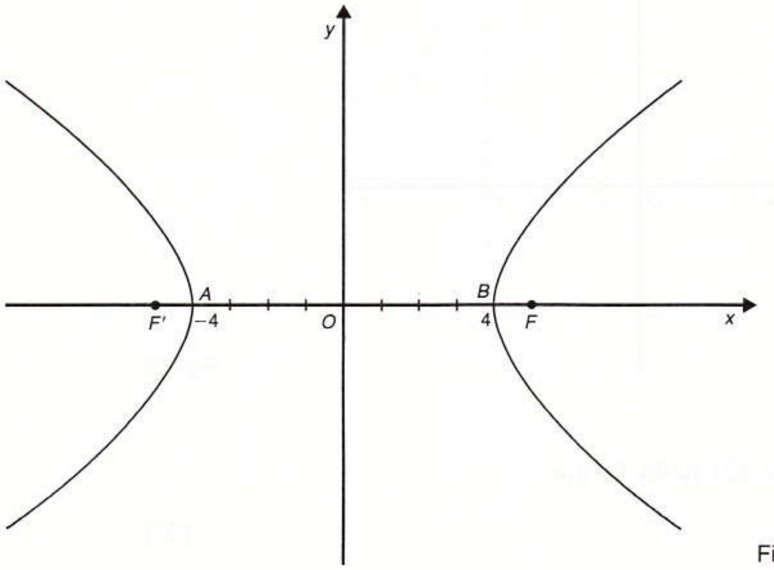


Fig. 9

Dunque la curva interseca l'asse delle x nei punti

$$A(-4{,}0) \quad \text{e} \quad B(4{,}0),$$

ed ha i fuochi

$$F'(-5{,}0) \quad \text{e} \quad F(5{,}0).$$

Per disegnare l'iperbole, o ci si vale di uno spago procedendo come è stato illustrato nel paragrafo 2, o ci si basa sull'equazione (1). In quest'ultimo caso si esplicita la (1) rispetto ad y; si scrive così:

$$\frac{y^2}{9}=\frac{x^2}{16}-1$$

da cui

$$y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}.$$

Dunque, la curva è descritta dalle funzioni seguenti

$$y=\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16} \tag{2}$$

$$y=-\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}. \tag{3}$$

Esaminiamole separatamente. Consideriamo prima la (2): si nota che si ottengono valori reali di y solo se risulta positiva l'espressione scritta sotto il segno di radice. Quindi, deve essere:

$$x^2-16\geq 0$$

e perciò

$$x\geq 4 \quad \text{o} \quad x\leq -4.$$

In corrispondenza a questi valori di x si ottengono sempre valori positivi di y. La curva si trova dunque al di sopra dell'asse delle x e al di fuori della striscia limitata dalle rette d'equazione

$$x=4 \quad \text{e} \quad x=-4,$$

nella zona colorata in fig. 10.

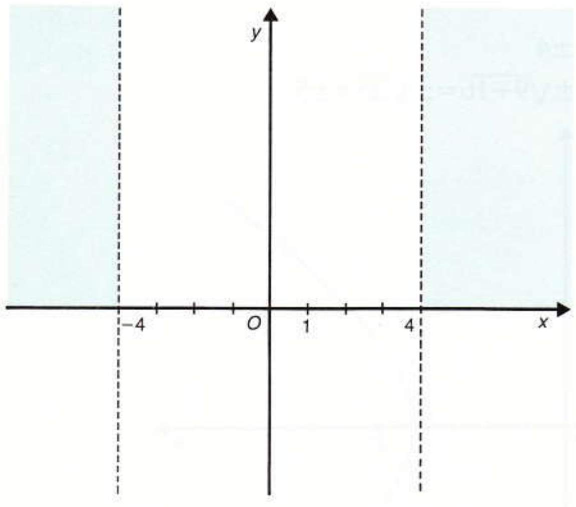


Fig. 10

Scrivendo poi l'equazione (2) nella forma

$$y=\frac{3}{4}x\sqrt{1-\frac{16}{x^2}} \tag{2'}$$

si capisce che se si assegnano ad x valori positivi sempre più grandi, il termine

$$\frac{16}{x^2}$$

risulta sempre più piccolo, e diventa trascurabile rispetto ad 1. In tal caso, l'espressione

$$1-\frac{16}{x^2}$$

si avvicina sempre di più al valore 1, come risulta anche dalla tabella

x	$1-\frac{16}{x^2}$
10	0,84
100	0,9984
1000	0,999984
.	.
.	.
.	.

Allora la funzione

$$y=\frac{3}{4}x\sqrt{1-\frac{16}{x^2}}$$

tende alla

$$y=\frac{3}{4}x. \qquad (4)$$

Ora, la (4) è l'equazione di una retta r passante per l'origine; siamo dunque condotti a dire che: se nella (2′) si assegnano ad x valori positivi sempre più grandi, si individua un punto P che "sfugge" sull'iperbole, avvicinandosi sempre di più alla retta r (fig. 11).

La retta r prende il nome di **asintoto**; questa parola viene dalla lingua greca, in cui significa "non incontro", e mette in evidenza proprio il fatto che l'iperbole, pur avvicinandosi sempre più a questa retta, non l'incontra.

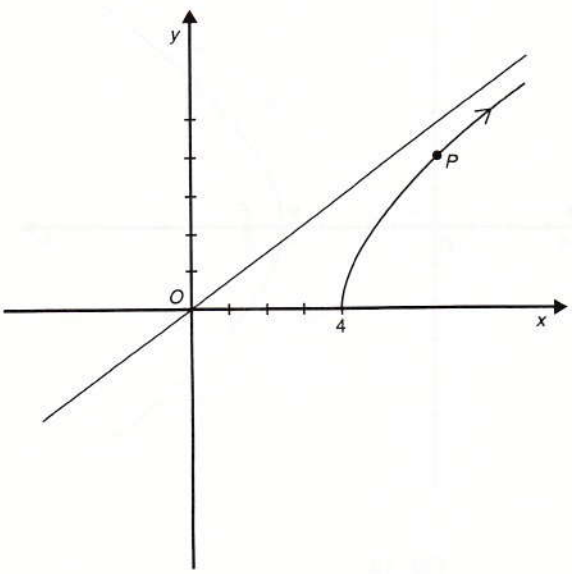


Fig. 11

Analoghe considerazioni si possono ripetere a partire dalla funzione

$$y=-\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16} \qquad (3)$$

che possiamo scrivere nella forma

$$y=-\frac{3}{4}x\sqrt{1-\frac{16}{x^2}}. \qquad (3')$$

Si scopre così che l'iperbole ha un altro asintoto r' (fig. 12) d'equazione:

$$y=-\frac{3}{4}x.$$

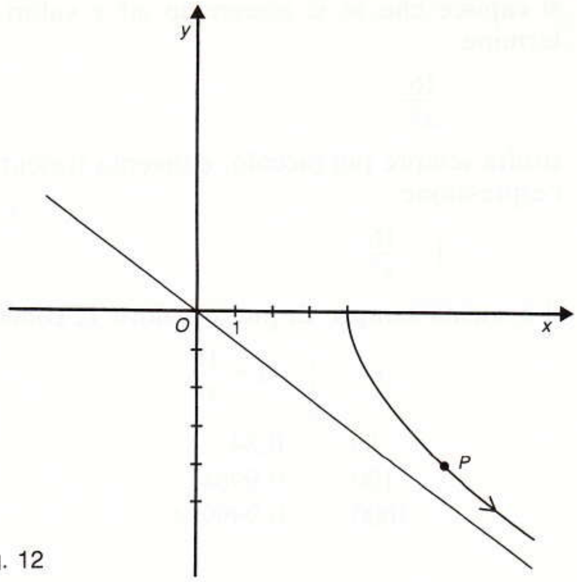


Fig. 12

È facile ora completare il disegno tenendo presente la simmetria della curva rispetto all'asse delle y (fig. 13).

Si conclude che l'iperbole d'equazione

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

incontra l'asse delle x nei punti

$$A(-4,0) \qquad \text{e} \qquad B(4,0),$$

ha come fuochi i punti

$$F(5,0) \qquad \text{e} \qquad F'(-5,0),$$

e come asintoti le rette r, r' d'equazione

$$y=\frac{3}{4}x \qquad \text{e} \qquad y=-\frac{3}{4}x.$$

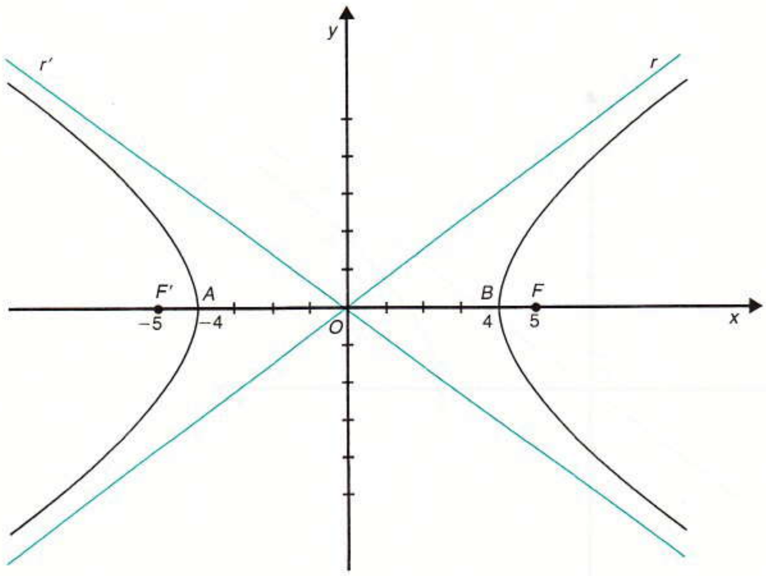


Fig. 13

Il procedimento ora esposto ha carattere generale e può essere ripetuto per una qualunque iperbole d'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{5}$$

La curva incontra l'asse delle x nei punti

$$A(-a,0) \quad \text{e} \quad B(a,0);$$

la posizione dei fuochi può essere determinata tenendo presente che

$$b^2=c^2-a^2,$$

e quindi

$$c^2=b^2+a^2$$

da cui

$$c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Si ha:

$$F(-\sqrt{a^2+b^2},0) \quad \text{e} \quad F'(\sqrt{a^2+b^2},0).$$

Se poi dall'equazione (5) si ricava la y, si ottengono le due funzioni

$$y=\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} \tag{6}$$

$$y=-\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}. \tag{7}$$

Si osserva che assegnando alla x valori sempre più grandi l'iperbole si avvicina alle rette r, r' d'equazione

$$y=\frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y=-\frac{b}{a}x,$$

rette che sono gli asintoti della curva.

Infine, si può completare il disegno tenendo presente la simmetria della curva rispetto all'asse delle y; si ottiene un grafico come quello di fig. 14.

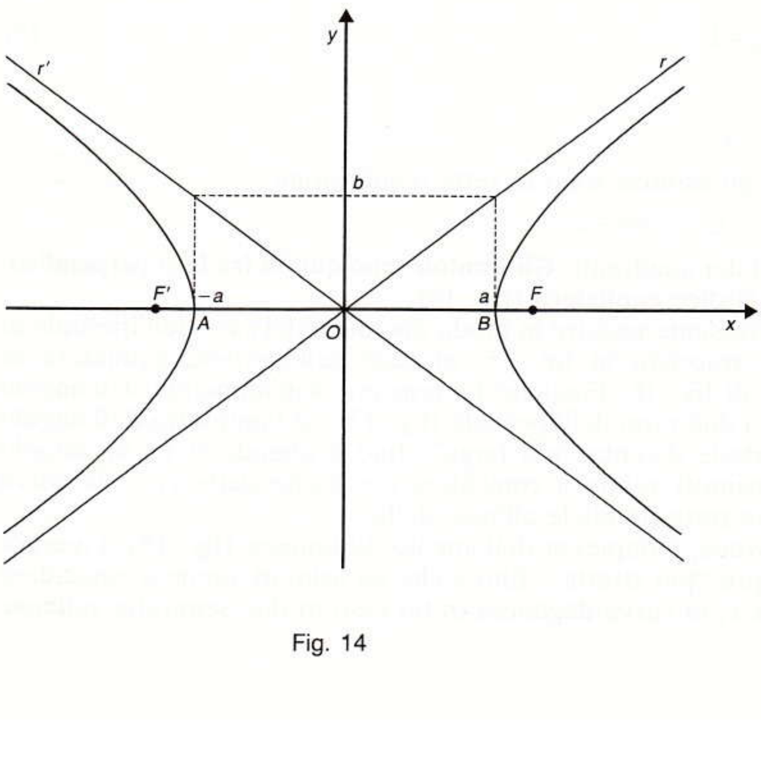


Fig. 14

Data l'equazione dell'iperbole nella forma

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

è facile determinare l'equazione degli asintoti. Si nota infatti che l'equazione si può scrivere così:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=1;$$

ora, uguagliando a zero il 1° membro, si ottengono proprio le equazioni degli asintoti. Infatti, dall'espressione

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0,$$

si ricava

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \qquad \text{e cioè} \qquad y=\frac{b}{a}x$$

oppure

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \qquad \text{e cioè} \qquad y=-\frac{b}{a}x.$$

5. Varie forme di iperbole. L'iperbole equilatera

In fig. 15 è disegnata un'iperbole d'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1; \tag{5}$$

gli asintoti sono le rette d'equazione

$$y=\frac{b}{a}x \qquad \text{e} \qquad y=-\frac{b}{a}x.$$

Si ha un caso particolare quando risulta

$$b=a;$$

l'equazione dell'iperbole diventa:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \tag{8}$$

ossia

$$x^2-y^2=a^2.$$

In questo caso gli asintoti sono le rette d'equazione

$$y=x \qquad \text{e} \qquad y=-x,$$

cioè le bisettrici dei quadranti. **Gli asintoti sono** quindi **fra loro perpendicolari**; l'iperbole si dice **equilatera** (fig. 16).

È interessante passare in modo dinamico dal caso dell'iperbole di equazione (5), tracciata in fig. 15, al caso dell'iperbole equilatera di equazione (8), di fig. 16. Fissiamo l'attenzione sull'ampiezza dell'angolo che "contiene" i due rami dell'iperbole (fig. 17): se l'ampiezza dell'angolo aumenta, l'iperbole diventa "più larga", fino a quando si ha un angolo piatto (i due asintoti vanno a coincidere con l'asse delle y), e la curva degenera in due rette parallele all'asse delle y.

Se, invece, l'ampiezza dell'angolo diminuisce (fig. 18), l'iperbole diventa sempre "più stretta", fino a che gli asintoti vanno a coincidere con l'asse delle x; la curva degenera in tal caso in due semirette sull'asse delle x.

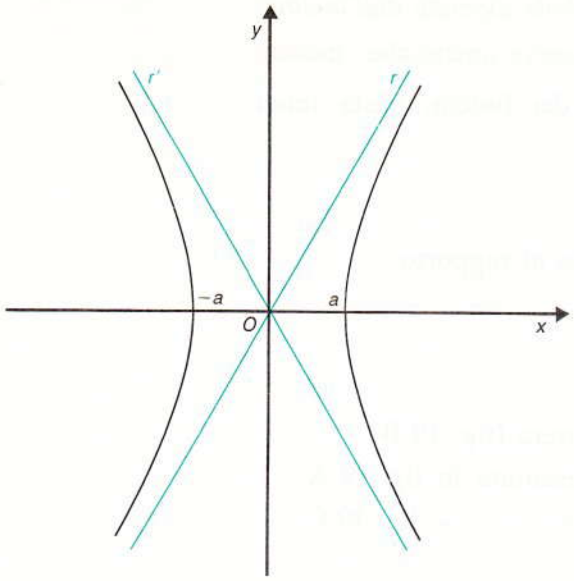


Fig. 15

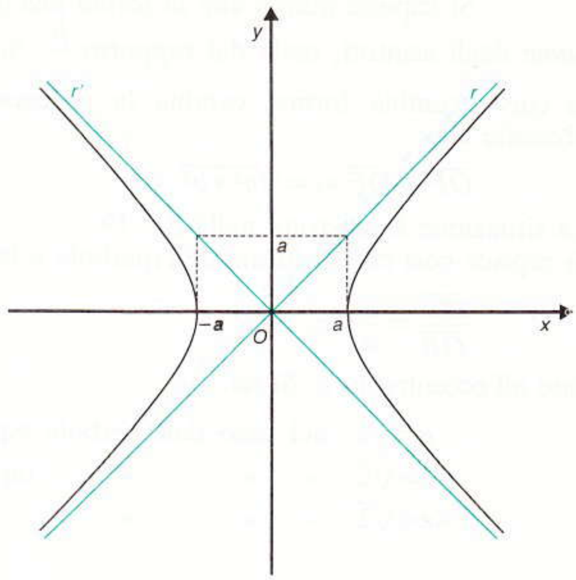


Fig. 16

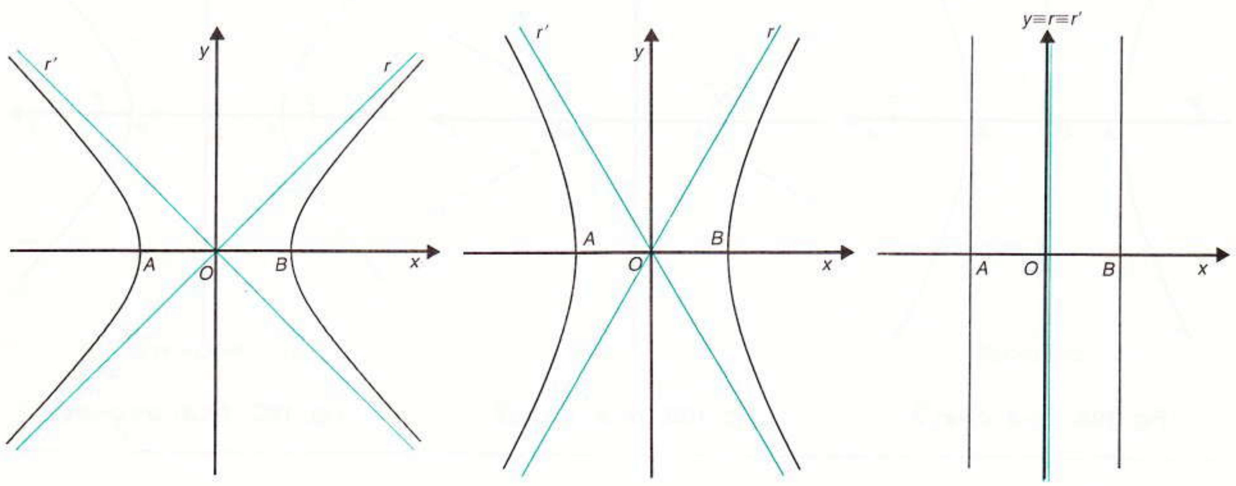


Fig. 17

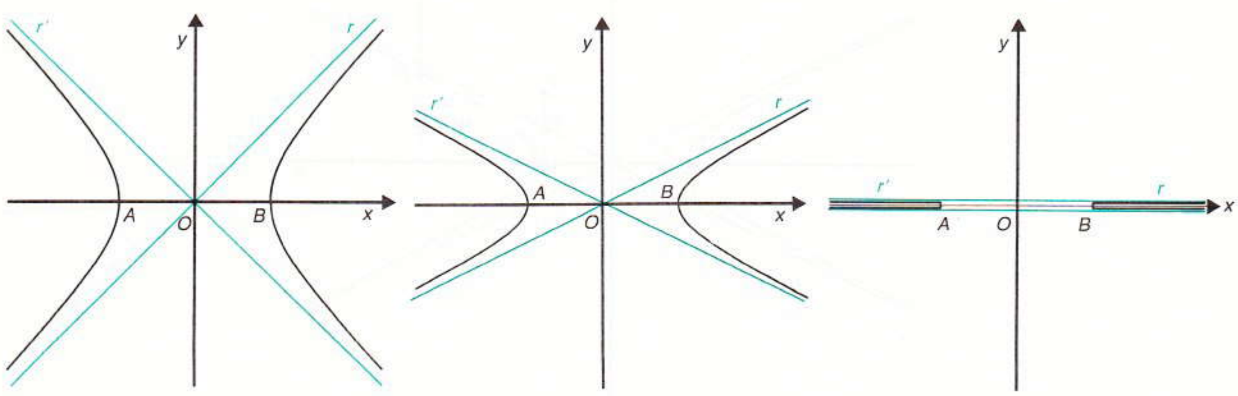


Fig. 18

Si capisce quindi che *la forma dell'iperbole dipende dall'inclinazione* degli asintoti, ossia dal rapporto $\frac{b}{a}$. Si osserva anche che, mentre la curva cambia forma, cambia la posizione dei fuochi: basta tener presente che

$$\overline{OF}\,'=\overline{OF}=c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

La situazione è illustrata nella fig. 19.
Si capisce così che la forma dell'iperbole è legata al rapporto

$$\frac{\overline{OF}}{\overline{OB}}=\frac{c}{a}=e,$$

cioè all'eccentricità e. Si ha:

$e=\sqrt{2}$ nel caso dell'iperbole equilatera (fig. 19 B)
$e>\sqrt{2}$ » » » rappresentata in fig. 19 A
$1<e<\sqrt{2}$ » » » » » fig. 19 C.

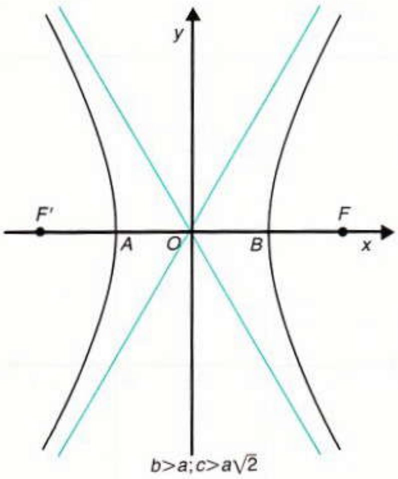


Fig. 19A. $b>a$ $c>a\sqrt{2}$

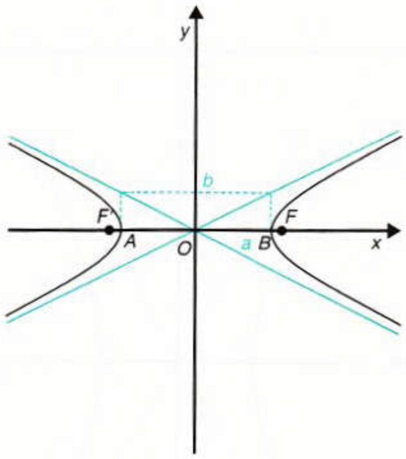


Fig. 19B. $b=a$; $c=a\sqrt{2}$

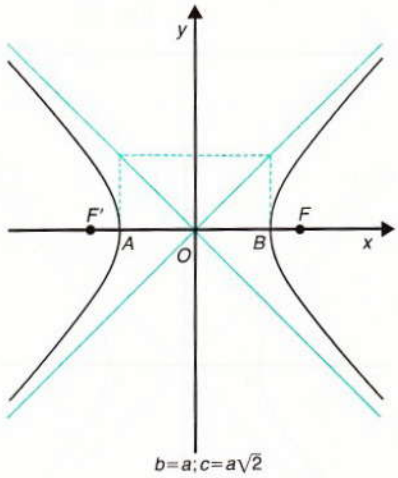


Fig. 19C. $b<a$; $a<c<a\sqrt{2}$

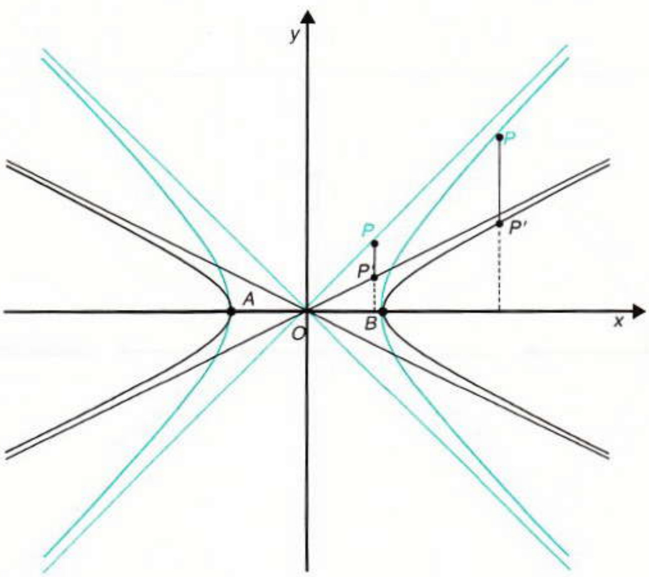


Fig. 20

Per disegnare l'iperbole d'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

si può partire dall'iperbole equilatera d'equazione

$$x^2-y^2=a^2$$

ed alterarne le ordinate nel rapporto $\frac{b}{a}$ (fig. 20), seguendo un ragionamento analogo a quello esposto a proposito dell'ellisse (Parte terza, paragrafo 5).

6. Un'altra forma dell'equazione dell'iperbole equilatera

Abbiamo visto che l'iperbole equilatera d'equazione

$$x^2-y^2=a^2 \tag{1}$$

ha per asintoti le bisettrici dei quadranti (fig. 21) e cioè

$$y=x \qquad \text{e} \qquad y=-x,$$

due rette che sono fra loro perpendicolari.

Abbiamo anche visto che le equazioni degli asintoti dell'iperbole si possono ottenere uguagliando a zero il 1° membro dell'equazione dell'iperbole; nel caso della (1) si scriverà:

$$(x+y)(x-y)=0.$$

Ora, dato che gli asintoti sono fra loro perpendicolari, possiamo scegliere proprio questi asintoti come assi cartesiani X ed Y e siccome l'asse delle X e l'asse delle Y hanno per equazione rispettivamente

$$Y=0 \qquad \text{e} \qquad X=0,$$

potremo scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera nella forma

$$XY=k. \tag{2}$$

Si tratta ovviamente di un'iperbole uguale a quella dell'equazione (1), ma ruotata di 45° attorno ad O: nella fig. 22 sono stati disegnati in nero gli antichi assi cartesiani.

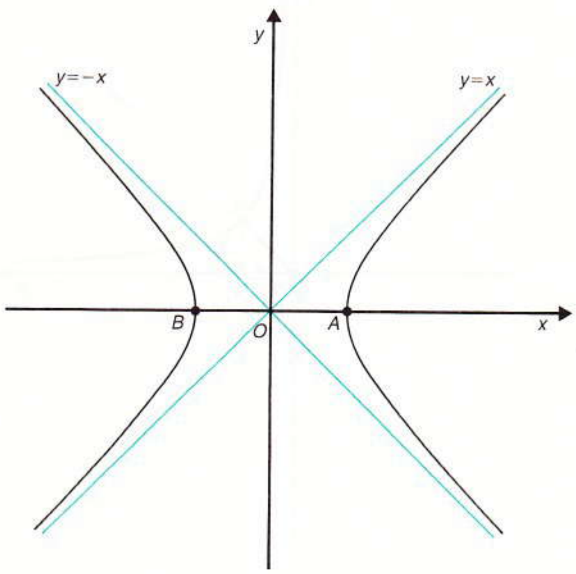


Fig. 21

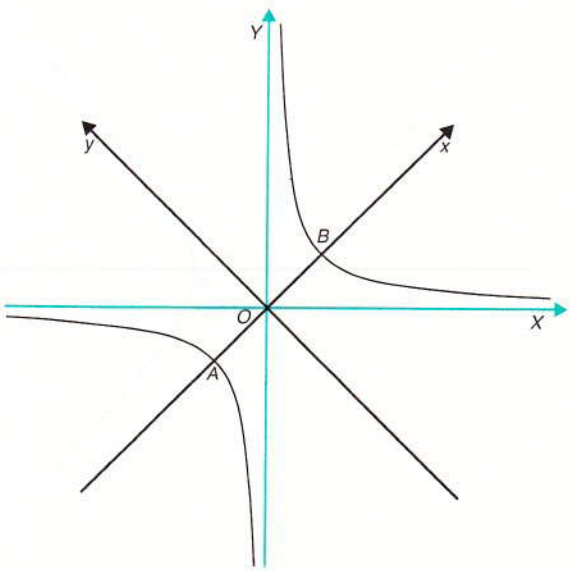


Fig. 22

Si capisce che i termini k e a^2, che compaiono nell'equazione dell'iperbole – forma (2) e (1) –, dovranno essere legati fra loro. Troviamo la relazione che li lega fissando l'attenzione sulle figg. 23 e 24.

Riferiamoci per esempio al punto A. Osserviamo che nel riferimento di fig. 23 A ha le coordinate $(a,0)$; nel riferimento di fig. 24, le coordinate di A sono $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$. Ora, l'equazione dell'iperbole, che, nel nuovo riferimento, è

$$XY=k,$$

deve essere soddisfatta da ogni punto dell'iperbole, e in particolare dal punto $A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$; deve dunque essere

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}=k,$$

e da questa relazione risulta

$$k=\frac{a^2}{2}.$$

Dunque, l'iperbole equilatera d'equazione

$$x^2-y^2=a^2$$

si scrive anche nella forma

$$XY=\frac{a^2}{2},$$

(Da notare che la forma $xy=k$ è stata già incontrata nel cap. 1, Parte seconda, paragrafo 8).
La forma

$$xy=k$$

è particolarmente significativa perché il suo grafico offre un'espressiva interpretazione di una proprietà geometrica: il prodotto di due numeri positivi, x e y, si può infatti interpretare come l'area k di un rettangolo che ha dimensioni x e y.

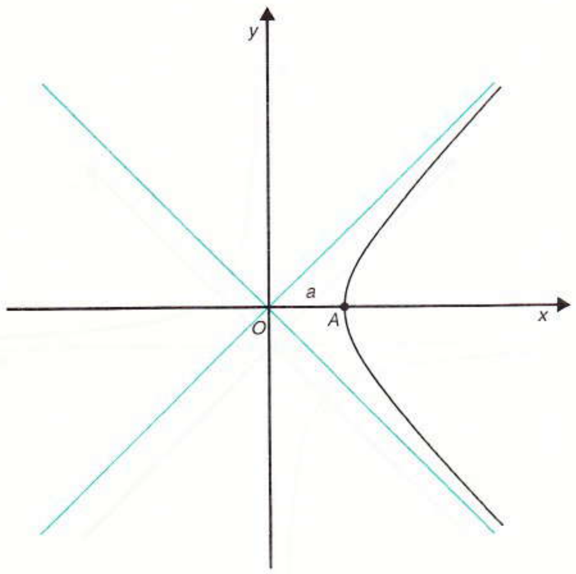


Fig. 23

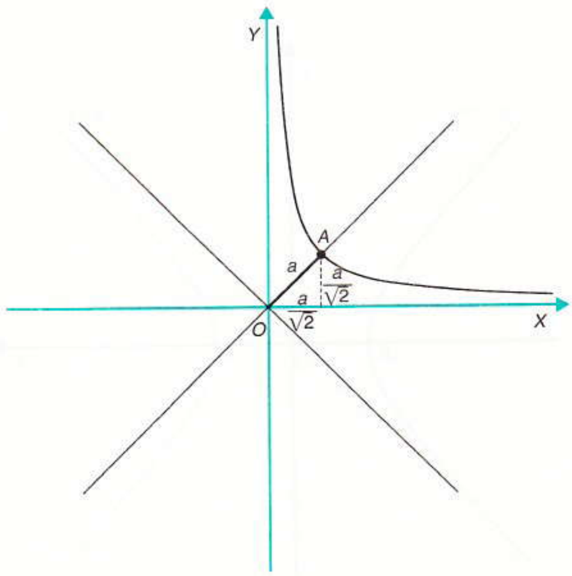


Fig. 24

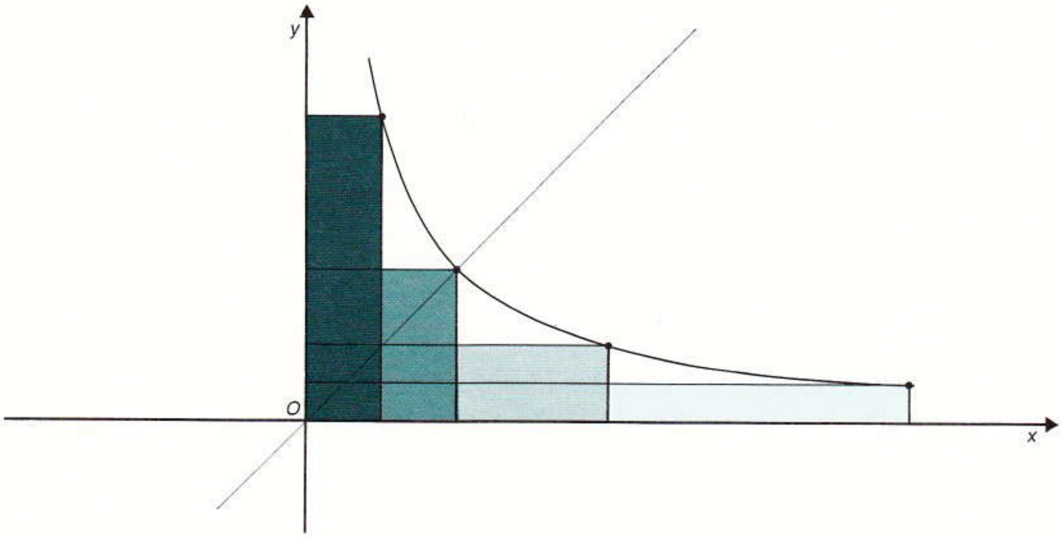


Fig. 25

In fig. 25 sono disegnati dei rettangoli di area 16; i vertici "liberi" di questi rettangoli si trovano appunto sul ramo dell'iperbole

$$xy=16$$

che appartiene al I quadrante.

Il quadrato di lato 4 ha la proprietà di avere perimetro minimo fra tutti i rettangoli di area $k=16$. È facile rendersene conto riflettendo che il perimetro dei rettangoli aumenta via via che il vertice libero si allontana da O sia in direzione dell'asse delle x che in direzione dell'asse delle y; ora, dato che la configurazione presenta una simmetria rispetto alla bisettrice del quadrante, si intuisce che il minimo perimetro si avrà quando il vertice libero si trova proprio su quella bisettrice.