Le quadriche

In queste pagine parleremo di alcune superficie – le quadriche – che sono strettamente legate alle coniche. Vedremo anche perché queste superficie abbiano nella realtà di oggi una grande importanza: possono infatti risolvere problemi di architettura e problemi relativi allo sfruttamento dell'energia solare.

Parte prima: Considerazioni geometriche

1. Le quadriche rotonde

Cominciamo a presentare qualche caso particolare: sono quadriche la sfera, il cilindro, il cono. Si vede subito il legame con le coniche; tagliando con un piano la sfera o il cilindro o il cono si ottengono sempre delle coniche: le sezioni piane della sfera sono sempre cerchi, quelle del cilindro sono ellissi, e quelle del cono sono o ellissi o parabole o iperboli.

Vedremo che, oltre alla sfera, al cilindro e al cono, ci sono altre superficie che hanno come sezioni piane *solo* delle coniche. Si dà, appunto, questa definizione: **quadriche sono delle superficie che hanno come sezioni piane solamente delle coniche**.

Sono sempre i casi particolari – la sfera, il cilindro e il cono – che ci fanno comprendere che queste superficie si possono ottenere facendo ruotare una conica attorno a un suo asse di simmetria. Si può infatti ottenere

- la sfera ruotando un cerchio attorno a un diametro (fig. 17);
- il cilindro ruotando due rette parallele attorno all'asse mediano (fig. 18);
- il cono ruotando due rette incidenti attorno alla bisettrice dell'angolo da esse formato (fig. 19).

Cerchio, due rette parallele o due rette incidenti sono casi particolari di coniche.

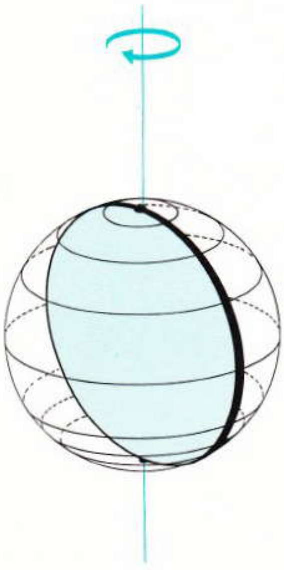


Fig. 17

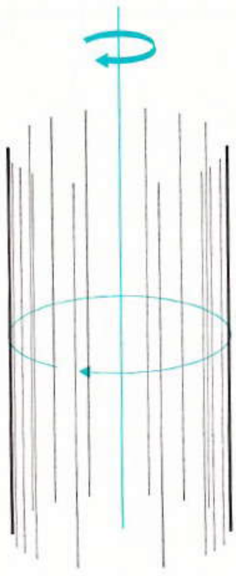


Fig. 18

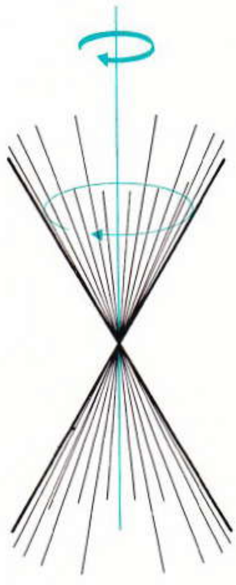


Fig. 19

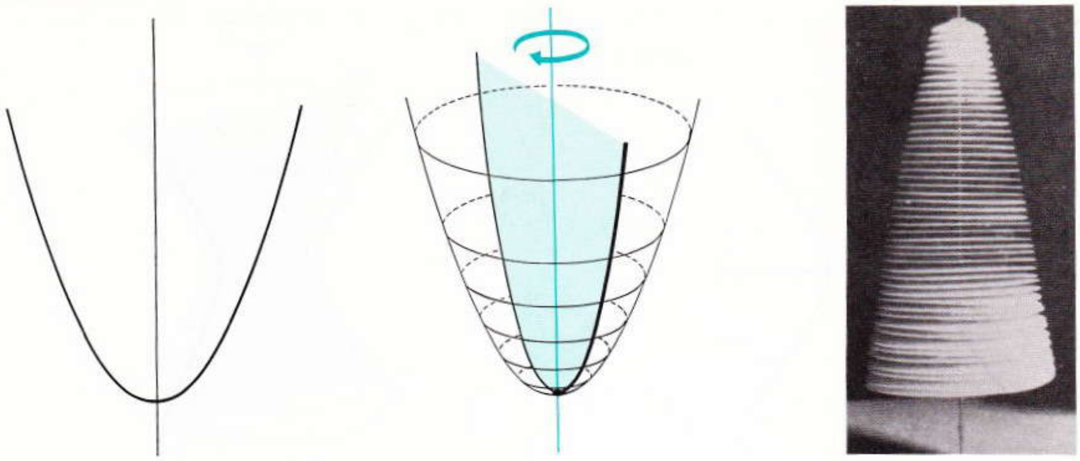
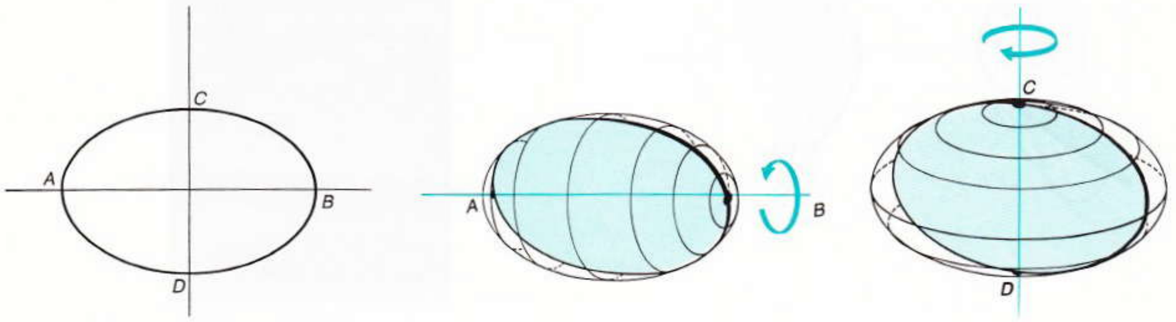


Fig. 20



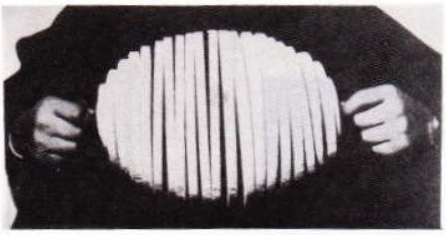


Fig. 21

Viene allora spontaneo di pensare a tutte le superficie che si ottengono facendo ruotare le altre coniche attorno a un asse di simmetria; si hanno in tal modo tutte *le quadriche di rotazione o rotonde*. E precisamente, *facendo ruotare*:

- *una parabola* attorno al suo asse di simmetria, si ottiene il **paraboloide** (fig. 20);
- *un'ellisse* attorno all'asse maggiore o all'asse minore, si ottengono due **ellissoidi** (fig. 21); ed è chiaro che, quando l'ellisse è un cerchio, si ha, come ellissoide particolare, *la sfera*;
- *un'iperbole* attorno a uno o all'altro dei suoi assi, si ottengono due **iperboloidi**; iperboloide a 1 falda e iperboloide a 2 falde (fig. 22). Come caso particolare d'iperboloide a 1 falda si può avere il cono, quando l'iperbole si riduce a due rette incidenti (fig. 23) e il cilindro quando l'iperbole degenera in due rette parallele (fig. 24).

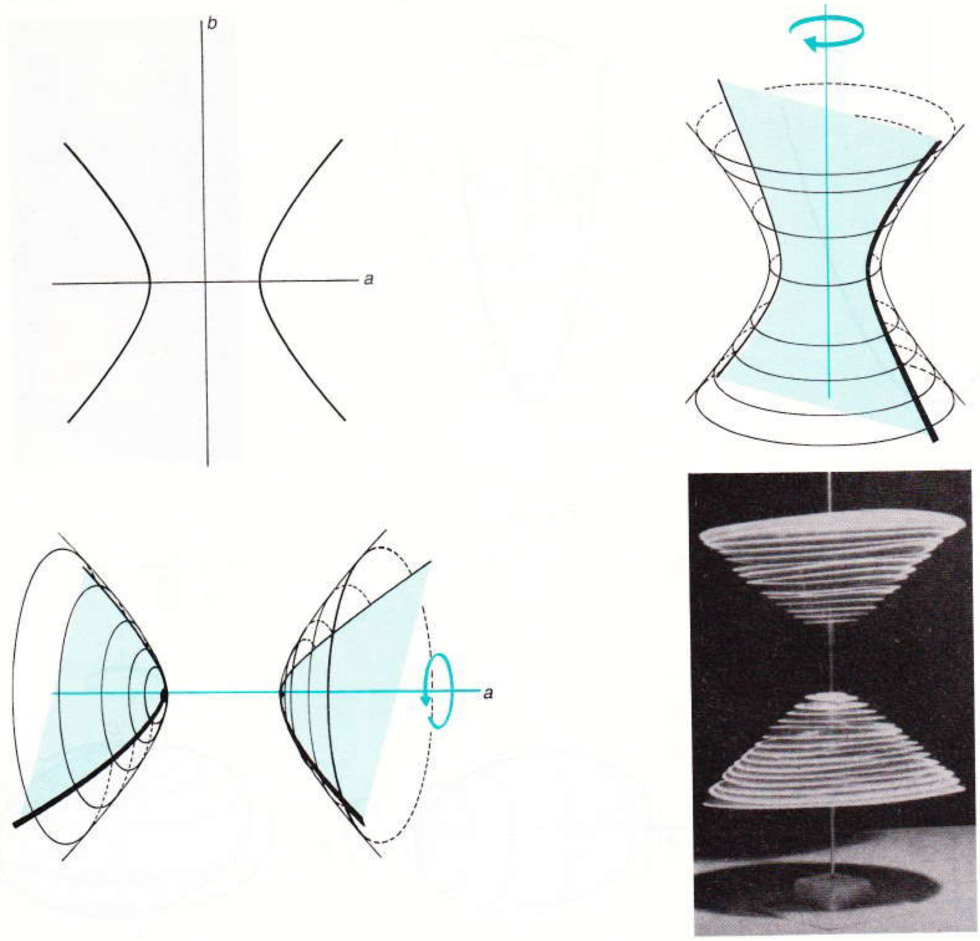


Fig. 22

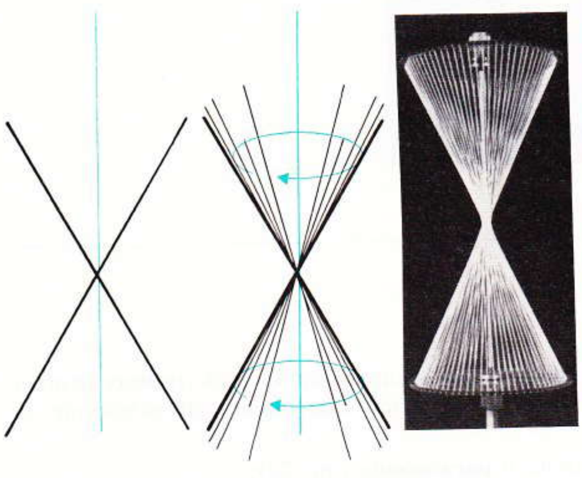


Fig. 23

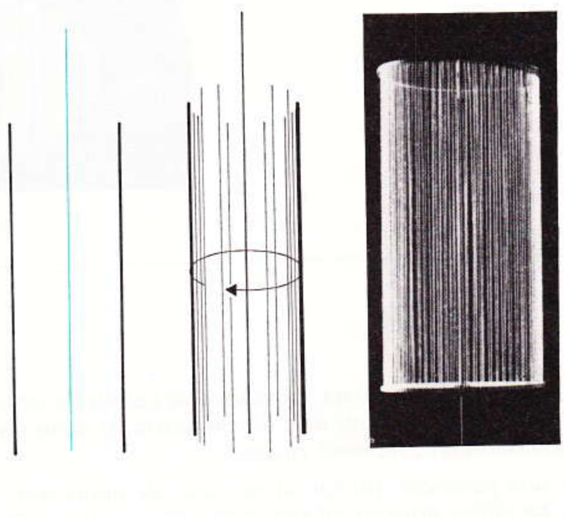


Fig. 24

2. Dalle quadriche rotonde alle quadriche non rotonde. Considerazioni geometriche

È chiaro che, per il modo stesso con cui sono costruite, le quadriche rotonde hanno un sistema di infiniti cerchi: sono le sezioni piane perpendicolari all'asse di rotazione (fig. 25).

Ora, *siccome un cerchio può essere trasformato in un'ellisse* per mezzo di uno stiramento (cap. 1, Parte terza, paragrafo 2), le quadriche rotonde possono dar luogo ad altrettante quadriche non rotonde che possiedono un sistema di infinite ellissi parallele (fig. 26).

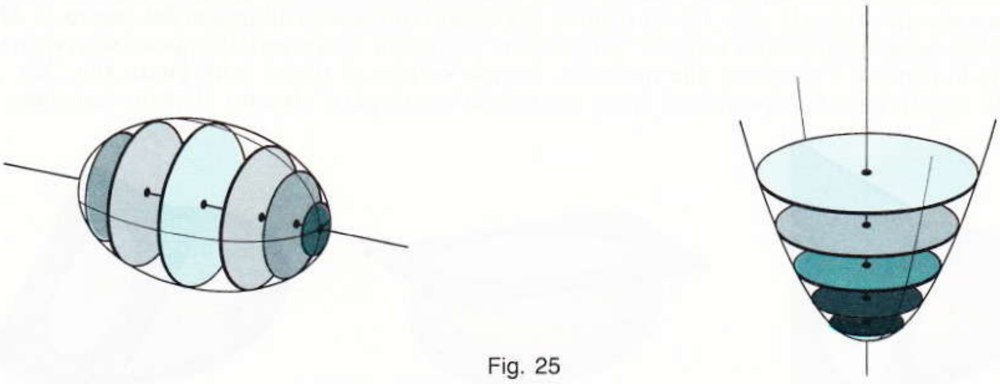


Fig. 25

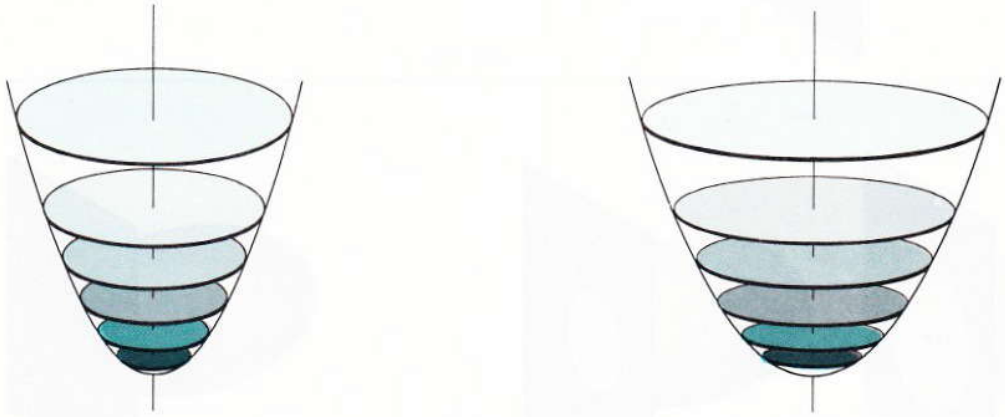


Fig. 26

Esaminiamo meglio le quadriche che si possono ottenere:

- il paraboloide a sezioni ellittiche (fig. 27) ha due piani di simmetria, perpendicolari fra loro;
- l'ellissoide (fig. 28) ha tre piani di simmetria. Le ellissi di centro O e che appartengono a questi piani hanno i semiassi di lunghezza a,b; a,c; b,c. O è il centro dell'ellissoide;
- i due iperboloidi (fig. 29) hanno, ciascuno, due piani di simmetria.

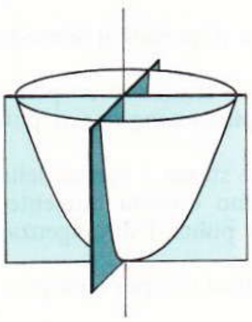


Fig. 27

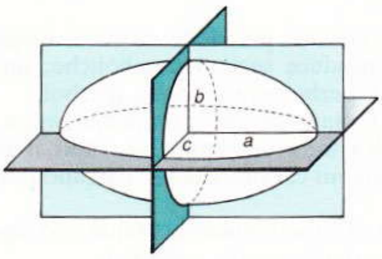


Fig. 28

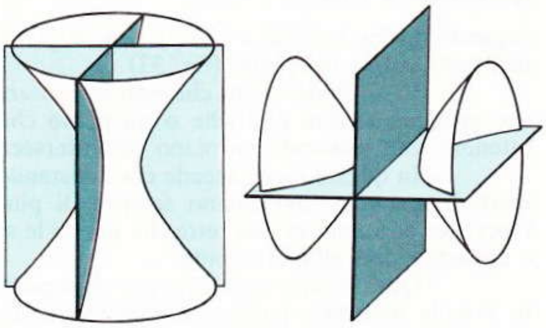


Fig. 29

3. Sezioni piane delle quadriche. Punti ellittici e punti iperbolici

Cerchiamo ora di "vedere" le sezioni piane delle quadriche; sono – come si è detto – solamente coniche. Prendiamo in esame le varie quadriche.

Ellissoide

Tagliando un ellissoide con un piano si ottengono solo ellissi (fig. 30).

Consideriamo ora un piano secante e spostiamolo parallelamente a se stesso fino a che il piano diventa tangente all'ellissoide (fig. 31). Si osserva che mentre il piano si allontana dal centro O dell'ellissoide, le ellissi sezioni diventano sempre "più piccole", e quindi i loro vertici opposti si avvicinano. Al limite, quando il piano è tangente alla quadrica, l'ellisse sezione si riduce a un punto (fig. 32).

In questo caso la superficie si trova tutta dalla stessa parte rispetto al piano tangente.

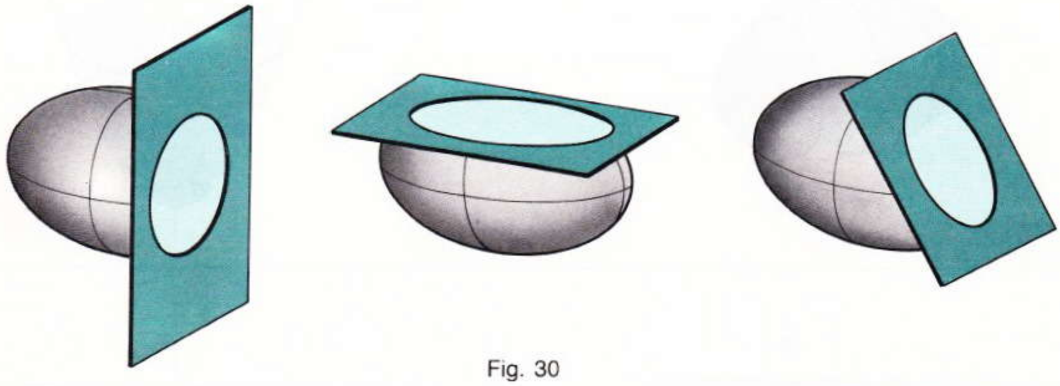


Fig. 30

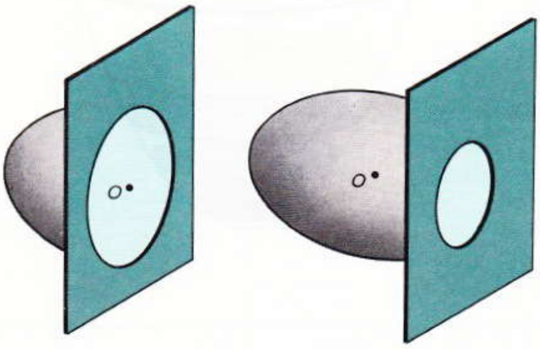


Fig. 31

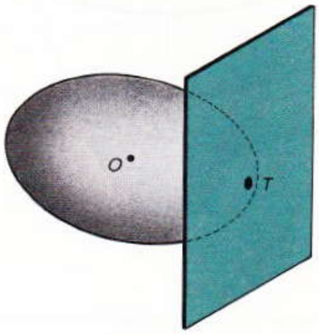


Fig. 32

Iperboloide a 1 falda

Segando un iperboloide a 1 falda con un piano si possono ottenere ellissi, parabole o iperboli a seconda dell'inclinazione del piano (fig. 33).

Ci si rende conto che non si può arrivare alla posizione di piano tangente traslando un piano che produce sezioni ellittiche o un piano che produce sezioni paraboliche; un piano tangente si può ottenere *solo* traslando un piano che interseca l'iperboloide secondo iperboli.

In questo caso, accade che spostando il piano secante parallelamente a se stesso, i vertici delle iperboli sezioni si avvicinano sempre di più fra loro. Al limite, quando il piano diventa tangente, l'iperbole degenera in due rette che hanno le seguenti caratteristiche: passano per il punto T di tangenza, e appartengono all'iperboloide.

Questo fatto si verifica per ogni punto dell'iperboloide a 1 falda; ciò significa che per ogni punto T della superficie passano due rette che appartengono alla superficie.

Si scopre così che l'iperboloide a 1 falda, che appare come superficie curva, può essere realizzato con sole rette; è – come si dice – *una superficie rigata*.

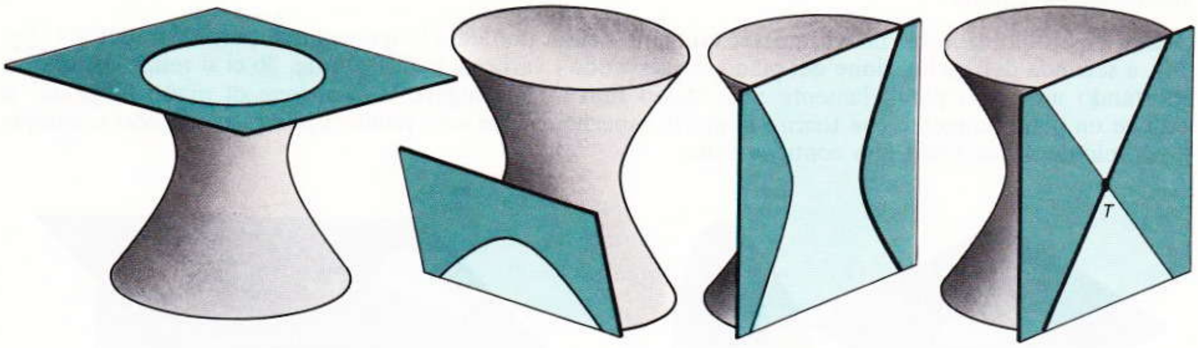
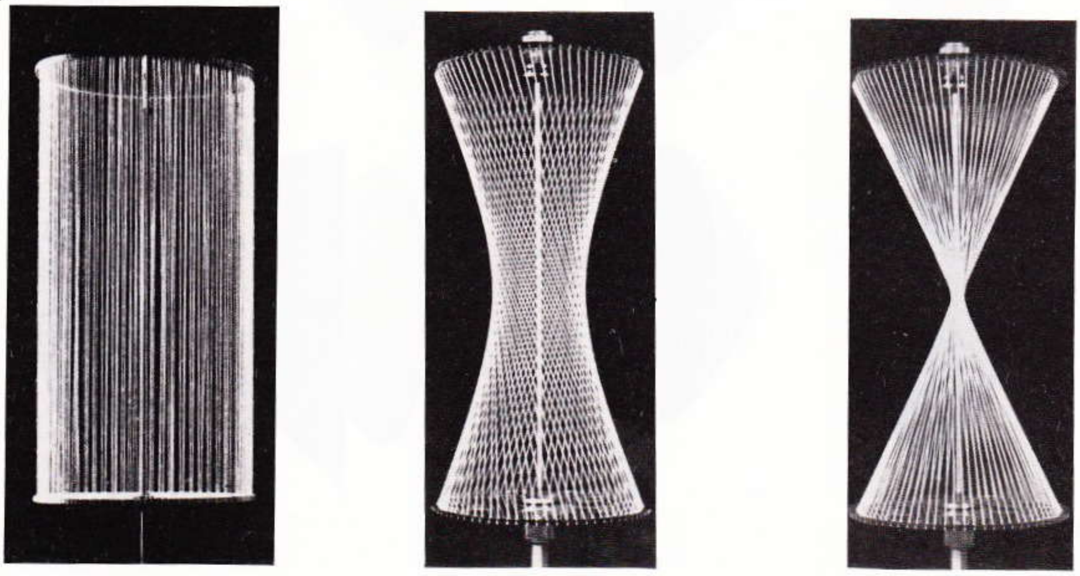


Fig. 33

Fig. 34



Una semplice costruzione di questo iperboloide può realizzarsi come è indicato nella fig. 34: nel passaggio da cilindro a cono si ottengono degli iperboloidi a 1 falda. Questa osservazione conduce anche a rendersi conto del fatto che il cono e il cilindro sono particolari iperboloidi a 1 falda (come abbiamo già accennato nel paragrafo 1).

Il confronto fra l'iperboloide a 1 falda e l'ellissoide conduce a scoprire diversità fra il tipo di punti delle due quadriche; osserviamo la fig. 35: nel caso dell'ellissoide, il piano tangente in qualunque punto T lascia, come abbiamo già detto, tutta la superficie da una stessa parte, mentre nel caso dell'iperboloide a 1 falda il piano tangente in un qualunque punto T non lascia tutta la superficie dalla stessa parte.

Questo diverso comportamento rispetto al piano tangente porta a *una distinzione fra i punti*: un punto T è detto *ellittico* se il piano tangente tocca la superficie solo in T; è detto *iperbolico* se il piano tangente in T tocca la superficie lungo due rette per T.

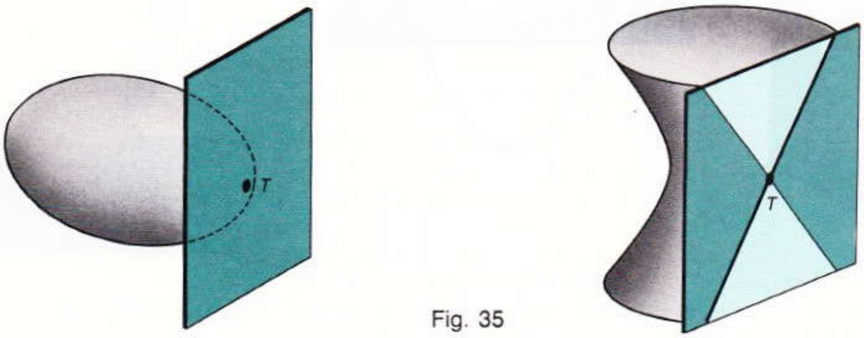


Fig. 35

Iperboloide a 2 falde

Anche l'iperboloide a due falde, intersecato da un piano, può dare luogo a ellissi, parabole, iperboli (fig. 36), a seconda dell'inclinazione del piano. Osservando i vari casi indicati in fig. 36 ci si rende conto che, spostando un piano parallelamente a se stesso fino a raggiungere la posizione di piano tangente, si ottiene un piano tangente che tocca sempre la superficie in un solo punto: *i punti sono ellittici* e dunque l'iperboloide a due falde non contiene rette.

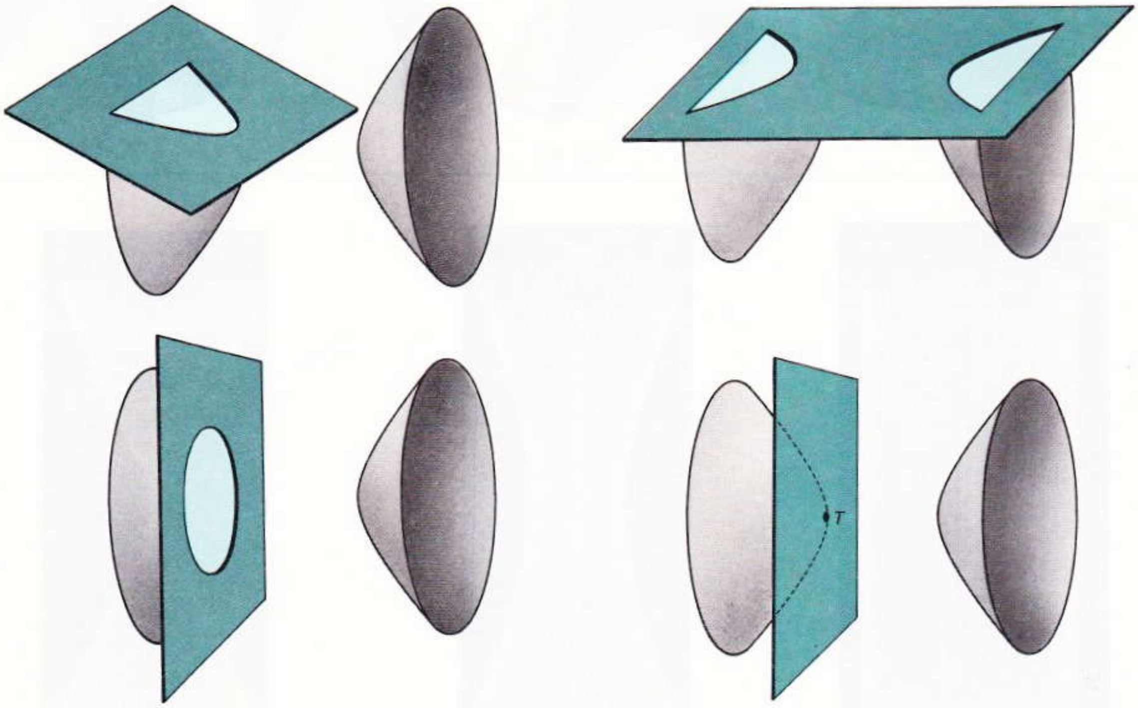


Fig. 36

Paraboloide

Tagliando un paraboloide con un piano, si possono ottenere come sezioni solo ellissi o parabole (fig. 37), ma un piano tangente si può avere **solo** traslando un piano che seca il paraboloide secondo ellissi: i punti del paraboloide sono *ellittici*.

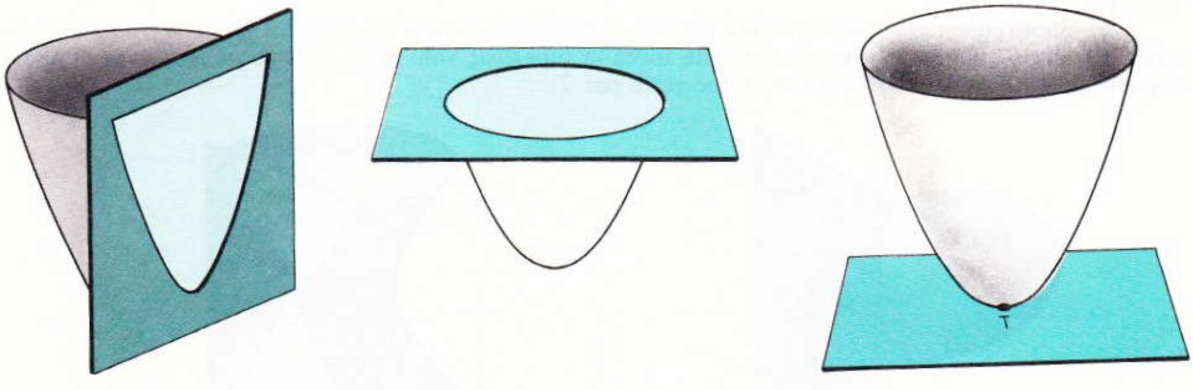
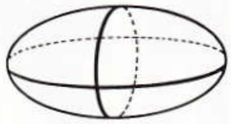
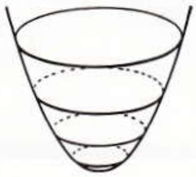
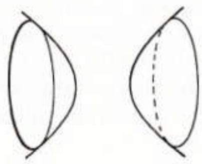
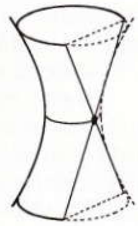


Fig. 37

4. Una classificazione delle quadriche

Le considerazioni sul tipo di punti (ellittici o iperbolici) conducono ad una classificazione delle quadriche e a una scoperta. Nella tavola seguente abbiamo elencato "in verticale" le varie quadriche e "in orizzontale", per ciascuna di esse, il tipo di punti; in ogni casella della tavola è disegnata, se esiste, la quadrica corrispondente. L'ellissoide è stato disegnato solo nella casella corrispondente ai punti ellittici, perché non può certo esistere un ellissoide che ha punti iperbolici e quindi contiene rette, dato che si tratta di una superficie chiusa; l'iperboloide, invece, compare in tutte e due le caselle dato che quello a due falde ha punti ellittici e quello a una falda ha punti iperbolici.

PUNTI / QUADRICHE	ellittici	iperbolici
ellissoide		
paraboloide		?
iperboloide		

Riguardo al paraboloide, sulla tabella compare un punto interrogativo; ecco perché: conosciamo il paraboloide a punti ellittici; ma – ci si chiede – non potrebbe esistere un altro paraboloide, e cioè una superficie aperta, avente punti iperbolici anziché punti ellittici? E, se esiste, come costruirlo, dato che non l'abbiamo ottenuto facendo ruotare una conica? È proprio questo dubbio che ci condurrà, nel prossimo paragrafo, a un'interessante scoperta.

5. La scoperta di una nuova quadrica: il paraboloide iperbolico o a sella

Osserviamo meglio il paraboloide ellittico (fig. 38): possiamo immaginarlo come formato da una "parabola guida" e da tante parabole uguali "disposte a cavallo" della "parabola guida".

Per renderci conto di questa struttura abbiamo costruito un modello (fig. 39).

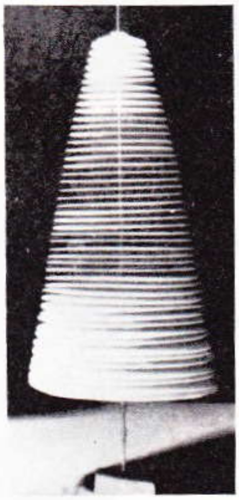


Fig. 38

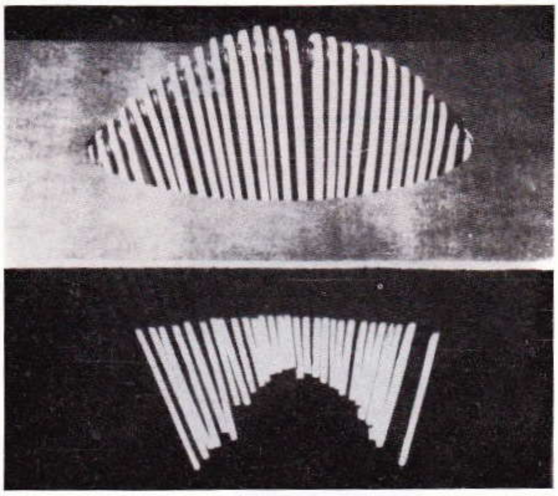


Fig. 39

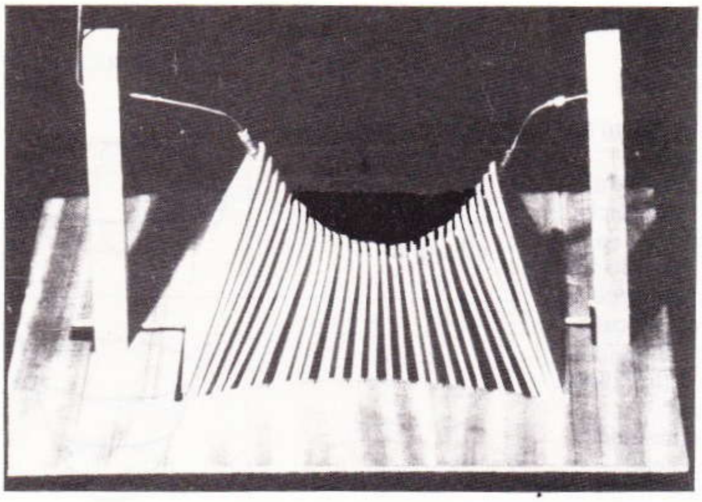


Fig. 40. La parabola guida è realizzata in fil di ferro mentre sono realizzate in legno le parabole disposte a cavallo della guida; in ciascuna di queste è operato un forellino nel quale passa il fil di ferro

È proprio questo modello dinamico a suggerire una variazione (fig. 40): si ribalta la parabola guida in modo che la concavità, che era prima verso il basso, sia, ora, verso l'alto; le altre parabole, realizzate in legno, mantengono la loro posizione e pertanto la loro concavità è sempre rivolta verso il basso. Si ottiene una nuova quadrica: è **il paraboloide iperbolico o a sella**.

Basta osservare il modello per capire il perché dell'appellativo "a sella": la superficie ha una forma che ricorda molto da vicino una vera sella. Se poi si considerano le sezioni operate con piani perpendicolari all'asse della parabola guida, si capisce il perché dell'aggettivo "iperbolico": le sezioni sono delle iperboli.

Traslando il piano secante verso il vertice della parabola guida, i vertici delle iperboli sezione si avvicinano sempre di più, fino a che, al limite, il piano risulta tangente alla superficie lungo due rette. Si scopre così che i punti di questa quadrica sono iperbolici; la superficie è quindi **rigata**, cioè si può costruire con rette (fig. 41).

Se poi si continua a traslare il piano dopo il punto di tangenza, si hanno ancora delle iperboli, che però sono disposte in modo diverso dalle precedenti (fig. 42).

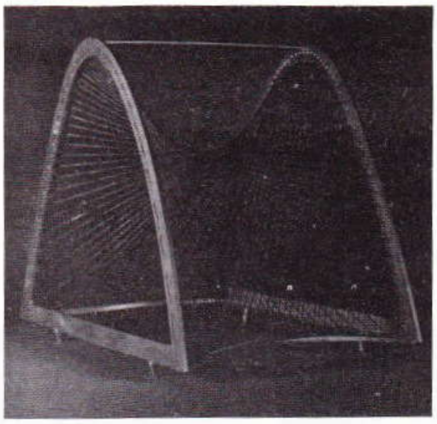


Fig. 41

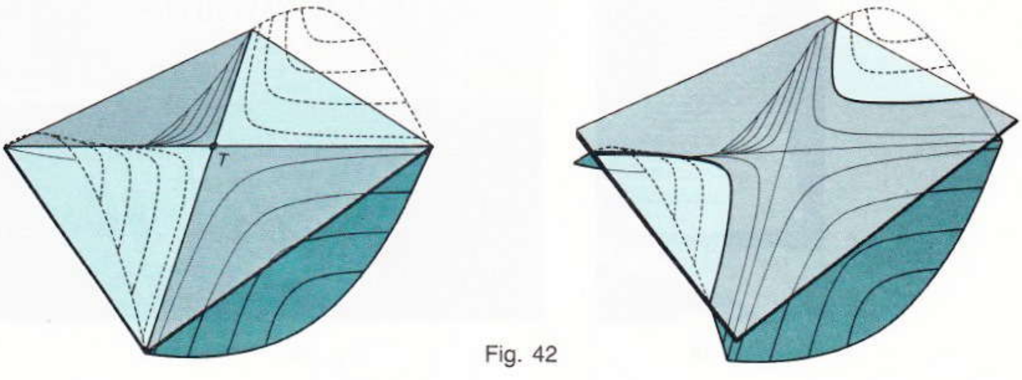


Fig. 42

6. Cilindro e cono. Punti parabolici. Superficie sviluppabili e non sviluppabili sul piano

Nei paragrafi 1 e 3 abbiamo detto che sfera, cilindro e cono sono i più semplici esempi di quadriche. Abbiamo osservato che la sfera è un ellissoide particolare, e che cilindro e cono sono casi particolari dell'iperboloide a una falda.

Esaminiamo ora il tipo di punti del cono e del cilindro, sempre a partire dall'osservazione delle sezioni piane.

Sappiamo che le sezioni piane del cono sono ellissi o parabole o iperboli a seconda dell'inclinazione del piano (fig. 43). Ci si rende conto che non si riesce ad ottenere un piano tangente al cono traslando un piano che sega la superficie secondo un'ellisse o secondo un'iperbole. È solo partendo da una sezione parabolica che, traslando il piano come in fig. 44, si può ottenere il piano tangente in un punto P (fig. 45); ci si accorge che il piano non è tangente solo in un punto, ma risulta tangente lungo tutta la generatrice che passa per P. Si dice che i punti del cono sono *parabolici*. In generale, **un punto si dice parabolico se il piano tangente alla superficie in P tocca la quadrica lungo una retta**.

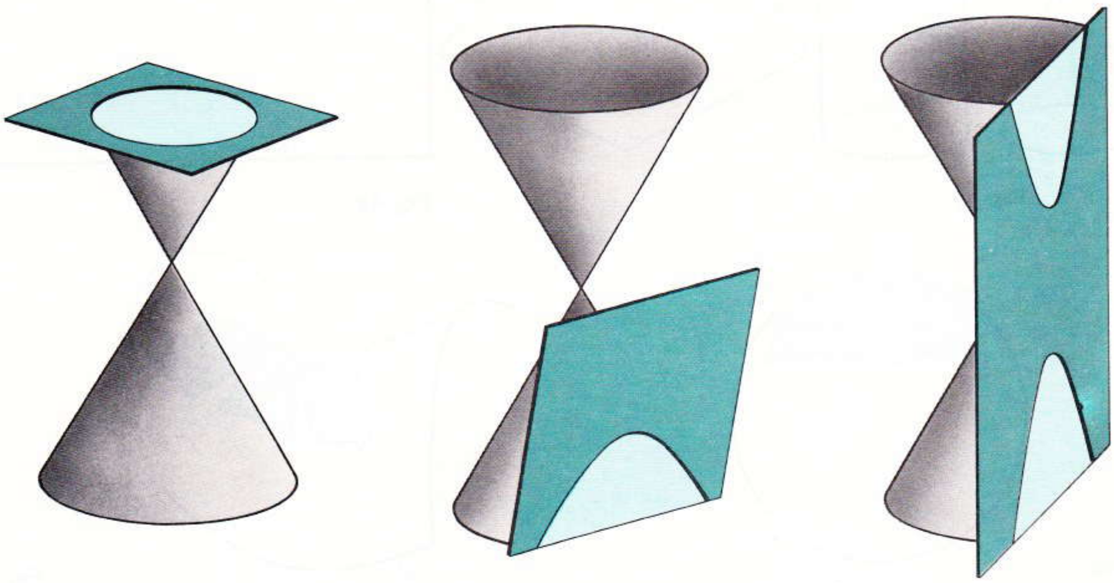


Fig. 43

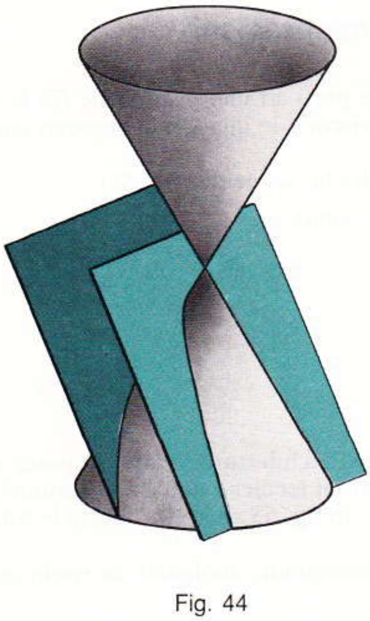


Fig. 44

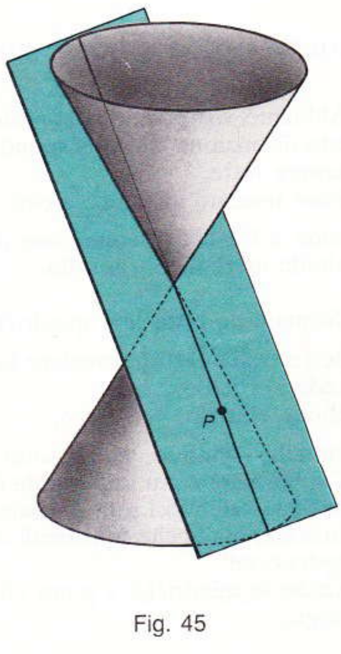


Fig. 45

Si capisce che sono parabolici anche i punti del cilindro (fig. 46).

Il fatto che i punti del cono e quelli del cilindro sono parabolici si traduce in una proprietà ben nota: un foglio di carta può aderire perfettamente sulla superficie del cono o del cilindro (fig. 47). Questa proprietà può essere espressa in altro modo: tagliando un cono o un cilindro lungo una generatrice, ne possiamo adagiare la superficie sul piano (fig. 48), cioè **cono e cilindro sono sviluppabili sul piano**.

Questa proprietà non vale invece per le superficie a punti ellittici o iperbolici: basta pensare che se cerchiamo di far aderire un foglio di carta a una sfera, il foglio presenta delle pieghe (fig. 49); e se cerchiamo di farlo aderire a un paraboloide a sella, la carta si strappa (fig. 50).

Concludiamo così che **sono sviluppabili sul piano solo le quadriche a punti parabolici**.

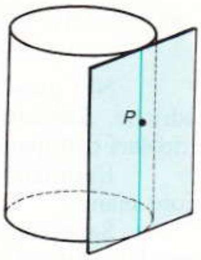


Fig. 46

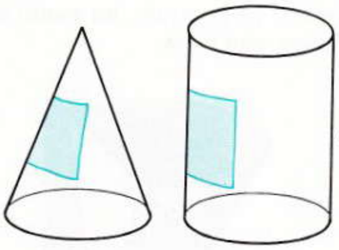


Fig. 47

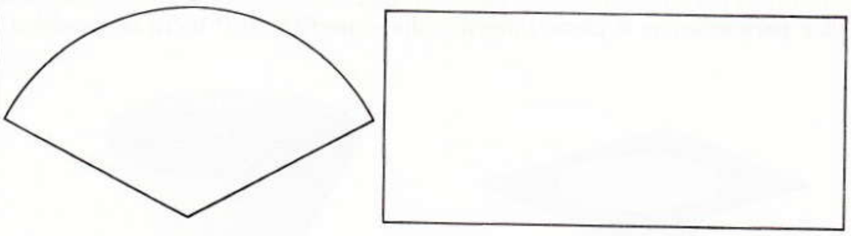


Fig. 48

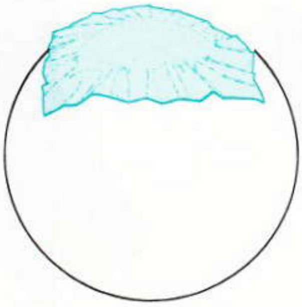


Fig. 49

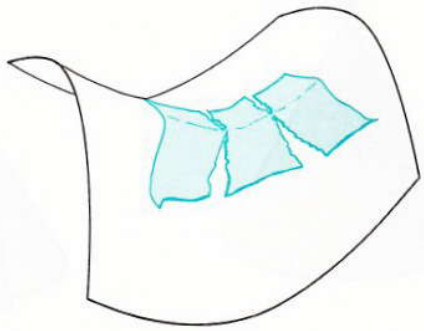


Fig. 50

7. Quadriche rigate e quadriche non rigate nelle applicazioni

Abbiamo visto come la considerazione del tipo di punti porti ad una distinzione fra le quadriche. È questa distinzione che corrisponde ad una proprietà "più visiva": le quadriche possono contenere o non contenere rette.

Sono formate da rette, e cioè sono rigate, le due quadriche seguenti (fig. 51):

- l'iperboloide a 1 falda (e come caso particolare il cilindro e il cono),
- il paraboloide iperbolico o a sella.

Non sono formate da rette le 3 quadriche seguenti (fig. 52):

- l'ellissoide (e come caso particolare la sfera),
- l'iperboloide a 2 falde,
- il paraboloide ellittico.

Delle 5 quadriche, dunque, solo 2 sono rigate.

L'applicazione più importante delle quadriche rigate è nell'architettura: il fatto di poter costruire delle superficie valendosi solo di sbarre ha portato a delle soluzioni tecniche non solo economiche per la loro esecuzione, ma anche funzionali ed estremamente eleganti; in fig. 53 sono riprodotte le fotografie di alcune costruzioni.

Anche le quadriche a punti ellittici, in particolare il paraboloide, svolgono un ruolo notevole nella tecnologia.

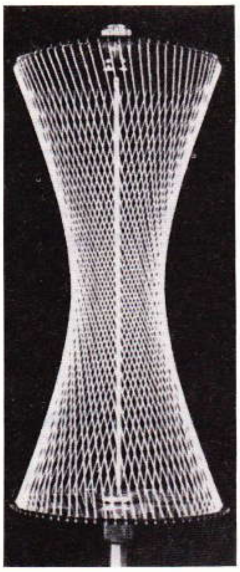


Fig. 51

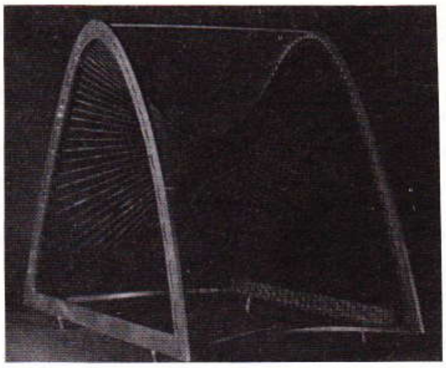
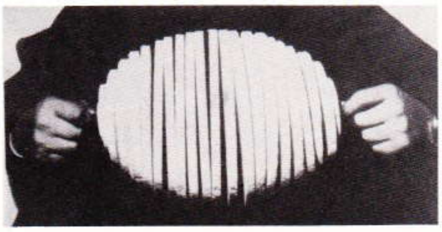
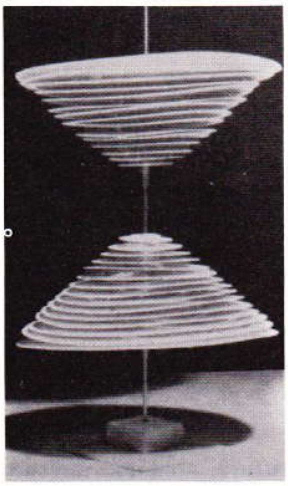


Fig. 52





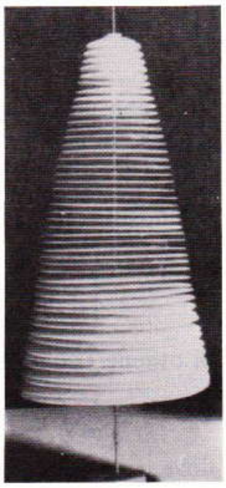


Fig. 53

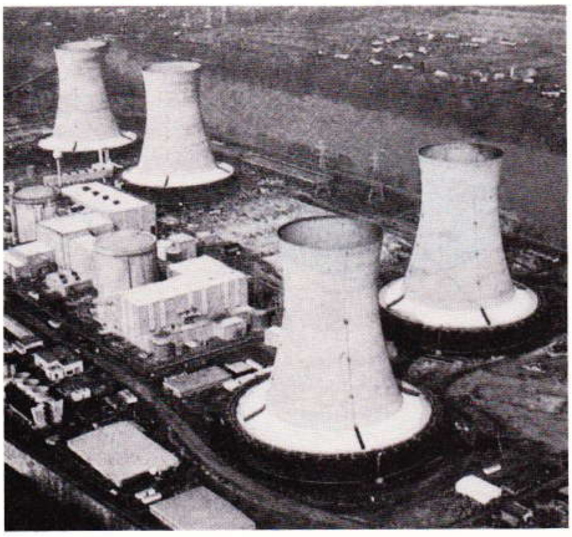


Fig. 54

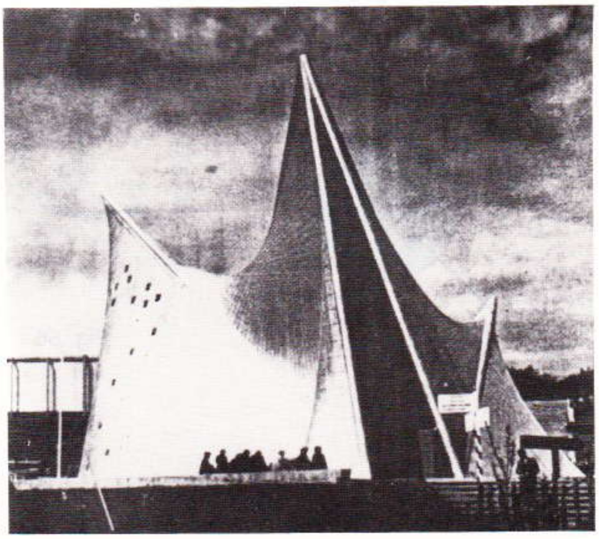


Fig. 55

La proprietà del fuoco della parabola (Complementi, pag. 562) viene sfruttata per la costruzione di paraboloidi a due scopi:

1) concentrare in un punto – il fuoco – un fascio di raggi solari (sfruttamento dell'energia solare), o un fascio di onde sonore provenienti da grandi distanze (antenne riceventi);
2) proiettare a distanza una luce emessa da una lampada disposta nel fuoco (i comuni fanali degli autoveicoli), o un suono prodotto nelle vicinanze del fuoco (antenne trasmittenti).

Parte seconda: Considerazioni analitiche

In questa Parte troveremo le equazioni delle quadriche in un riferimento cartesiano. Abbiamo visto nella Parte prima che le quadriche rotonde si ottengono dalla rotazione di una conica attorno ad un asse; si passa poi da quadriche rotonde a quadriche non rotonde operando uno stiramento in modo da trasformare i cerchi paralleli in ellissi. Tradurremo ora queste operazioni geometriche in equazioni: studieremo prima le equazioni delle quattro quadriche rotonde e poi passeremo alle equazioni delle quadriche non rotonde, basandoci sulle trasformazioni affini. Un ragionamento diverso ci condurrà poi a stabilire l'equazione del paraboloide iperbolico.

1. L'equazione dell'ellissoide

Abbiamo visto (Complementi del cap. 1) che l'equazione della sfera di centro O e raggio $r=1$ (fig. 56) è data da:

$$x^2+y^2+z^2=1. \tag{1}$$

Ora, con un ragionamento del tutto analogo a quello che conduce a trovare l'equazione dell'ellisse a partire da quella del cerchio si può immaginare di deformare la sfera con stiramenti lungo gli assi in modo da avere un ellissoide (fig. 57).

Se i coefficienti di stiramento sono a, b, c, si ottiene l'equazione dell'ellissoide di centro O e semiassi lunghi a, b, c, operando sulla (1) con l'affinità d'equazioni

$$\begin{cases} x'=ax \\ y'=by \\ z'=cz. \end{cases}$$

Si ottiene l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

dove, per semplicità di scrittura, abbiamo indicato le variabili con x, y, z anziché con x', y', z'.

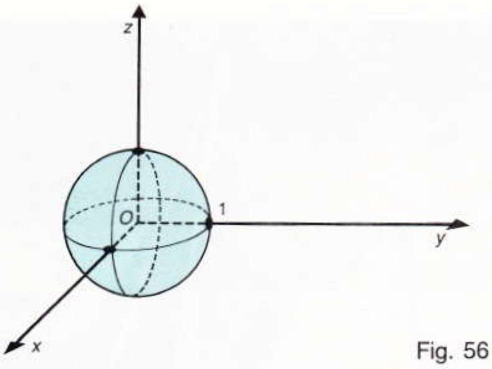


Fig. 56

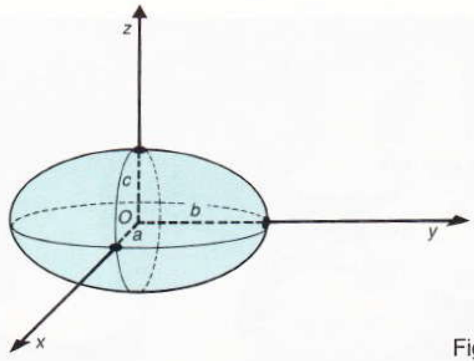


Fig. 57

2. L'equazione del paraboloide

Cominciamo col determinare l'equazione del paraboloide rotondo. Consideriamo, sul piano yz, una parabola di vertice O e asse z (fig. 58). La sua equazione, sul piano yz d'equazione $x=0$, è

$$z=ky^2.$$

Per semplicità, scegliamo $k=1$; l'equazione diventa

$$z=y^2.$$

Facciamo ora ruotare questa parabola attorno all'asse delle z (fig. 59): si ottiene un paraboloide rotondo.

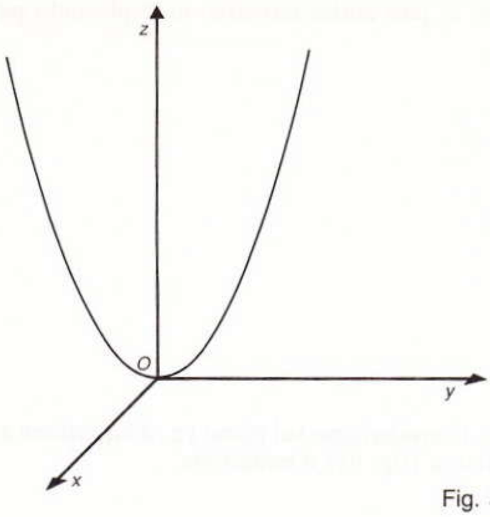


Fig. 58

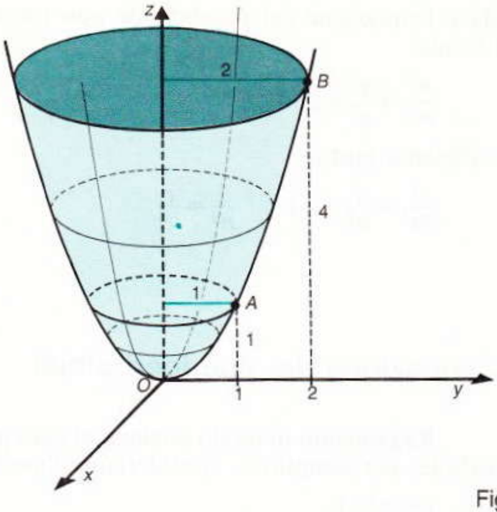


Fig. 59

Osserviamo: ogni punto della parabola descrive una circonferenza che ha centro sull'asse delle z; e precisamente:

il punto A che ha $y=1$ descrive una circonferenza di raggio 1
» » B » » $y=2$ » » » » » 2
....
» » P » » $y=p$ » » » » » p.

Se proiettiamo tutte queste circonferenze sul piano xy, otteniamo un insieme di cerchi concentrici (fig. 60), e si ha che:

il punto A descrive la circonferenza $x^2+y^2=1^2$
» » B » » » $x^2+y^2=2^2$
....
» » P » » » $x^2+y^2=p^2$.

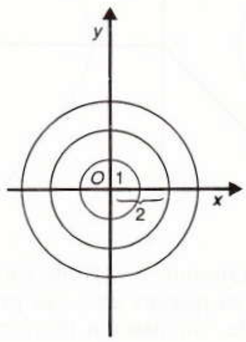


Fig. 60

Ora, se con questi cerchi vogliamo formare proprio il paraboloide di fig. 59, dobbiamo disporli uno sull'altro con una legge ben precisa, una legge "dettata" dall'equazione della parabola

$$z=y^2.$$

Dovrà accadere che:

la circonferenza $x^2+y^2=1^2$ si trovi a quota $z=1^2$
» » $x^2+y^2=2^2$ » » » » $z=2^2$
....
» » $x^2+y^2=p^2$ » » » » $z=p^2$.

Quindi, un punto P descrive la superficie parabolica ottenuta dalla rotazione della parabola $z=y^2$ attorno all'asse delle z, se le sue coordinate x, y, z sono legate dalla relazione

$$x^2+y^2=z. \tag{1}$$

È questa l'equazione del paraboloide rotondo generato dalla parabola $z=y^2$.
È facile ora passare all'equazione del paraboloide non rotondo. Basta operare un'affinità d'equazioni

$$\begin{cases} x'=ax \\ y'=by \\ z'=cz; \end{cases}$$

la (1) si trasforma in

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}.$$

Questa è l'equazione del paraboloide non rotondo di asse z; può anche scriversi, moltiplicando per c, nella forma:

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=z,$$

dove abbiamo posto

$$\frac{1}{m^2}=\frac{c}{a^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{n^2}=\frac{c}{b^2}.$$

3. L'equazione dei due iperboloidi

Ragioniamo in modo analogo al caso precedente. Consideriamo sul piano yz, d'equazione $x=0$, un'iperbole; per semplicità, consideriamo l'iperbole equilatera (fig. 61) d'equazione

$$y^2-z^2=1.$$

Vogliamo l'equazione dell'**iperboloide a 1 falda** che si ottiene facendo ruotare l'iperbole attorno all'asse delle z (fig. 62).

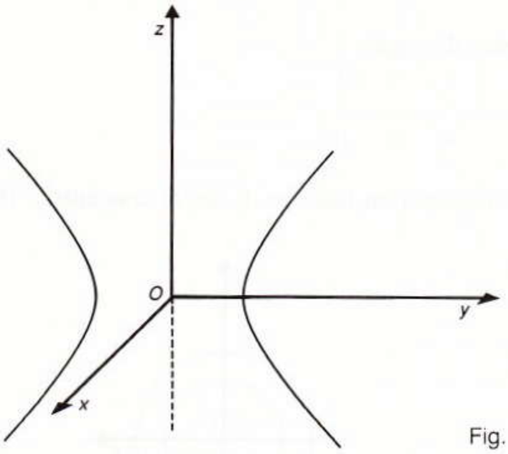


Fig. 61

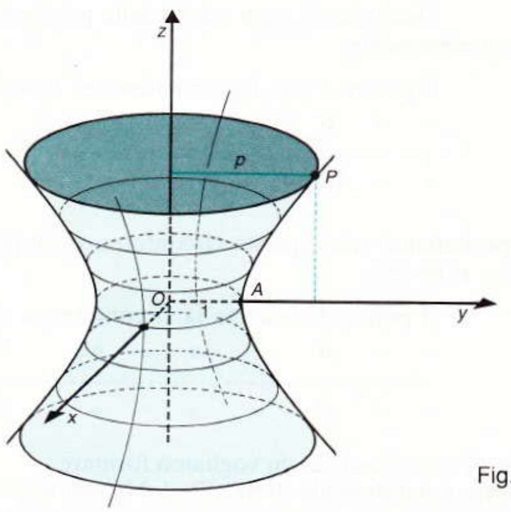


Fig. 62

Quando l'iperbole ruota attorno all'asse delle z, ogni suo punto descrive una circonferenza che ha centro su questo asse. Se proiettiamo queste circonferenze sul piano xy, avremo, come nel caso del paraboloide, un sistema di cerchi concentrici di cui è facile determinare l'equazione. Si ha che

il punto A che ha $y=1$ descrive $x^2+y^2=1^2$
» » B » » $y=2$ » $x^2+y^2=2^2$
....
» » P » » $y=p$ » $x^2+y^2=p^2$

Questi cerchi vanno disposti in modo da poter ottenere l'iperboloide di fig. 62, cioè in modo che i punti di ogni circonferenza soddisfino all'equazione dell'iperbole

$$y^2-z^2=1.$$

Dovrà quindi aversi:

$x^2+y^2=1^2$ se risulta $y=1$ e, per l'equazione dell'iperbole, $1^2-z^2=1$ ossia $1^2=z^2+1$
$x^2+y^2=2^2$ » » $y=z$ » » » » » , $2^2-z^2=1$ ossia $2^2=z^2+1$
....
$x^2+y^2=p^2$ » » $y=p$ » » » » » , $p^2-z^2=1$ ossia $p^2=z^2+1$.

Quindi risulta sempre

$$x^2+y^2=z^2+1$$

ossia

$$x^2+y^2-z^2=1.$$

Questa è *l'equazione dell'iperboloide rotondo a 1 falda* ottenuto dalla rotazione, attorno all'asse delle z, dell'iperbole $y^2-z^2=1$.

Operando un'affinità d'equazioni

$$\begin{cases} x'=ax \\ y'=by \\ z'=cz, \end{cases}$$

si ottiene l'*equazione dell'iperboloide a 1 falda, non rotondo*:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

È interessante vedere come, a partire dall'equazione dell'iperbole

$$\begin{aligned} &y^2-z^2=1 \\ &x=0, \end{aligned} \qquad (1)$$

si possono ottenere, sempre con una rotazione, le equazioni del cono e del cilindro.

Consideriamo gli asintoti dell'iperbole (1) che hanno equazione complessiva data da

$$y^2-z^2=0 \qquad \text{ossia} \qquad y^2=z^2.$$

Con la rotazione dell'iperbole, questi asintoti generano un cono (figg. 63 e 64) che, in base a considerazioni analoghe a quelle svolte per l'iperboloide, avrà l'equazione

$$x^2+y^2-z^2=0.$$

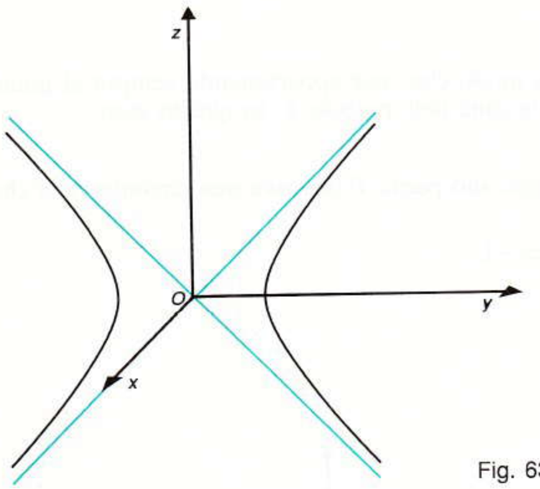


Fig. 63

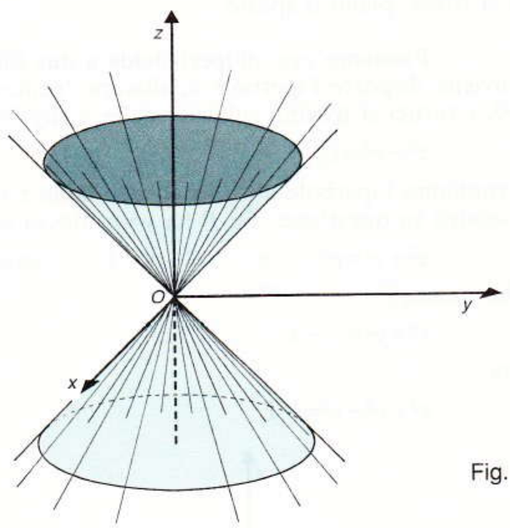


Fig. 64

È sempre una trasformazione affine che conduce a scrivere l'equazione del più generale cono di asse z nella forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Per avere l'equazione del cilindro, consideriamo (fig. 65) la coppia di rette tangenti all'iperbole (1) nei vertici; abbiamo le equazioni

$$y=1 \qquad \text{e} \qquad y=-1.$$

Queste due rette, ruotando attorno all'asse delle z, generano un cilindro (fig. 66); il cilindro è "formato" da tanti cerchi uguali a quello che, sul piano xy, ha l'equazione

$$x^2+y^2=1.$$

Quindi, un punto si muove sulla superficie di questo cilindro se, a qualunque quota, risulta

$$x^2+y^2=1;$$

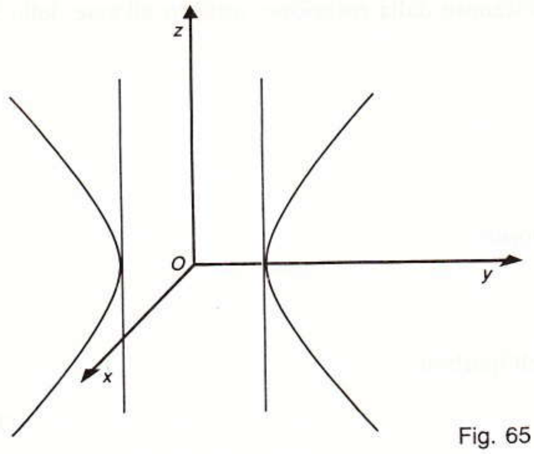


Fig. 65

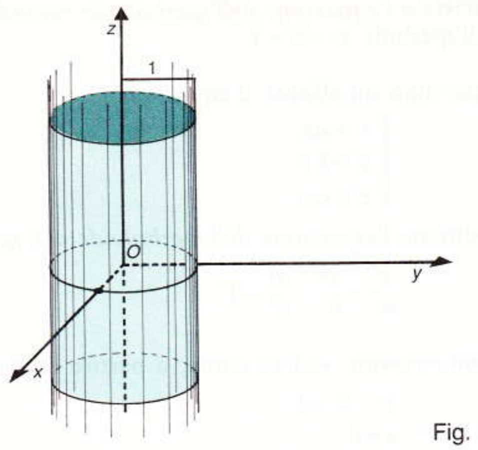


Fig. 66

Questa è l'equazione di questo particolare cilindro.
Con una trasformazione affine otteniamo l'equazione del più generale cilindro di asse z:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2}$$

Da notare che la stessa equazione (2) rappresenta un'ellisse o un cilindro a seconda dell'"ambiente" in cui si trova: piano o spazio.

Passiamo ora all'**iperboloide a due falde**.
Conviene disporre l'iperbole equilatera "generatrice" in modo che, pur appartenendo sempre al piano $x=0$, i vertici si trovino sull'asse delle z (fig. 67). L'equazione dell'iperbole è, in questo caso

$$z^2-y^2=1.$$

Se ruotiamo l'iperbole attorno all'asse delle z (fig. 70) ogni suo punto P descrive una circonferenza che ha centro su quest'asse. Se P ha $y=p$, dovrà essere

$$x^2+y^2=p^2 \quad \text{e} \quad z^2-p^2=1, \quad \text{ossia} \quad p^2=z^2-1.$$

Si ha quindi

$$x^2+y^2=z^2-1$$

ossia

$$x^2+y^2-z^2=-1.$$

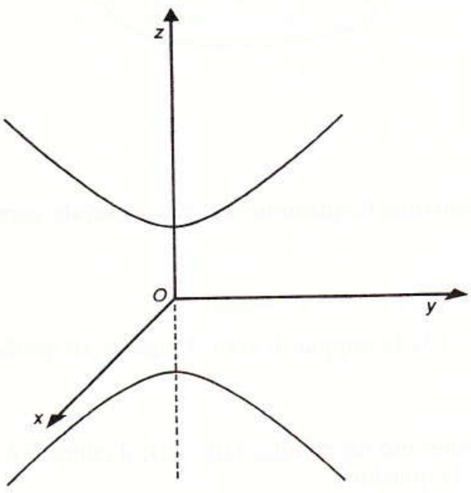


Fig. 67

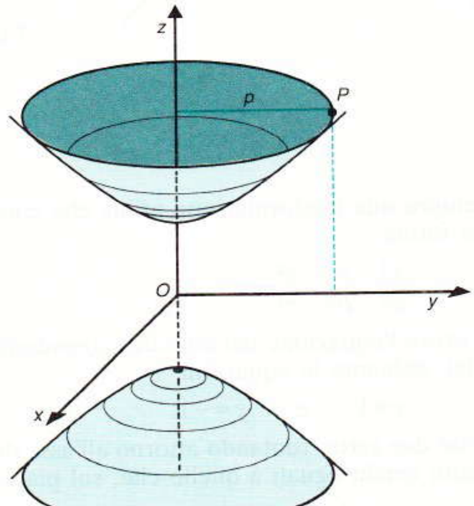


Fig. 68

Questa è l'equazione dell'iperboloide rotondo a 2 falde ottenuto dalla rotazione, attorno all'asse delle z, dell'iperbole d'equazione $z^2-y^2=1$.
Operando un'affinità d'equazioni

$$\begin{cases} x'=ax \\ y'=by \\ z'=cz, \end{cases}$$

si ottiene l'equazione dell'iperboloide a 2 falde non rotondo;

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

4. L'equazione del paraboloide iperbolico

Come abbiamo visto a pag. 573, il paraboloide iperbolico non si può ottenere da una quadrica rotonda; il tipo di ragionamento che faremo per trovarne l'equazione è perciò diverso dai precedenti.

Teniamo presente la generazione geometrica di questa quadrica a partire dal paraboloide ellittico: il paraboloide iperbolico si può "vedere" come formato da una parabola "guida" avente la concavità verso l'alto, e da parabole, aventi la concavità verso il basso, disposte "a cavallo" della "guida", e giacenti su piani perpendicolari a quello della "guida" (fig. 69).

La parabola guida si trova sul piano yz, d'equazione $x=0$, ed ha l'equazione

$$z=y^2.$$

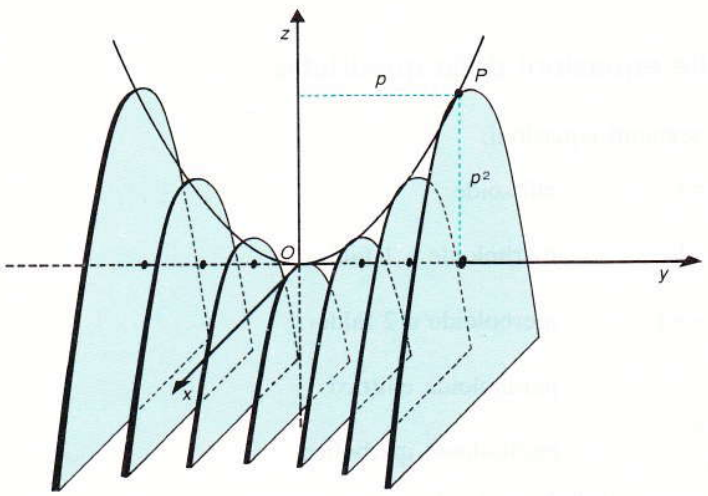


Fig. 69

La parabola a cavallo, passante per O e appartenente al piano xz (d'equazione $y=0$), ha l'equazione

$$z=-x^2.$$

Quando il vertice P di questa parabola scorre sulla "guida", le sue coordinate saranno, per esempio:

$y=1$ e $z=1^2$
$y=2$ e $z=2^2$
....

e, in generale, si avrà

$$P(p,p^2).$$

L'equazione della parabola "a cavallo", e cioè parallela alla $z=-x^2$, sarà:

$(z=-x^2+1^2$, con vertice $A(1,1^2)$;
$(z=-x^2+2^2$, » » $B(2,2^2)$;
....

in generale, se il vertice è $P(p,p^2)$, l'equazione sarà

$$z=-x^2+p^2. \tag{1}$$

Se varia p, cioè la y di un punto che percorre la parabola guida, viene descritta tutta la superficie della quadrica; in tal caso nella (1) dovremo scrivere y^2 al posto di p^2. L'equazione del paraboloide iperbolico di parabola guida $z=y^2$ e avente le parabole a cavallo parallele alla $z=-x^2$, è dunque

$$z=-x^2+y^2. \qquad (2)$$

Operando un'affinità d'equazioni

$$\begin{cases} x'=ax \\ y'=by \\ z'=cz, \end{cases}$$

l'equazione (2) si trasforma nella

$$\frac{z}{c}=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}.$$

Questa è l'equazione del paraboloide iperbolico che ha l'asse z come asse di simmetria (fig. 70); può anche scriversi, moltiplicando per c, nella forma

$$-\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=z,$$

dove abbiamo posto:

$$\frac{1}{m^2}=\frac{c}{a^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{n^2}=\frac{c}{b^2}.$$

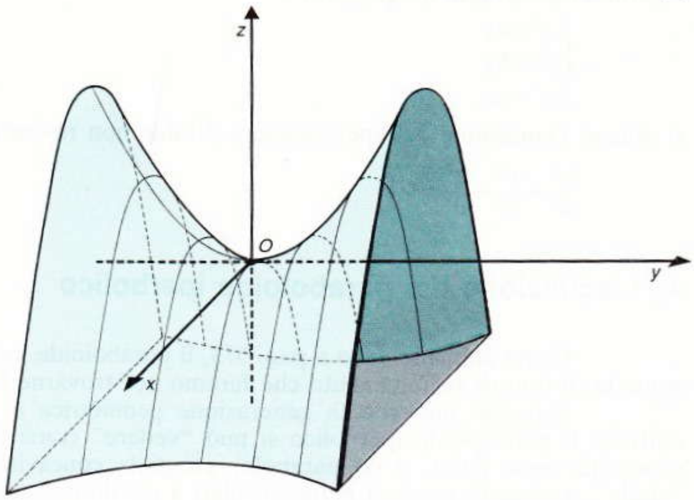


Fig. 70

5. Riflessioni sulle equazioni delle quadriche

Abbiamo ottenuto le seguenti equazioni:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	ellissoide
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	iperboloide a 1 falda
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	iperboloide a 2 falde
$z=\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}$	paraboloide ellittico
$z=-\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}$	paraboloide iperbolico

Si tratta, sempre, di equazioni di 2° grado. È proprio questa osservazione che condusse il matematico svizzero L. Eulero a definire, nel 1748, le quadriche da un punto di vista analitico:

si chiamano quadriche le superficie descritte da un'equazione quadratica, cioè di 2° grado.

A questa definizione analitica corrispondono *due proprietà geometriche*:

a) una retta incontra una quadrica al massimo in 2 punti, dato che, per avere le intersezioni di una quadrica e di una retta, si deve risolvere un sistema di 2° grado che presenta 3 equazioni e 3 incognite. Per esempio, per ottenere i punti d'intersezione del paraboloide d'equazione $z=x^2+y^2$ con la retta d'equazioni $\begin{cases} z=2 \\ y=x \end{cases}$, si deve risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=2 \\ y=x \end{cases}$$

Si ottengono i punti

$$A(1,1,2) \qquad \text{e} \qquad B(-1,-1,2).$$

b) un piano interseca una quadrica secondo una conica. Infatti, intersecare una quadrica con un piano porta a risolvere un sistema di 2° grado di 2 equazioni in 3 incognite; un tale sistema ha infinite soluzioni che corrispondono, appunto, alle coordinate di un punto variabile su una conica.
Per esempio, intersecando il paraboloide iperbolico d'equazione $z=2x^2-y^2$ con il piano $x=y$, si ha, sul piano $x=y$, la parabola $z=y^2$.