2. Parte prima
Esercizi

Riflessioni geometriche

Gli esercizi dall'1 al 4 conducono a riflettere sulla dimostrazione esposta nel paragrafo 3: si è dimostrato che, per qualunque punto P di una conica, si mantiene costante il rapporto fra le distanze da un punto fisso F (il fuoco) e da una retta d (la direttrice); risulta cioè

$$\frac{PF}{Pd}=e,$$

dove e indica l'eccentricità della conica.

1. Riflettere sulla parte della dimostrazione che richiede di più di "vedere nello spazio" e che riassumiamo qui sotto:

- si considera il piano α dell'ellisse e il piano β, in cui si trova il cerchio di diametro HK; α e β si incontrano lungo la retta d (direttrice) (fig. 16 del paragrafo 3);
- nel piano α dell'ellisse si conduce la retta PZ, che è parallela alla direttrice d (fig. 21 del paragrafo 3);
- per il punto P si conduce il piano γ parallelo al piano β (fig. 23 del paragrafo 3).

Per quale ragione si può essere certi che il piano γ incontri il piano α proprio lungo la retta PZ? *(Ricordare che se un piano interseca due piani paralleli, le due rette di intersezione sono parallele...).*

2. Riprendere la fig. 24 del paragrafo 3 e dimostrare che risulta

$$\frac{VH}{ZD}=\frac{AH}{AD}$$

in un modo diverso da quello esposto nel testo.
(Si possono considerare i triangoli rettangoli HAD e AVZ, che sono simili, perché...; risulta dunque

$$AV:AH=AZ:AD.$$

Da questa si può ottenere la proporzione

$$(AV+AH):AH=(AZ+AD):AD...)$$

3. Basarsi sulla fig. 1 per dimostrare che, nel caso dell'ellisse, risulta

$$e<1,$$

organizzando una dimostrazione diversa da quella esposta nel testo.
(Ricordare che risulta, in particolare,

$$e=\frac{AF}{AD}.$$

Dimostrare che

- *risulta $AF=AH$,*
- *sono uguali gli angoli contrassegnati dalla lettera α.*

Osservare che:

- *$S\hat{K}H$ è un angolo esterno del triangolo DKB, perciò risulta $\alpha>\beta$,*
- *nel triangolo DAH, AH si oppone all'angolo β, AD si oppone all'angolo α...)*

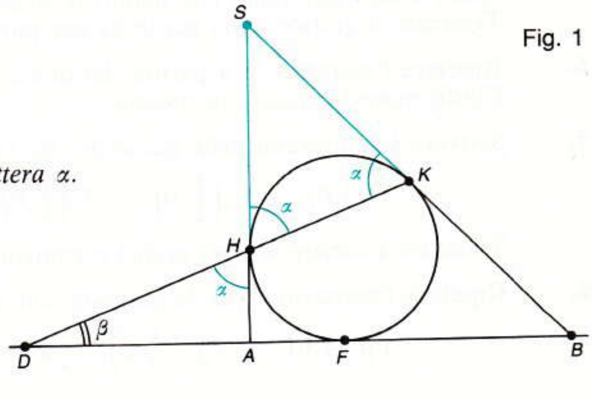

Fig. 1

4. Basarsi sulla fig. 2 per dimostrare che, nel caso dell'iperbole, risulta

$$e>1,$$

organizzando una dimostrazione diversa da quella esposta nel testo.
(Anche in questo caso risulta:

$$e=\frac{AF}{AD}.$$

Dimostrare che

- *risulta $AF=AH$,*
- *sono uguali gli angoli contrassegnati dalla lettera α.*

Osservare che:

- *HDA è un angolo esterno del triangolo DKB, perciò risulta $\beta>\alpha$,*
- *nel triangolo DAH, AH si oppone all'angolo β, AD si oppone all'angolo α...)*

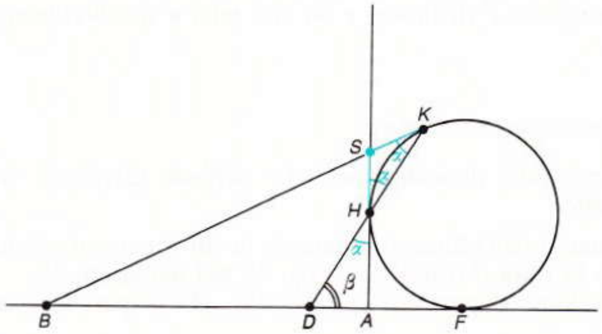

Fig. 2

L'equazione della parabola

Gli esercizi dal 5 al 12 conducono ad impadronirsi dell'equazione della parabola; per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni esposte nel paragrafo 5. In particolare occorre tener presenti le seguenti nozioni:

- *si sceglie il riferimento cartesiano in modo che l'asse delle x coincida con la retta AF e l'origine O coincida col vertice A della parabola; in questo modo il fuoco F ha le coordinate $(f,0)$ e la direttrice d ha l'equazione $x=-f$;*
- *un punto $P(x,y)$ percorre la parabola solo se risulta $PF=Pd$;*
- *quest'ultima relazione si traduce nell'equazione $x=\frac{1}{4f}y^2$.*

5. Ripetere il procedimento esposto nel paragrafo 5 per scrivere l'equazione della parabola che ha il fuoco $F(2,0)$.
Qual è l'equazione della direttrice d?
Considerare il punto $P(8,-8)$ e valutare la distanza PF e la distanza Pd; il punto appartiene alla parabola?
In quale altro modo si può stabilire se P appartiene alla parabola?
Quali sono i due punti che hanno la stessa ascissa del fuoco ed appartengono alla parabola?
Tracciare il grafico della parabola per punti.

6. Ripetere l'esercizio 5, a partire dal fuoco $F(-2,0)$.
Confrontare le equazioni ottenute.

7. Scrivere le equazioni delle parabole che hanno il fuoco nei seguenti punti:

$$F_1(1,0),\quad F_2\left(\frac{1}{2},0\right),\quad F_3\left(\frac{1}{4},0\right),\quad F_4\left(\frac{1}{8},0\right).$$

Tracciare i corrispondenti grafici e confrontarli.

8. Ripetere l'esercizio 7 per le parabole che hanno il fuoco nei seguenti punti:

$$F_1(-1,0),\quad F_2\left(-\frac{1}{2},0\right),\quad F_3\left(-\frac{1}{4},0\right),\quad F_4\left(-\frac{1}{8},0\right).$$

9. Ripetere l'esercizio 7 per le parabole che hanno il fuoco nei seguenti punti:

$F_1(1{,}0)$, $F_2(2{,}0)$, $F_3(4{,}0)$, $F_4(8{,}0)$.

10. Ripetere l'esercizio 7 per le parabole che hanno il fuoco nei seguenti punti:

$F_1(-1{,}0)$, $F_2(-2{,}0)$, $F_3(-4{,}0)$, $F_4(-8{,}0)$.

11. Scegliere fra le seguenti equazioni quelle che rappresentano parabole:

$x=y^2$, $x=2y^2$, $x=3y^2$, $x=\frac{1}{3}y^2$, $x=\frac{2}{5}y^2$, $x=\frac{1}{2y^2}$.

In ogni caso indicare sia le coordinate del fuoco che l'equazione della direttrice e tracciare il corrispondente grafico.

12. Ripetere l'esercizio 11 a partire dalle seguenti equazioni:

$x=-y^2$, $x=-2y^2$, $x=-4y^2$, $x=-\frac{1}{4}y^2$, $x=-\frac{2}{3}y^2$, $x=-y^3$.

L'equazione dell'ellisse

Gli esercizi dal 13 al 24 conducono ad impadronirsi dell'equazione dell'ellisse; per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni esposte nel paragrafo 6. In particolare occorre tener presenti le seguenti nozioni:

- *si sceglie il riferimento cartesiano in modo che l'asse delle x coincida con la retta AF e l'origine O coincida col vertice A dell'ellisse;*
- *così, data l'eccentricità "e" dell'ellisse, il fuoco F ha le coordinate (f,0) e la direttrice d ha l'equazione* $x=-\frac{f}{e}$;
- *un punto P(x,y) percorre l'ellisse solo se risulta PF=ePd;*
- *quest'ultima relazione si traduce nell'equazione* $(1-e^2)x^2+y^2-2f(1+e)x=0$.

13. Ripetere il procedimento esposto nel paragrafo 6 per scrivere l'equazione dell'ellisse che ha il fuoco $F(1{,}0)$ e l'eccentricità $e=\frac{1}{4}$.
Qual è l'equazione della direttrice d?
Considerare il punto $P\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ e valutare sia la distanza PF che la distanza Pd; il punto P appartiene all'ellisse?
In quale altro modo si può stabilire se P appartiene all'ellisse?
Indicare i due punti che hanno la stessa ascissa del fuoco ed appartengono all'ellisse.
Tracciare il grafico dell'ellisse per punti.

14. Ripetere l'esercizio 13, a partire dal fuoco $F(-1{,}0)$ e dall'eccentricità

$e=\frac{1}{4}$.

Confrontare le equazioni ottenute ed i corrispondenti grafici.

15. Scrivere le equazioni delle ellissi che hanno il fuoco $F(2{,}0)$ e l'eccentricità che assume i seguenti valori:

$e_1=\frac{1}{2}$, $e_2=\frac{1}{4}$, $e_3=\frac{1}{8}$.

Tracciare i corrispondenti grafici e confrontarli.

16. Ripetere l'esercizio 15 per le ellissi che hanno il fuoco $F(2{,}0)$ e l'eccentricità che assume i seguenti valori:

$e_1=\frac{3}{4}$, $e_2=\frac{7}{8}$, $e_3=\frac{15}{16}$.

Tracciare i corrispondenti grafici e confrontarli.

17. Ripetere l'esercizio 15 per le ellissi che hanno l'eccentricità $e=\frac{1}{2}$ ed il fuoco nei seguenti punti:

$F_1(2{,}0)$, $F_2(4{,}0)$, $F_3(8{,}0)$, $F_4(10{,}0)$.

18. Ripetere l'esercizio 15 per le ellissi che hanno l'eccentricità $e=\frac{1}{2}$ ed il fuoco nei seguenti punti:

$$F_1(1,0),\quad F_2\left(\frac{1}{2},0\right),\quad F_3\left(\frac{1}{4},0\right),\quad F_4\left(\frac{1}{8},0\right).$$

19. Scrivere l'equazione delle due ellissi che hanno il fuoco nel punto $F(2,0)$ e le direttrici che hanno le seguenti equazioni:

$$d_1{:}x=-6,\quad d_2{:}x=-10.$$

Quanto vale, in ogni caso, l'eccentricità dell'ellisse?
Tracciare i corrispondenti grafici e confrontarli.
(Tenere presente che se il fuoco è il punto $F(f,0)$, la direttrice ha equazione $x=-\frac{f}{e}$...)

20. Scrivere l'equazione delle due ellissi che hanno per direttrice la retta d'equazione $x=-2$ e per fuochi i punti seguenti:

$$F_1\left(\frac{3}{2},0\right),\quad F_2\left(\frac{1}{2},0\right).$$

Quanto vale, in ogni caso, l'eccentricità dell'ellisse?
Tracciare i corrispondenti grafici e confrontarli.
(Tenere presente che se il fuoco è il punto $F(f,0)$ la direttrice ha equazione $x=-\frac{f}{e}$...)

21. Scrivere l'equazione delle due ellissi che hanno per direttrice la retta d'equazione $x=-3$ e l'eccentricità che assume i seguenti valori:

$$e_1=\frac{2}{3},\quad e_2=\frac{1}{3}.$$

Dove si trova, in ogni caso, il fuoco dell'ellisse?
Tracciare i corrispondenti grafici e confrontarli.
(Tenere presente che se il fuoco è il punto $F(f,0)$, la direttrice ha equazione $x=-\frac{f}{e}$...)

22. Scegliere fra le seguenti equazioni quelle che rappresentano ellissi:

$$4x^2+5y^2-10x^3=0;\quad 15x^2+16y^2-20x=0;\quad 8x^2+9y^2-8x=0.$$

In ogni caso indicare:
- l'eccentricità e le coordinate del fuoco;
- l'equazione della direttrice;
- la lunghezza dell'asse maggiore AB;
- le coordinate del punto medio C dell'asse maggiore, cioè del centro dell'ellisse;
- la lunghezza dell'asse minore.

Infine tracciare il grafico dell'ellisse.
(Per rappresentare un'ellisse, l'equazione deve essere del tipo

$$(1-e^2)x^2+y^2-2f(1+e)x=0; \tag{1}$$

perciò la prima equazione certamente non rappresenta un'ellisse, perché... La seconda equazione si riconduce alla forma (1), dividendone i due membri per...
Per ricavare l'eccentricità e l'ascissa del fuoco, osservare che in un'equazione della forma (1) il coefficiente di y^2 è sempre 1, il coefficiente di x^2 è dato da $(1-e^2)$, mentre il coefficiente di x è $2f(1+e)$...
Per ricavare la lunghezza dell'asse maggiore AB, tenere presente che i punti A e B sono i punti d'intersezione dell'ellisse con l'asse delle x.
Per ricavare l'asse minore, tenere presente che quest'asse è perpendicolare all'asse maggiore e passa per C...)

23. Ripetere l'esercizio 22 a partire dalle seguenti equazioni:

$$9x^2+25y^2-450x=0;\quad 3x^2+4y^2-6x=0;\quad 3x^3+4y^3-x=0.$$

24. Ripetere l'esercizio 22 a partire dalle seguenti equazioni:

$$3x^2+4y^2-18x=0;\quad 3x^2+4y^2-3x=0;\quad 3x^2-4y^2-2x=0.$$

L'equazione dell'iperbole

Gli esercizi dal 25 al 36 conducono ad impadronirsi dell'equazione dell'iperbole; per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni esposte nel paragrafo 7. In particolare occorre tener presenti le seguenti nozioni:

- *si sceglie il riferimento cartesiano in modo che l'asse delle x coincida con la retta AF e l'origine O coincida col vertice A dell'iperbole;*
- *così, data l'eccentricità "e" dell'iperbole, il fuoco F ha le coordinate $(f,0)$ e la direttrice d ha l'equazione $x=-\frac{f}{e}$;*
- *un punto $P(x,y)$ percorre l'iperbole solo se risulta $PF=ePd$;*
- *quest'ultima relazione si traduce nell'equazione $(1-e^2)x^2+y^2-2f(1+e)x=0$.*

25. Ripetere il procedimento esposto nel paragrafo 7 per scrivere l'equazione dell'iperbole che ha il fuoco $F(1,0)$ e l'eccentricità $e=4$.
Qual è l'equazione della direttrice d?
Considerare il punto $P\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$ e valutare sia la distanza PF che la distanza Pd; il punto P appartiene all'iperbole?
In quale altro modo si può stabilire se P appartiene all'iperbole?
Indicare i due punti che hanno la stessa ascissa del fuoco ed appartengono all'iperbole.
Tracciare il grafico dell'iperbole per punti.

26. Ripetere l'esercizio 25, a partire dal fuoco $F(-1,0)$ e dall'eccentricità

$$e=4.$$

Confrontare le equazioni ottenute ed i corrispondenti grafici.

27. Scrivere le equazioni delle iperboli che hanno il fuoco $F(2,0)$ e l'eccentricità che assume i seguenti valori:

$$e_1=3, \quad e_2=6, \quad e_3=9.$$

Tracciare i corrispondenti grafici e confrontarli.

28. Ripetere l'esercizio 26 per le iperboli che hanno il fuoco $F(2,0)$ e l'eccentricità che assume i seguenti valori:

$$e_1=\frac{3}{2}, \quad e_2=\frac{5}{4}, \quad e_3=\frac{9}{8}.$$

Tracciare i corrispondenti grafici e confrontarli.

29. Ripetere l'esercizio 26 per le iperboli che hanno l'eccentricità $e=2$ ed il fuoco nei seguenti punti:

$$F_1(2,0), \quad F_2(4,0), \quad F_3(8,0), \quad F_4(10,0).$$

30. Ripetere l'esercizio 26 per le iperboli che hanno l'eccentricità $e=2$ ed il fuoco nei seguenti punti:

$$F_1(1,0), \quad F_2\left(\frac{1}{2},0\right), \quad F_3\left(\frac{1}{4},0\right), \quad F_4\left(\frac{1}{8},0\right).$$

31. Scrivere l'equazione delle due iperboli che hanno il fuoco nel punto $F(2,0)$ e le direttrici che hanno le seguenti equazioni:

$$d_1: x=-1, \quad d_2: x=-\frac{1}{3}.$$

Quanto vale, in ogni caso, l'eccentricità dell'iperbole?
Tracciare i corrispondenti grafici e confrontarli.
(Tenere presente che se il fuoco è il punto $F(f,0)$, la direttrice ha equazione $x=-\frac{f}{e}$...)

32. Scrivere l'equazione delle due iperboli che hanno per direttrice la retta d'equazione $x=-2$ e per fuochi i punti seguenti:

$$F_1(4,0), \quad F_2(6,0).$$

Quanto vale, in ogni caso, l'eccentricità dell'iperbole?
Tracciare i corrispondenti grafici e confrontarli.
(Tenere presente che se il fuoco è il punto $F(f,0)$, la direttrice ha equazione $x=-\frac{f}{e}$...)

33. Scrivere l'equazione delle due iperboli che hanno per direttrice la retta d'equazione $x=-3$ e l'eccentricità che assume i seguenti valori:

$$e_1=3, \qquad e_2=\frac{3}{2}.$$

Qual è, in ogni caso, il fuoco dell'iperbole?
Tracciare i corrispondenti grafici e confrontarli.
(Tenere presente che se il fuoco è il punto $F(f,0)$, la direttrice ha equazione $x=-\frac{f}{e}$...)

34. Scegliere fra le seguenti equazioni quelle che rappresentano iperboli:

$$-5x^2+4y^2-10x^3=0; \qquad -9x^2+16y^2-20x=0; \qquad -7x^2+9y^2-8x=0.$$

In ogni caso indicare:

- l'eccentricità e le coordinate del fuoco;
- l'equazione della direttrice;
- i punti O e B d'intersezione dell'iperbole con l'asse delle x;
- le coordinate del punto medio C del segmento OB, cioè del centro dell'iperbole.

Infine tracciare il grafico dell'iperbole.
(Per rappresentare un'iperbole, l'equazione deve essere del tipo

$$(1-e^2)x^2+y^2-2f(1+e)x=0; \tag{1}$$

Perciò la prima equazione certamente non rappresenta un'iperbole, perché... La seconda equazione si riconduce alla forma (1), dividendone i due membri per...
Per ricavare l'eccentricità e l'ascissa del fuoco, osservare che in un'equazione della forma (1) il coefficiente di y^2 è sempre 1, il coefficiente di x^2 è dato da $(1-e^2)$, mentre il coefficiente di x è $2f(1+e)$...)

35. Ripetere l'esercizio 34 a partire dalle seguenti equazioni:

$$-11x^2+25y^2-550x=0; \qquad -x^2+y^2-2x=0; \qquad -3x^3+4y^3-4x=0.$$

36. Ripetere l'esercizio 34 a partire dalle seguenti equazioni:

$$-5x^2+4y^2-20x=0; \qquad -3x^2+y^2-4x=0; \qquad -x^2+4xy^2-2x=0.$$

Problemi vari

Gli esercizi dal 37 al 43 conducono ad esaminare dei fasci di coniche. Per risolvere gli esercizi è opportuno tenere presenti anche le considerazioni svolte nel testo, cap. 1, Parte quarta, paragrafi 4 e 5. In particolare occorre ricordare che un'equazione del tipo $(1-e^2)x^2+y^2-2f(1+e)x=0$ rappresenta un fascio di coniche se fra i suoi coefficienti è presente un solo parametro, che compare al massimo al 1° grado.

37. Esaminare il seguente fascio di coniche:

$$\frac{3}{4}x^2+y^2-3kx=0.$$

Di che tipo di coniche si tratta?
Come varia il fuoco delle coniche al variare di k?
Qual è l'equazione della direttrice al variare di k?

38. Ripetere l'esercizio 37 a partire dal seguente fascio di coniche:

$$7x^2+16y^2-56kx=0.$$

39. Ripetere l'esercizio 37 a partire dal seguente fascio di coniche:

$$x=ky^2.$$

40. Ripetere l'esercizio 37 a partire dal seguente fascio di coniche:

$$-3x^2+y^2-6kx=0.$$

41. Ripetere l'esercizio 37 a partire dal seguente fascio di coniche:

$$-8x^2+y^2-8kx=0.$$

42. Esaminare il seguente insieme di coniche:

$$(1-k^2)x^2+y^2-2(1+k)x=0.$$

Si tratta di un fascio di coniche?
Per quali valori di k si ottengono ellissi?
Per quale valore di k si ha la parabola?
Per quali valori di k si hanno delle iperboli?
Che cosa hanno in comune tutte le coniche?
Che cosa succede per $k=-1$?

43. Esaminare il seguente insieme di coniche:

$$k(2-k)x^2+y^2-2kx=0.$$

Si tratta di un fascio di coniche?
Indicare i valori di k per cui si ottengono ellissi e iperboli.
Che cosa succede per $k=2$?
Che cosa succede per $k=0$?

Gli esercizi dal 44 al 50 conducono ad impadronirsi della nozione di ***luogo geometrico****: si troverà l'equazione ed il grafico di una curva, conoscendo soltanto la condizione che un punto P(x,y) deve soddisfare per percorrere la curva; la curva così individuata prende il nome di luogo dei punti P che soddisfano la condizione assegnata.*

44. Un punto $P(x,y)$ si muove sul piano mantenendo sempre uguale a 3 la somma delle distanze dal punto $H(1,0)$ e dall'asse delle y. Quale curva descrive P?
(La curva è la parabola d'equazione $x=\frac{y^2}{8}-1$*)*

45. Trattare il problema precedente più in generale: un punto $P(x,y)$ si muove nel piano mantenendo costante la somma delle distanze da un punto H e da una retta r; quale curva descrive p?
(Conviene scegliere l'asse delle y coincidente con la retta r e l'asse delle x coincidente con la perpendicolare ad r condotta da H. Indicando con a l'ascissa di H e con k il valore della costante, si ottiene che P descrive la parabola d'equazione $x=\frac{y^2}{2(a-k)}+\frac{a+k}{2}$*)*

46. Un punto $P(x,y)$ si muove nel piano mantenendo sempre uguale a 3 il rapporto delle distanze dai punti $A(-1,0)$ e $B(1,0)$; quale curva descrive P?
(La curva è la circonferenza d'equazione $x^2+y^2-\frac{5}{2}x+1=0$*)*

47. Trattare il problema più in generale: un punto $P(x,y)$ si muove nel piano mantenendo costante il rapporto delle distanze da due punti A e B; quale curva descrive P?
(Conviene scegliere l'asse delle x coincidente con la retta AB e l'origine O nel punto medio di AB; così risulta A(−a,0) e B(a,0). Indicando con k il valore della costante, si ottiene la circonferenza d'equazione $x^2+y^2+2a\frac{1+k^2}{1-k^2}x+a^2=0$*)*

48. Un punto $P(x,y)$ si muove nel piano mantenendosi equidistante dai due punti $A(-2,1)$ e $B(3,-2)$; quale curva descrive P?
In quanti modi si può trovare la risposta alla domanda?
(La curva è la retta d'equazione $y=\frac{5}{3}x-\frac{4}{3}$*)*

49. Un punto $P(x,y)$ si muove nel piano mantenendosi equidistante dall'asse delle x e dalla retta d'equazione $y=\sqrt{3}x$; quale curva descrive il punto P?
(Tenendo presente la formula per calcolare la distanza di un punto da una retta, esposta nell'esercizio 52, cap. 1, Parte quinta, si ottiene che il punto descrive le due rette d'equazione $y=-\sqrt{3}x$ *e* $y=\frac{\sqrt{3}x}{3}$ *che sono le bisettrici degli angoli determinati dalle due rette assegnate)*

50. Trattare il problema precedente più in generale: un punto $P(x,y)$ si muove mantenendosi equidistante dall'asse delle x e dalla retta d'equazione $y=mx$; quale curva descrive il punto?
(Si trova che P si muove sulle due rette d'equazione $y=\frac{mx}{1+\sqrt{1+m^2}}$, $y=\frac{mx}{1-\sqrt{1+m^2}}$*)*

2. Parte seconda
Esercizi

Parabole con direttrice parallela all'asse delle x

Parabole con vertice in $O(0,0)$

Gli esercizi dall'1 all'8 richiedono di considerare parabole con la direttrice parallela all'asse delle x ed il vertice $V=O(0,0)$. Per risolvere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 1. In particolare bisogna ricordare che le parabole considerate hanno:

- *il fuoco nel punto $F(0,f)$,*
- *la direttrice d d'equazione $y=-f$,*
- *l'equazione del tipo $y=ax^2$ con $a=\frac{1}{4f}$.*

1. Tracciare il grafico delle seguenti parabole:

$$(a)\ y=x^2, \quad (b)\ y=\frac{1}{4}x^2, \quad (c)\ y=\frac{1}{16}x^2, \quad (d)\ y=-x^2, \quad (e)\ y=-\frac{1}{4}x^2.$$

Per ogni curva indicare le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice.
Descrivere le trasformazioni del piano che trasformano la curva (a) in ciascun delle altre.

2. Ripetere l'esercizio 1 a partire dalle seguenti equazioni:

$$(a)\ y=\frac{1}{8}x^2, \quad (b)\ y=\frac{1}{4}x^2, \quad (c)\ y=\frac{3}{8}x^2, \quad (d)\ y=-\frac{1}{8}x^2, \quad (e)\ y=-\frac{1}{4}x^2.$$

3. Ripetere l'esercizio 1 a partire dalle seguenti equazioni:

$$(a)\ y=x^2, \quad (b)\ y=4x^2, \quad (c)\ y=16x^2, \quad (d)\ y=-x^2, \quad (e)\ y=-4x^2.$$

4. Ripetere l'esercizio 1 a partire dalle seguenti equazioni:

$$(a)\ y=\frac{3}{2}x^2, \quad (b)\ y=3x^2, \quad (c)\ y=6x^2, \quad (d)\ y=-3x^2, \quad (e)\ y=-6x^2.$$

5. Scrivere l'equazione e tracciare il grafico delle tre parabole che hanno la direttrice parallela all'asse delle x, il vertice $V=O(0,0)$ e il fuoco nei seguenti punti:

$$F_1(0,1), \quad F_2\left(0,\frac{1}{2}\right), \quad F_3(0,2).$$

Scrivere, per ogni parabola, l'equazione della direttrice.

6. Ripetere l'esercizio 5 per le tre parabole che hanno il fuoco nei seguenti punti:

$$F_1(0,-1), \quad F_2\left(0,-\frac{1}{4}\right), \quad F_3(0,-4).$$

7. Scrivere l'equazione e tracciare il grafico delle tre parabole con il vertice $V=O(0,0)$ e le direttrici che hanno le seguenti equazioni:

$$d_1{:}y=-1, \quad d_2{:}y=-\frac{1}{3}, \quad d_3{:}y=-3.$$

Indicare, per ogni parabola, le coordinate del fuoco.

8. Ripetere l'esercizio 7 per le tre parabole che hanno le seguenti direttrici:

$$d_1{:}y=1, \quad d_2{:}y=\frac{1}{8}, \quad d_3{:}y=8.$$

Parabole con vertice in un punto qualunque

Gli esercizi dal 9 al 14 richiedono di operare delle traslazioni lungo gli assi cartesiani a partire da parabole con la direttrice parallela all'asse delle x ed il vertice $V=O(0,0)$. Per risolvere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 2 e le nozioni sulle traslazioni esposte nel cap. 1, Parte terza, paragrafi 5, 6 e 7.

9. Determinare le equazioni delle tre parabole che si ottengono a partire dalla parabola d'equazione

$$y=x^2,$$

operando le traslazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y+1 \end{cases} \qquad \text{III)}\ \begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y+1. \end{cases}$$

Per ciascuna delle tre parabole,
- tracciare il grafico,
- determinare le coordinate del vertice V e del fuoco F,
- scrivere l'equazione della direttrice

sia rispetto al riferimento Oxy, che rispetto al riferimento $O'x'y'$.

10. Ripetere l'esercizio 9 a partire dalla parabola d'equazione

$$y=2x^2$$

e dalle traslazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y-1 \end{cases} \qquad \text{III)}\ \begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y-1. \end{cases}$$

11. Ripetere l'esercizio 9 a partire dalla parabola d'equazione

$$y=\frac{1}{2}x^2$$

e dalle traslazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y-2 \end{cases} \qquad \text{III)}\ \begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y-2. \end{cases}$$

12. Ripetere l'esercizio 9 a partire dalla parabola d'equazione

$$y=-x^2$$

e dalle traslazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y+3 \end{cases} \qquad \text{III)}\ \begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y+3. \end{cases}$$

13. Ripetere l'esercizio 9 a partire dalla parabola d'equazione

$$y=-4x^2$$

e dalle traslazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x+\frac{1}{2} \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y+\frac{5}{4} \end{cases} \qquad \text{III)}\ \begin{cases} x'=x+\frac{1}{2} \\ y'=y+\frac{5}{4}. \end{cases}$$

14. Ripetere l'esercizio 9 a partire dalla parabola d'equazione

$$y=-\frac{3}{2}x^2$$

e dalle traslazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x-\frac{3}{4} \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y-\frac{7}{8} \end{cases} \qquad \text{III)}\ \begin{cases} x'=x-\frac{3}{4} \\ y'=y-\frac{7}{8}. \end{cases}$$

Gli esercizi dal 15 al 22 conducono a studiare il grafico di parabole che hanno l'equazione del tipo $y=ax^2+bx+c$. Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel *paragrafo 3. In particolare bisogna ricordare che le parabole considerate hanno:*

– *il vertice* $V(p,q)$ *con* $p=\frac{-b}{2a}$ *e* $q=ap^2+bp+c=\frac{-\Delta}{4a}$;

– *il fuoco* $F\left(p,q+\frac{1}{4a}\right)$;

– *la direttrice d d'equazione* $y=q-\frac{1}{4a}$.

15. Disegnare le due parabole che hanno le equazioni seguenti:

$$(a)\ y=\frac{1}{2}x^2-2x+3; \qquad (b)\ y=-\frac{1}{2}x^2+2x-3.$$

Per ciascuna parabola determinare le coordinate del vertice V, del fuoco F e degli eventuali punti di intersezione con gli assi cartesiani; scrivere infine l'equazione della direttrice.
Quale trasformazione del piano trasforma la prima curva nella seconda?

16. Ripetere l'esercizio 15 a partire dalle seguenti equazioni:

$$(a)\ y=x^2-4x; \qquad (b)\ y=-x^2+4x.$$

17. Ripetere l'esercizio 15 a partire dalle seguenti equazioni:

$$(a)\ y=x^2-4; \qquad (b)\ y=-x^2+4.$$

18. Ripetere l'esercizio 15 a partire dalle seguenti equazioni:

$$(a)\ y=2x^2+3; \qquad (b)\ y=-2x^2-3.$$

19. Ripetere l'esercizio 15 a partire dalle seguenti equazioni:

$$(a)\ y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x-1; \qquad (b)\ y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+1.$$

20. Ripetere l'esercizio 15 a partire dalle seguenti equazioni:

$$(a)\ y=4x^2+x; \qquad (b)\ y=x^2+\frac{1}{4}x.$$

21. Ripetere l'esercizio 15 a partire dalle seguenti equazioni:

$$(a)\ y=-\frac{3}{4}x^2+1; \qquad (b)\ y=-3x^2+4.$$

22. Ripetere l'esercizio 15 a partire dalle seguenti equazioni:

$$(a)\ y=-x^2+2x-1; \qquad (b)\ y=-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}.$$

Problemi vari sulla parabola

Parabole soggette a condizioni

Gli esercizi dal 23 al 33 richiedono di determinare le equazioni di parabole che soddisfano delle condizioni assegnate. Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti anche le considerazioni svolte nel cap. 1, Parte quinta, paragrafo 4.

23. Determinare l'equazione della parabola che ha la direttrice d d'equazione $y=1$ ed il fuoco nel punto $F(4,5)$. In quanti modi si può svolgere l'esercizio?
(L'esercizio si può svolgere in almeno due modi.

I) Tenere presente che un punto $P(x,y)$ percorre la parabola solo se risulta

$$PF=Pd,$$

ossia

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}=y-1,$$

da cui...

II) Considerare la proiezione ortogonale D di F sulla retta d e osservare che la parabola ha il vertice V, che cade nel punto medio del segmento FD; perciò si ha V(4,3) e F(4,3+2). Basandosi sulle considerazioni svolte nei paragrafi 2 e 3, si conclude che la parabola assegnata si ottiene così:

- *si considera la parabola d'equazione $y=ax^2$ con $a=\dots$*
- *si operano le traslazioni lungo gli assi descritte dalle equazioni...*

In ogni caso si ottiene l'equazione $y=\frac{1}{8}x^2-x+5$)

24. Ripetere l'esercizio 23 a partire dalla direttrice d d'equazione $y=1$ e dal fuoco $F(4,-5)$.
(Si ottiene l'equazione $y=\frac{-1}{12}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{10}{3}$)

25. Ripetere l'esercizio 23 in generale, per verificare che l'equazione della parabola con direttrice d d'equazione $y=h$ e fuoco nel punto $F(p,k)$ è sempre del tipo $y=ax^2+bx+c$.
Quali relazioni legano i coefficienti a, b, c ai dati h, p, k?
In quali casi si ottiene $a>0$?
In quali casi si ottiene $a<0$?
Si può assegnare $k=h$?
(Si trovano le relazioni seguenti:

$$\frac{1}{2(k-h)}=a, \qquad \frac{-2p}{2(k-h)}=b, \qquad \frac{p^2+k^2-h^2}{2(k-h)}=c.$$

ossia

$$p=\frac{-b}{2a}, \qquad k=\frac{1-\Delta}{4a}, \qquad h=\frac{-1-\Delta}{4a}, \qquad \text{con } \Delta=b^2-4ac)$$

26. Scrivere l'equazione della parabola che ha il fuoco nel punto $F(2,3)$ e vertice nel punto $V(2,4)$. Tracciare il grafico della curva e della relativa direttrice.
(Il problema si può risolvere in più modi, fra i quali segnaliamo i seguenti:

I) ricavare dai dati l'equazione della direttrice e ricondursi al problema precedente,
II) ricordare che l'equazione deve essere del tipo $y=ax^2+bx+c$ e sono date le seguenti condizioni:

- *V(2,4) appartiene alla parabola, perciò deve risultare $4=a2^2+b2+c$,*
- *V(2,4) è vertice della parabola, » » » $2=\frac{-b}{2a}$,*
- *F(2,3) è fuoco della parabola, » » » $3=\frac{1-(b^2-4ac)}{4a}$.*

In ogni caso si ottiene $y=-\frac{1}{4}x^2+x+3$)

27. Scrivere l'equazione della parabola che ha il fuoco nel punto $F(1,2)$ e vertice nel punto $V(1,0)$. Tracciare il grafico della curva e della relativa direttrice.
(Si ottiene $y=\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}$)

28. Scrivere l'equazione della parabola che ha il vertice nel punto $V(2,1)$ e la direttrice d coincidente con l'asse delle x. Tracciare il grafico della curva ed indicare le coordinate del fuoco.
(Il problema si può risolvere in più modi, fra i quali segnaliamo i seguenti:

I) ricavare dai dati le coordinate del fuoco e ricondursi al problema proposto nell'esercizio 25,
II) ricordare che l'equazione deve essere del tipo $y=ax^2+bx+c$ e sono date le seguenti condizioni:

- *V(2,1) appartiene alla parabola, perciò deve risultare $1=a2^2+b2+c$,*
- *V(2,1) è vertice della parabola, » » » $2=\frac{-b}{2a}$,*
- *la retta d'equazione $y=0$ è la direttrice, » » $0=\frac{-1-(b^2-4ac)}{4a}$.*

Con questo metodo ci si riduce a risolvere un sistema di 2° grado che però si riduce ad un sistema di 1° grado, quando si procede alla risoluzione per sostituzione.
In ogni caso si ottiene $y=\frac{1}{4}x^2-x+2$)

29. Scrivere l'equazione della parabola che ha il vertice nel punto $V(0,-1)$ e la direttrice d d'equazione $y=-2$. Tracciare il grafico della curva ed indicare le coordinate del fuoco.
(Si ottiene $y=\frac{1}{4}x^2-1$)

30. Una parabola con la direttrice parallela all'asse delle x deve soddisfare le seguenti condizioni: passare per i punti $A(-2,-3)$ e $B(2,1)$ ed avere come direttrice d la retta d'equazione $y=\frac{7}{2}$.
La parabola è unica?
Se il problema ammette più soluzioni, scrivere le equazioni delle parabole che soddisfano le condizioni assegnate e tracciarne il grafico, indicando, per ogni parabola, le coordinate del vertice e del fuoco.
(Si può procedere ricordando che l'equazione deve essere del tipo $y=ax^2+bx+c$ e sono date le seguenti condizioni:
- *$A(-2,-3)$ appartiene alla parabola, perciò deve risultare $-3=a(-2)^2+b(-2)+c$,*
- *$B(2,1)$ » » » » » » $1=a2^2+b2+c$,*
- *la retta d'equazione $y=\frac{7}{2}$ è la direttrice, » » » $\frac{7}{2}=\frac{-1-(b^2-4ac)}{4a}$.*

Per determinare a, b, c si deve risolvere un sistema di 2° grado che fornisce due terne di valori a, b, c.
Si ottengono dunque le due parabole d'equazione $y=-x^2+x+3$ e $y=-\frac{1}{8}x^2+x-\frac{1}{2}$)

31. Una parabola con la direttrice parallela all'asse delle x deve soddisfare le seguenti condizioni: passare per i punti $A(0,-1)$ e $B(1,2)$ ed avere come direttrice d la retta d'equazione $y=-\frac{9}{4}$.
La parabola è unica?
Se il problema ammette più soluzioni, scrivere le equazioni delle parabole che soddisfano le condizioni assegnate e tracciarne il grafico, indicando, per ogni parabola, le coordinate del vertice e del fuoco.
(Vedere le considerazioni relative all'esercizio precedente; si ottengono le due parabole d'equazione $y=x^2+2x-1$ e $y=10x^2-7x-1$)

32. Una parabola con la direttrice parallela all'asse delle x deve soddisfare le seguenti condizioni: passare per il punto $A(4,2)$ ed avere il fuoco nel punto $F(0,-1)$.
La parabola è unica?
Se il problema ammette più soluzioni, scrivere le equazioni delle parabole che soddisfano le condizioni assegnate e tracciarne il grafico, indicando, per ogni parabola, le coordinate del vertice e l'equazione della direttrice.
(Si può procedere ricordando che l'equazione deve essere del tipo $y=ax^2+bx+c$ e sono date le seguenti condizioni:
- *$A(4,2)$ appartiene alla parabola, perciò deve risultare $2=a4^2+b4+c$,*
- *$F(0,-1)$ deve essere il fuoco, » » » $\begin{cases} 0=\frac{-b}{2a}, \\ -1=\frac{1-(b^2-4ac)}{4a}. \end{cases}$*

Per determinare a, b, c si deve risolvere un sistema di 2° grado che fornisce due terne di valori a, b, c.
Si ottengono dunque le due parabole d'equazione $y=\frac{1}{4}x^2-2$ e $y=\frac{-1}{16}x^2+3$)

33. Una parabola con la direttrice parallela all'asse delle x deve soddisfare le seguenti condizioni: passare per il punto $O(0,0)$ ed avere il fuoco nel punto $F\left(2,\frac{3}{2}\right)$.
La parabola è unica?
Se il problema ammette più soluzioni, scrivere le equazioni delle parabole che soddisfano le condizioni assegnate e tracciarne il grafico, indicando, per ogni parabola, le coordinate del vertice e l'equazione della direttrice.
(Vedere le considerazioni svolte nell'esercizio precedente. Si ottengono le due parabole d'equazione $y=\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x$ e $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$)

Fasci di parabole

Gli esercizi dal 34 al 39 conducono a studiare dei fasci di parabole. Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti anche le considerazioni svolte nel cap. 1, Parte quinta, paragrafi 4 e 5.

34. Determinare l'equazione che descrive tutte le parabole che hanno il fuoco nell'origine.
In quali casi si ottengono parabole che passano per $A(1,0)$?
Le parabole formano un fascio?
Come varia il vertice delle parabole?
(Si può procedere in più modi, fra i quali segnaliamo il seguente:
ricordare che l'equazione deve essere del tipo $y=ax^2+bx+c$ ed è dato solo il fuoco $F(0,0)$; perciò deve risultare $0=\frac{-b}{2a}$, $0=\frac{1-(b^2-4ac)}{4a}$.
Le due condizioni non permettono ovviamente di determinare il valore dei tre coefficienti a, b, c...; si ottiene l'equazione $y=kx^2-\frac{1}{4k}$.
Le parabole che passano per A sono due: $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ e $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$)

35. Determinare l'equazione che descrive tutte le parabole che hanno l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle y e la direttrice d'equazione $y=\frac{1}{4}$.
Come varia il vertice delle parabole?
In quali casi si ottengono parabole che passano per $A(1,-1)$?
Le parabole formano un fascio?
(Si può procedere in più modi, fra i quali segnaliamo il seguente:
ricordare che l'equazione deve essere del tipo $y=ax^2+bx+c$ e sono date solo le seguenti informazioni:
- *l'asse di simmetria ha equazione $x=0$, perciò sia il vertice che il fuoco hanno l'ascissa che vale 0; deve quindi risultare $0=\frac{-b}{2a}$,*
- *la direttrice ha equazione $y=\frac{1}{4}$, perciò deve risultare $\frac{1}{4}=\frac{-1-(b^2-4ac)}{4a}$.*

Le due condizioni non permettono ovviamente di determinare il valore dei tre coefficienti a, b, c...; si ottiene l'equazione $y=kx^2+\frac{k+1}{4k}$.
Le parabole che passano per A sono due: $y=-x^2$ e $y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}$)

36. Determinare l'equazione che descrive tutte le parabole che hanno la direttrice d'equazione $y=-1$ e passano per $O(0,0)$.
Come varia il vertice delle parabole?
In quali casi si ottengono parabole che passano per $A(2,4)$?
Le parabole formano un fascio?
(Si può procedere in più modi, fra i quali segnaliamo il seguente:
ricordare che l'equazione deve essere del tipo $y=ax^2+bx+c$ e sono date solo le seguenti informazioni:
- *le parabole passano per $O(0,0)$, perciò deve risultare $c=0$,*
- *la direttrice ha equazione $y=-1$, perciò deve risultare $-1=\frac{-1-(b^2-4ac)}{4a}$.*

Le due condizioni non permettono ovviamente di determinare il valore dei tre coefficienti a, b, c...; si ottiene l'equazione $y=\frac{(k^2+1)}{4}x^2+kx$.
Le parabole che passano per A sono due: $y=\frac{5}{2}x^2-3x$ e $y=-\frac{1}{2}x^2+x$)

37. Determinare l'equazione che descrive tutte le parabole che hanno la direttrice parallela all'asse delle x e passano per i due punti $O(0,0)$ e $A(1,-1)$.
Come variano i vertici delle parabole?
In quali casi si ottengono parabole che passano per $B(-2,2)$?
Le parabole formano un fascio?
(Si ottiene l'equazione $y=kx^2+kx$; la parabola che passa per B è l'unica ed ha equazione $y=x^2+x$)

38. È dato il fascio di parabole d'equazione $y=kx^2-2kx+3$.
Come variano i vertici delle parabole?
Ci sono dei punti comuni a tutte le parabole del fascio?
Quali sono le parabole del fascio che rivolgono la concavità verso l'alto?
Quali sono le parabole del fascio che rivolgono la concavità verso il basso?
Quale curva del fascio si individua per $k=0$?

39. È dato il fascio di parabole d'equazione $y=(k-1)x^2-2x+k$.
Come variano i fuochi delle parabole?
Quali sono le parabole del fascio che rivolgono la concavità verso l'alto?
Quali sono le parabole del fascio che rivolgono la concavità verso il basso?
Quale curva del fascio si individua per $k=1$?

Proprietà della parabola

Gli esercizi dal 40 al 48 conducono a scoprire delle proprietà caratteristiche della parabola.

40. Data la parabola d'equazione $y=x^2$, considerare il punto P della curva che ha ascissa 1 e la tangente t alla curva in P. Determinare i due punti seguenti:

A, proiezione ortogonale di P sull'asse di simmetria della parabola,
B, intersezione di t con l'asse di simmetria della parabola.

Verificare che il vertice V della parabola dimezza il segmento AB.

41. Ripetere l'esercizio 40 a partire da altri punti P della parabola.

42. Determinare il fuoco F e la direttrice d della parabola d'equazione $y=x^2-2x-24$.
Calcolare le coordinate dei punti A, B, C dove la parabola incontra gli assi coordinati e determinare le equazioni delle rette t_A, t_B, t_C, tangenti alla parabola in questi punti. Scrivere l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo T individuato dalle tre tangenti.
Verificare che valgono le seguenti proprietà:

a) la circonferenza passa per il fuoco F,

b) l'ortocentro del triangolo T, cioè il punto d'incontro delle altezze, appartiene alla direttrice.

43. Determinare il fuoco F e la direttrice d della parabola d'equazione $y=\frac{1}{4}x^2$.

Calcolare le coordinate dei punti A e B, in cui la retta r d'equazione $y=\frac{3}{4}x+1$ incontra la parabola; determinare le equazioni delle rette t_A e t_B, tangenti alla parabola in A e in B. Calcolare le coordinate del punto C in cui si incontrano le due tangenti.
Verificare che valgono le seguenti proprietà:

a) la retta r passa per F,

b) il punto C appartiene alla direttrice d,

c) t_A e t_B sono perpendicolari fra loro,

d) la retta CF è perpendicolare alla retta r.

44. Ripetere l'esercizio 43 a partire dalla stessa parabola, ma considerando un'altra retta r passante per F; scegliere, per esempio, r d'equazione

$$y=-\frac{4}{3}x+1.$$

45. Determinare il fuoco F e la direttrice d della parabola d'equazione $y=-\frac{1}{4}x^2$. Scrivere le equazioni delle rette t e t', che passano per $C\left(\frac{3}{2},1\right)$ e sono tangenti alla parabola; determinare le coordinate dei punti A e B di contatto.
Verificare che valgono le seguenti proprietà:

a) C appartiene alla direttrice,

b) t e t' sono perpendicolari fra loro,

c) la retta AB passa per il fuoco F.

46. Ripetere l'esercizio 45 sempre a partire dalla stessa parabola, ma considerando un altro punto C, che appartiene alla direttrice; considerare, per esempio, $C(0,1)$.

47. Determinare il fuoco F e la direttrice d della parabola d'equazione $y=\frac{1}{4}x^2$.

Considerare la tangente t alla parabola nel suo punto $P(2,1)$. Condurre dal fuoco F la perpendicolare a t ed indicare con H il piede della perpendicolare.
Verificare che H si trova sull'asse delle x.

48. Ripetere l'esercizio 47 a partire da altri punti della stessa parabola.

Costruzioni geometriche della parabola

Gli esercizi dal 49 al 51 conducono a studiare dei procedimenti geometrici per costruire parabole.

49. Indicare una retta d ed un punto F su un foglio da disegno e trovare tanti punti con il procedimento illustrato in fig. 1:

- si traccia una retta a, parallela a d,
- si valuta la distanza h_a fra a e d,
- si traccia la circonferenza C che ha centro in F e raggio h_a,
- si indicano gli eventuali punti P_a e Q_a di intersezione fra la circonferenza C e la retta a,
- si traccia un'altra retta b, parallela a d e si ripete il procedimento.

In quale caso si ottiene la circonferenza tangente alla retta?
In quali casi la circonferenza non interseca la retta?
Dimostrare che i punti P_a, Q_a, P_b, Q_b, ... appartengono tutti alla parabola che ha fuoco F e direttrice d e che si può disegnare la parabola raccordando i punti indicati.

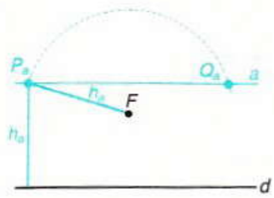

Fig. 1

50. Indicare una retta d ed un punto F su un foglio da disegno e trovare vari punti con il procedimento illustrato in fig. 2:

- si appoggia alla retta d una squadretta con il lato RV lungo b,
- si prende uno spago lungo b,
- si fissa un estremo dello spago nel vertice R della squadretta e l'altro estremo nel punto F,
- si inserisce la punta P di una matita in modo che il tratto RP di spago si adagi sul lato della squadretta.

Dimostrare che, se si fa scorrere la squadretta sulla direttrice (fig. 3), la matita disegna la parabola che ha direttrice d e fuoco F.

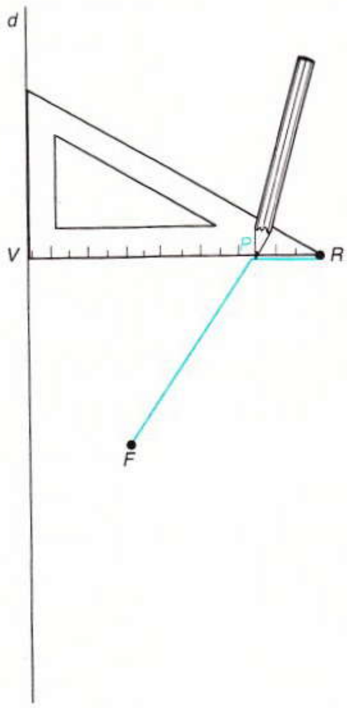

Fig. 2

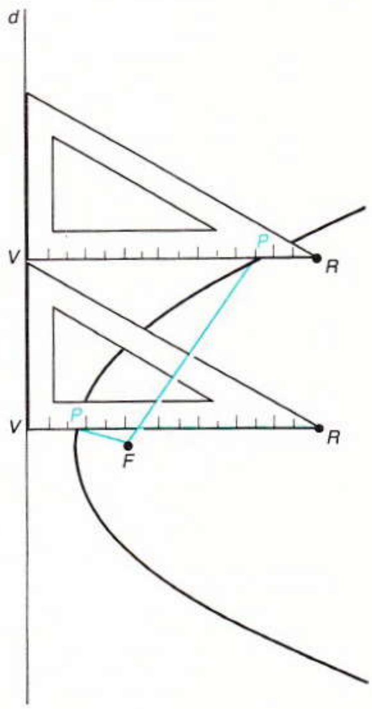

Fig. 3

51. Dopo aver svolto gli esercizi 47 e 48, si intuisce una proprietà della parabola: il piede H della perpendicolare condotta dal fuoco ad una qualunque tangente alla parabola si trova sempre sulla retta tangente alla parabola nel vertice. Questa proprietà permette di costruire la parabola per tangenti. Ci si basa sulla fig. 4, in cui abbiamo disegnato la retta t, che sarà la tangente alla parabola nel vertice, ed il fuoco F. Si fa scorrere il vertice di una squadretta lungo la retta t, in modo che un suo lato passi per F; l'altro lato assume sempre la direzione tangente alla parabola. Nasce così la parabola come inviluppo delle sue tangenti (fig. 5).

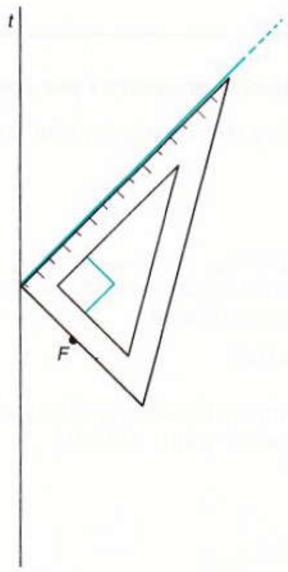

Fig. 4

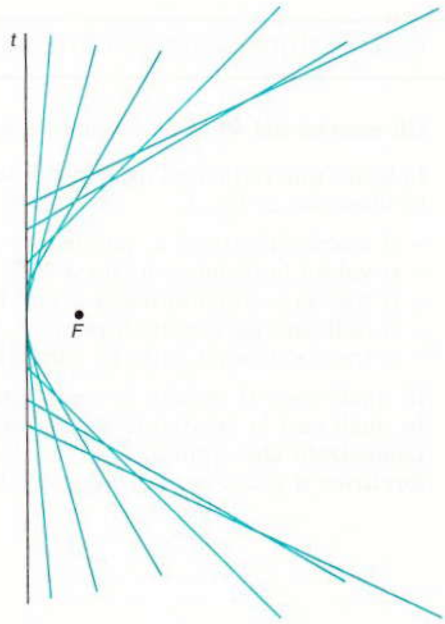

Fig. 5

2. Parte terza
Esercizi

L'equazione "normale" dell'ellisse

Gli esercizi dall'1 al 6 conducono a valersi di opportune traslazioni per scrivere in forma "normale" le equazioni di ellissi assegnate. Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 1.

1. È data l'ellisse d'equazione

$$\frac{5}{9}x^2+y^2-10x=0.$$

Tracciare il grafico della curva e determinare i punti d'intersezione con gli assi cartesiani, il centro, il fuoco, la direttrice e l'eccentricità.
Scrivere le equazioni della traslazione che porta l'ellisse ad avere il centro nell'origine.
Scrivere l'equazione dell'ellisse in forma normale e determinare la distanza focale c, verificando che risulta $e=\frac{c}{a}$.
(Per tracciare il grafico della curva assegnata, v. anche gli esercizi della Parte prima)

2. Ripetere l'esercizio 1, a partire dall'ellisse d'equazione $\frac{3}{4}x^2+y^2-12x=0$.

3. Ripetere l'esercizio 1, a partire dall'ellisse d'equazione $\frac{7}{16}x^2+y^2-7x=0$.

4. Ripetere l'esercizio 1, a partire dall'ellisse d'equazione $\frac{11}{36}x^2+y^2-\frac{22}{3}x=0$.

5. Ripetere l'esercizio 1, a partire dall'ellisse d'equazione $\frac{5}{9}x^2+y^2-\frac{5}{3}x=0$.

6. Ripetere l'esercizio 1, a partire dall'ellisse d'equazione $\frac{16}{25}x^2+y^2-\frac{8}{5}x=0$.

Gli esercizi dal 7 al 10 conducono a tracciare il grafico di ellissi, di cui è data l'equazione normale, determinandone il fuoco, la direttrice e l'eccentricità.
Per risolvere questi esercizi, è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte alla fine del paragrafo 1. In particolare occorre ricordare che nell'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \textit{risulta} \qquad a^2=\frac{f^2}{(1-e)^2}, \qquad b^2=\frac{f^2(1+e)}{(1-e)},$$

dove e indica l'eccentricità dell'ellisse, f indica la distanza del fuoco F dal vertice A dell'ellisse (v. fig. 7, paragrafo 1). Risulta infine $\overline{OF}=c=ae$.

7. È data l'ellisse d'equazione $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

Tracciare il grafico della curva e determinarne la lunghezza dei semiassi, la distanza focale, il fuoco, l'eccentricità, l'equazione della direttrice.
(Per l'ellisse assegnata risulta: $a^2=4$, $b^2=3$. Perciò si ha:

$$4=\frac{f^2}{(1-e)^2}, \qquad 3=\frac{f^2(1+e)}{(1-e)},$$

da cui, dividendo membro a membro le due uguaglianze, $\frac{3}{4}=1-e^2$... Così è facile ricavare $e=\frac{1}{2}$; sostituendo il valore ottenuto nella prima equazione, si ottiene $f=1$...)

8. Ripetere l'esercizio 7 a partire dall'ellisse d'equazione $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

9. Ripetere l'esercizio 7 a partire dall'ellisse d'equazione $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

10. Ripetere l'esercizio 7 a partire dall'ellisse d'equazione $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

I due fuochi dell'ellisse

Gli esercizi dall'11 al 16 conducono a scrivere le equazioni di ellissi in base alla proprietà focale. Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 3. In particolare è utile ricordare che un'ellisse con l'asse maggiore lungo 2a e i fuochi nei punti $F(-c,0)$, $F'(c,0)$ ha sempre un'equazione del tipo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, con $b^2=a^2-c^2$.

11. Scrivere le equazioni delle tre ellissi che hanno l'asse maggiore lungo 12 e i fuochi nei punti seguenti:

(*a*) $F_1(-5,0)$ e $F_1'(5,0)$, (*b*) $F_2(-3,0)$ e $F_2'(3,0)$, (*c*) $F_3(-1,0)$ e $F_3'(1,0)$.

Tracciare il grafico di ciascuna curva, determinandone l'asse minore e l'eccentricità.

12. Ripetere l'esercizio 11, relativamente alle tre ellissi che hanno l'asse maggiore lungo 10 e i fuochi nei punti seguenti:

(*a*) $F_1\left(-\frac{9}{2},0\right)$ e $F_1'\left(\frac{9}{2},0\right)$, (*b*) $F_2\left(-\frac{5}{2},0\right)$ e $F_2'\left(\frac{5}{2},0\right)$, (*c*) $F_3\left(-\frac{1}{2},0\right)$ e $F_3'\left(\frac{1}{2},0\right)$.

13. Ripetere l'esercizio 11, relativamente alle tre ellissi che hanno l'asse maggiore lungo 8 e i fuochi nei punti seguenti:

(*a*) $F_1\left(-\frac{15}{4},0\right)$ e $F_1'\left(\frac{15}{4},0\right)$, (*b*) $F_2(-2,0)$ e $F_2'(2,0)$, (*c*) $F_3\left(-\frac{1}{4},0\right)$ e $F_3'\left(\frac{1}{4},0\right)$.

14. Scrivere le equazioni delle tre ellissi che hanno i fuochi nei punti $F(-3,0)$, $F'(3,0)$ e l'asse maggiore che ha la lunghezza seguente:

(1) $2a=8$, (2) $2a=12$, (3) $2a=24$.

Tracciare il grafico di ciascuna curva, determinandone l'asse minore e l'eccentricità.

15. Ripetere l'esercizio 14 relativamente alle tre ellissi che hanno i fuochi nei punti $F(-1,0)$, $F'(1,0)$ e l'asse maggiore che ha la lunghezza seguente:

(1) $2a=3$, (2) $2a=4$, (3) $2a=16$.

16. Ripetere l'esercizio 14 relativamente alle tre ellissi che hanno i fuochi nei punti $F\left(-\frac{1}{2},0\right)$, $F'\left(\frac{1}{2},0\right)$ e l'asse maggiore che ha la lunghezza seguente:

(1) $2a=3$, (2) $2a=7$, (3) $2a=9$.

Gli esercizi dal 17 al 22 conducono a tracciare il grafico di ellissi, di cui è data l'equazione nella forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Per svolgere gli esercizi, è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 4. In particolare è utile ricordare che l'ellisse assegnata ha il centro nell'origine e gli assi sugli assi cartesiani; il semiasse maggiore è lungo a, il semiasse minore è lungo b, la semidistanza focale $c=\overline{OF}$ è data da $c=\sqrt{a^2-b^2}$, l'eccentricità è data da $e=\frac{c}{a}$.

17. Tracciare il grafico delle due ellissi, che hanno le equazioni seguenti:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1, \quad \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Di ogni curva determinare: la lunghezza degli assi, l'eccentricità e i fuochi.

18. Ripetere l'esercizio 17 a partire dalle seguenti equazioni:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1, \qquad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1.$$

19. Ripetere l'esercizio 17 a partire dalle seguenti equazioni:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \qquad \frac{x^2}{2}+y^2=1.$$

20. Ripetere l'esercizio 17 a partire dalle seguenti equazioni:

$$\frac{4x^2}{17}+\frac{y^2}{4}=1, \qquad \frac{4x^2}{5}+y^2=1.$$

(Tenere presente che, relativamente alla prima equazione, risulta $\frac{4x^2}{17}=x^2\cdot\frac{4}{17}=\frac{x^2}{\frac{17}{4}}$, *perciò si ha* $a^2=\frac{17}{4}$*)*

21. Ripetere l'esercizio 17 a partire dalle seguenti equazioni:

$$\frac{x^2}{26}+\frac{y^2}{25}=1, \qquad \frac{x^2}{200}+\frac{y^2}{25}=1.$$

22. Ripetere l'esercizio 17 a partire dalle seguenti equazioni:

$$\frac{9x^2}{28}+\frac{y^2}{3}=1, \qquad \frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{3}=1.$$

Varie forme di ellisse

Gli esercizi dal 23 al 30 conducono ad operare delle trasformazioni del piano, osservando come varia la forma o la posizione di un'ellisse in seguito alle trasformazioni. Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti sia le considerazioni svolte nel paragrafo 5, sia le nozioni relative alle trasformazioni esposte nel cap. 1, Parte terza.

23. È dato il cerchio d'equazione $x^2+y^2=1$. Si opera un'affinità che altera le ordinate dei punti nel rapporto $\frac{3}{4}$; tracciare il grafico e scrivere l'equazione dell'ellisse ottenuta, determinandone i fuochi e l'eccentricità.
Sempre a partire dallo stesso cerchio, si opera un'altra affinità che altera le ordinate dei punti nel rapporto $\frac{1}{4}$; tracciare il grafico e scrivere l'equazione dell'ellisse ottenuta, determinandone i fuochi e l'eccentricità.
Quale affinità fa passare dalla prima ellisse alla seconda, senza "risalire" al cerchio?

24. Ripetere l'esercizio 23, considerando il rapporto $\frac{4}{5}$ per la prima affinità ed il rapporto $\frac{2}{5}$ per la seconda.

25. Disegnare l'ellisse d'equazione $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, determinandone gli assi, i fuochi, l'eccentricità. Operare le seguenti simmetrie:
- simmetria rispetto all'asse delle x,
- simmetria rispetto all'asse delle y,
- simmetria rispetto all'origine.
- simmetria rispetto alla bisettrice b del I e III quadrante.

Esaminare, in ogni caso, la curva trasformata.
Qual è l'unica simmetria che altera l'equazione e la posizione della curva nel riferimento?

26. Ripetere l'esercizio 25 in generale, a partire dall'equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
(Si trova che l'equazione e la posizione della curva viene alterata solo dalla simmetria rispetto alla bisettrice b del I e III quadrante. In tal caso l'ellisse ha l'equazione $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$*; l'asse maggiore si trova sull'asse delle y, l'asse minore sull'asse delle x, i fuochi sono i punti* $F(0,-c)$, $F'(0,c)$, *con* $c=\sqrt{a^2-b^2}$*)*

27. Tracciare il grafico delle ellissi che hanno le seguenti equazioni:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1, \qquad \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Determinare, relativamente a ciascuna curva, gli assi, i fuochi e l'eccentricità.
Con quale trasformazione si può passare dalla prima alla seconda curva?

28. Ripetere l'esercizio 27 a partire dalle seguenti equazioni:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1, \qquad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1.$$

29. È dato il cerchio d'equazione $x^2+y^2=1$. Si opera un'affinità che altera le ordinate dei punti nel rapporto $\frac{4}{3}$; tracciare il grafico e scrivere l'equazione dell'ellisse ottenuta, determinandone i fuochi e l'eccentricità.
Sempre a partire dallo stesso cerchio, si opera un'altra affinità che altera le ordinate dei punti nel rapporto $\frac{8}{3}$; tracciare il grafico e scrivere l'equazione dell'ellisse ottenuta, determinandone i fuochi e l'eccentricità.
Quale affinità fa passare dalla prima ellisse alla seconda, senza "risalire" al cerchio?

30. Ripetere l'esercizio 29, considerando il rapporto $\frac{5}{4}$ per la prima affinità ed il rapporto $\frac{4}{5}$ per la seconda.

Ellissi soggette a condizioni

Gli esercizi dal 31 al 40 richiedono di determinare le equazioni di ellissi che soddisfano delle condizioni assegnate. Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti anche le considerazioni svolte nel cap. 1, Parte quinta, paragrafo 4.

31. Scrivere l'equazione dell'ellisse, che ha il centro nell'origine e gli assi sugli assi coordinati, sapendo che l'asse maggiore è lungo $2a=6$ e che uno dei fuochi è $F(-2,0)$. Tracciare il grafico della curva determinandone l'asse minore e l'eccentricità.
(L'equazione deve essere della forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, *con* $b^2=a^2-c^2$.
Dell'ellisse assegnata sono date le seguenti informazioni: $2a=6$, *e quindi* $a=\ldots$, $c=2$ *e quindi* $b^2=\ldots$ *Si ottiene* $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$*)*

32. Ripetere l'esercizio 31 a partire dall'asse maggiore $2a=10$ e $F(0,-3)$.
(Per risolvere questo esercizio, è necessario tenere presenti i risultati dell'esercizio 26; dato che il fuoco si trova sull'asse delle y, l'equazione dell'ellisse è $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, *con* $b^2=a^2-c^2$. *Ripetendo il procedimento seguito nell'esercizio precedente, si arriva all'equazione* $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$*)*

33. Scrivere l'equazione dell'ellisse, che ha il centro nell'origine e gli assi sugli assi coordinati, sapendo che l'eccentricità vale 0,2 e che uno dei fuochi è $F(1,0)$. Tracciare il grafico della curva determinandone l'asse minore e l'eccentricità.
(L'equazione deve essere della forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. *con* $b^2=a^2-c^2$, $e=\frac{c}{a}$.
Dell'ellisse assegnata sono date le seguenti informazioni: $c=1$, $e=0{,}2$; *perciò risulta* $a=\frac{1}{0{,}2}=\ldots$, $b^2=\ldots$ *Si ottiene* $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{24}=1$*)*

34. Ripetere l'esercizio 33 a partire dall'eccentricità $e=0{,}125$ e da $F'(0;0{,}5)$.
(Per risolvere questo esercizio, è necessario tenere presenti i risultati dell'esercizio 26; dato che il fuoco si trova sull'asse delle y, l'equazione dell'ellisse è $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, *con* $b^2=a^2-c^2$. *Ripetendo il procedimento seguito nell'esercizio precedente, si arriva all'equazione* $\frac{8x^2}{127}+\frac{y^2}{16}=1$*)*

35. Un'ellisse ha il centro nell'origine e gli assi sugli assi coordinati; l'asse maggiore, disposto sull'asse delle x, è lungo $2a=8$ e l'eccentricità vale $0{,}75$.
Scrivere l'equazione e tracciarne il grafico della curva, determinandone l'altro asse e i fuochi.
(L'equazione deve essere della forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, *con* $b^2=a^2-c^2$, $e=\frac{c}{a}$.
Dell'ellisse assegnata sono date le seguenti informazioni: $2a=8$, *e quindi* $a=\ldots$, $e=0{,}75$ *e quindi* $c=\ldots$ *Si ottiene* $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$*)*

36. Ripetere l'esercizio 35 a partire dall'asse minore $2b=2$ e dall'eccentricità $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
(L'equazione deve essere della forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, *con* $b^2=a^2-c^2$, $e=\frac{c}{a}$.
Dell'ellisse assegnata sono date le seguenti informazioni: $2b=2$, *da cui* $b=\ldots$, $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$ *e quindi* $c=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. *Sostituendo questi valori di b e c nella relazione* $b^2=a^2-c^2$, *si ottiene* $a^2=\ldots$ *In definitiva si arriva all'equazione* $\frac{x^2}{4}+y^2=1$*)*

37. Scrivere le equazioni delle ellissi che hanno l'eccentricità $e=0{,}8$ ed uno dei vertici nel punto $V(0,-2)$. Perché si trovano due curve che soddisfano le condizioni richieste?
(Il testo non dice se V è uno degli estremi dell'asse maggiore o dell'asse minore. Perciò si hanno i due casi seguenti:

- *se V è uno degli estremi dell'asse maggiore, sono dati* $a=2$ *ed* $e=0{,}8$; *l'ellisse ha equazione* $\frac{x^2}{4}+\frac{25y^2}{36}=1$;
- *se V è uno degli estremi dell'asse minore, sono dati* $b=2$ *ed* $e=0{,}8$; *si ottiene un'altra ellisse che ha equazione* $\frac{9x^2}{100}+\frac{y^2}{4}=1$*)*

38. Scrivere l'equazione dell'ellisse che ha i fuochi nei punti $F(-3{,}0)$ e $F'(3{,}0)$ e passa per il punto $P(0{,}4)$.
Tracciare il grafico della curva, determinandone l'asse maggiore, l'asse minore e l'eccentricità.
(L'esercizio si può risolvere in più modi, fra i quali segnaliamo i seguenti:

I) Tenere presente che per tutti i punti P dell'ellisse deve essere $\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$; *conoscendo le coordinate di P, F, F', si ricava* $2a=\ldots$ *e quindi* $a=\ldots$ *Ricordando poi che risulta* $b^2=a^2-c^2$, *si ottiene* $b^2=\ldots$

II) Tenere presente che l'equazione dell'ellisse deve essere del tipo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *e che P appartiene alla curva solo se risulta* $\frac{0^2}{a^2}+\frac{4^2}{b^2}=1$.
Così si ricava $b^2=\ldots$ *e* $a^2=b^2+c^2$.
In ogni caso si ottiene l'equazione $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$*)*

39. Scrivere l'equazione dell'ellisse che ha uno dei fuochi nel punto $F(2{,}0)$ ed è tangente alla retta t d'equazione $y=x+\sqrt{14}$.
(Tenere presente che l'equazione deve essere del tipo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, *con* $b^2=a^2-c^2$; *l'ellisse risulta tangente alla retta solo se ha soluzioni coincidenti il sistema formato dall'equazione della curva e della retta t.*
Si ottengono per a e b le seguenti due condizioni: $14=a^2+b^2$, $4=a^2-b^2$ *e si arriva all'equazione* $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$*)*

40. Ripetere l'esercizio 39, sapendo che l'ellisse ha uno dei fuochi nel punto $F(0{,}1)$ ed è tangente alla retta t d'equazione $y=-\sqrt{2}x+2$.
(Si ottiene l'equazione $x^2+\frac{y^2}{2}=1$*)*

Proprietà dell'ellisse

Gli esercizi dal 41 al 50 conducono a scoprire delle proprietà caratteristiche dell'ellisse.

41. Tracciare il grafico dell'ellisse d'equazione $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$, determinandone i fuochi F (d'ascissa negativa) ed F'.
Tracciare la retta r, che passa per F ed è parallela all'asse delle y; determinare le coordinate dei punti P e Q, dove r incontra l'ellisse.
Scrivere le equazioni delle rette t_P e t_Q, tangenti all'ellisse in P e Q; determinare le coordinate del punto T in cui si incontrano t_P e t_Q.
Verificare che T è esterno all'ellisse e si trova sull'asse delle x.

42. Ripetere l'esercizio 41, considerando come retta r la parallela all'asse delle y per F'.

43. Tracciare il grafico dell'ellisse d'equazione $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$, determinandone i fuochi F ed F'.
Scrivere le equazioni delle due rette t e t', tangenti alla curva condotte dal punto $A(0,-2)$.
Scrivere l'equazione della retta n, che passa per F ed è perpendicolare a t; determinare le coordinate del punto H, in cui n incontra t.
In modo analogo determinare il piede H' della perpendicolare n', condotta da F a t'.
Ripetere il procedimento per determinare i punti K e K', piedi delle perpendicolari condotte da F' alle tangenti t e t'.
Verificare che valgono le seguenti proprietà:

I) $\overline{HO}=\overline{H'O}=\overline{KO}=\overline{K'O}=\sqrt{8}$;

II($\overline{FH}\ \overline{FH'}=\overline{F'K}\ \overline{F'K'}=2$.

44. Ripetere l'esercizio 43, considerando come rette t e t' altre tangenti all'ellisse; per esempio t è la tangente in $B(-2,1)$ e t' è la tangente in $C(2,1)$.

45. Tracciare il grafico dell'ellisse d'equazione $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, determinandone i fuochi F e F'.
Scrivere le equazioni delle due rette n ed n', tangenti alla curva condotte nei punti A e B, estremi dell'asse maggiore.
Scrivere le equazioni delle tangenti t e t' condotte dal punto $C(0,5)$.
Determinare i seguenti punti:

L ed M, in cui la retta t incontra le rette n ed n'.
N e P, in cui la retta t' incontra le stesse rette n ed n'.

Verificare che sono retti gli angoli $L\hat{F}M$, $L\hat{F'}M$, $N\hat{F}P$, $N\hat{F'}P$.

46. Ripetere l'esercizio 45, considerando come rette t e t' altre tangenti all'ellisse; per esempio t è la tangente in $D(0,-3)$ e t' è la retta d'equazione $y=-x-5$.

47. È fissata nel piano cartesiano la circonferenza C di centro $O(0,0)$ e raggio $r=1$. Si considera un punto $P(x,y)$, che si può muovere nel piano rispettando la condizione seguente: $PT^2=3PQ^2$, dove

– Q è il punto di contatto di una tangente alla circonferenza C condotta da P,
– PT è la distanza di P dall'asse delle x.

Quale curva descrive P, muovendosi nel piano?
(Tenere presente che, in base alla condizione assegnata, si può costruire un triangolo OQP, rettangolo in Q, che ha il cateto OQ lungo 1 e l'ipotenusa OP lunga $\sqrt{x^2+y^2}$; perciò risulta $PQ^2=OP^2-1=\ldots$ Si ha poi $PT^2=y^2$.
In definitiva, il punto P descrive la curva d'equazione $3x^2+2y^2-3=0$, che è un'ellisse...)

48. È dato un segmento AB lungo 7 e si indica con P il punto del segmento che dista 5 dall'estremo A. Si dispone il segmento in un riferimento cartesiano in modo che l'estremo A scorra sull'asse delle x e l'estremo B scorra sull'asse delle y. Quale curva descrive il punto P?
(Si può, per esempio, procedere nel modo seguente: si disegna il segmento AB in una posizione generica e si indicano con H e K le proiezioni ortogonali di $P(x,y)$ sull'asse delle x e sull'asse delle y. La similitudine dei triangoli BKP e APH conduce a scrivere $\frac{\overline{PK}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{HA}}{\overline{PA}}$, da cui si può ricavare $\overline{HA}$ tenendo presente che risulta $\overline{AP}=5$ e $\overline{BP}=2$. Il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo PHA conduce a scrivere $PH^2+HA^2=25\ldots$ Si ottiene che la curva descritta da P ha l'equazione seguente $y^2+\frac{25}{4}x^2=25$. Si tratta dunque di un'ellisse...)

49. Sul piano cartesiano si disegnano due circonferenze di centro $O(0,0)$ e raggi $r=2$ ed $r'=4$. Si considera poi il fascio di rette per O, d'equazione $y=mx$; una retta r del fascio incontra la circonferenza di raggio minore in N e l'altra circonferenza in M.
Da N si conduce la parallela n all'asse delle x, mentre da M si conduce la parallela s all'asse delle y; s ed n si incontrano in un punto P. Quale curva descrive P al variare della retta r nel fascio?
(P ha le coordinate seguenti $x=\frac{4}{\sqrt{1+m^2}}$, $y=\frac{2m}{\sqrt{1+m^2}}$; *si può ricavare m dalla prima relazione e sostituirlo nella seconda. In conclusione P descrive l'ellisse d'equazione* $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$*)*

50. Ripetere l'esercizio precedente, a partire da due circonferenze di centro $O(0,0)$ e raggi $r=b$ ed $r'=a$.
(Si ottiene che P descrive sempre un'ellisse che ha equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$*)*

Costruzioni geometriche dell'ellisse

Lo svolgimento dell'esercizio 50 suggerisce una costruzione per punti di un'ellisse di cui sono dati gli assi lunghi 2a e 2b (fig. 1): si disegnano due circonferenze di centro O e raggi $r_1=b$ *e* $r_2=a$*; da O si conduce una qualunque retta r che incontra la circonferenza di raggio minore in N e l'altra circonferenza in M. Da N si conduce la parallela n all'asse delle x, mentre da M si conduce la parallela s all'asse delle y; s ed n si incontrano in un punto P, che appartiene all'ellisse richiesta. Ripetendo più volte la costruzione si ottengono tanti punti P e raccordando questi punti si ottiene proprio la curva cercata.*

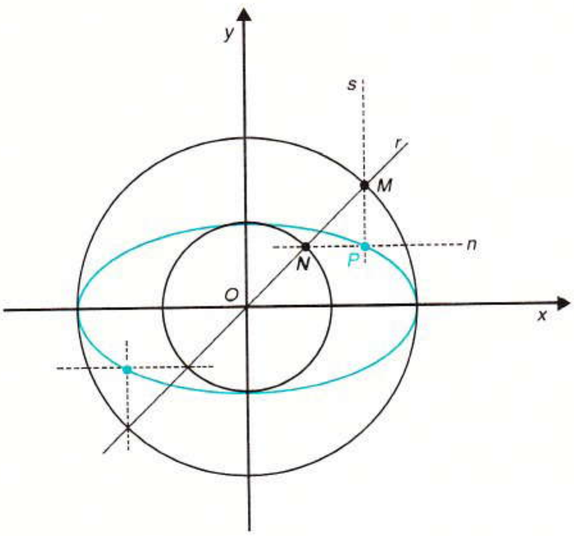

Fig. 1

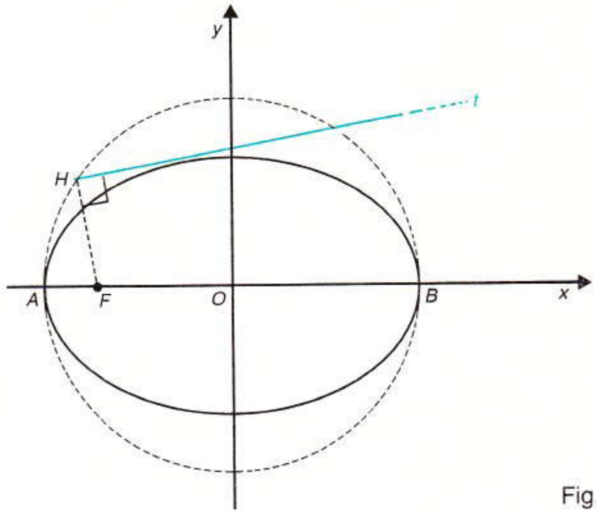

Fig. 2

Lo svolgimento dell'esercizio 43 suggerisce la seguente proprietà dell'ellisse: il piede H della perpendicolare condotta da un fuoco F ad una tangente t all'ellisse si trova sempre sulla circonferenza di centro O e raggio a (fig. 2). Viceversa, si può disegnare sul piano la circonferenza di centro O *e raggio a e fissare un punto F sull'asse delle x, all'interno della circonferenza (fig. 3). Si fa scorrere il vertice H di una squadretta lungo la circonferenza, in modo che un suo lato passi per F; l'altro lato assume sempre la posizione t, tangente all'ellisse. Nasce così l'ellisse come inviluppo delle sue tangenti (fig. 4).*

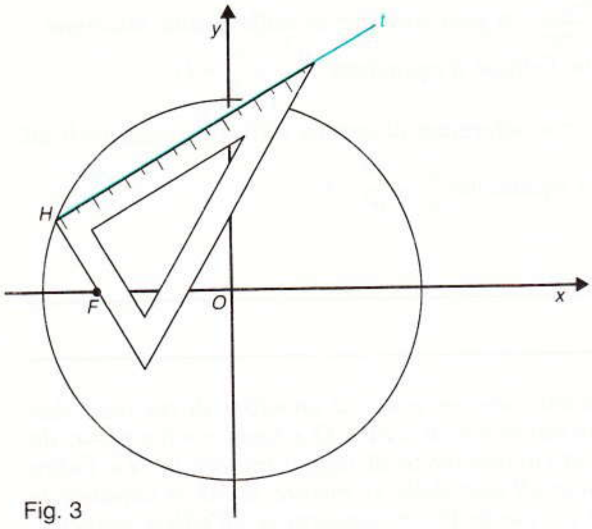

Fig. 3

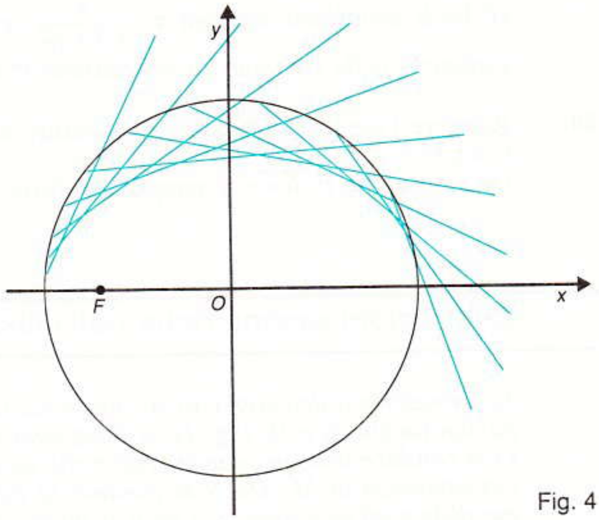

Fig. 4

2. Parte quarta
Esercizi

L'equazione "normale" dell'iperbole

Gli esercizi dall'1 al 6 conducono a valersi di opportune traslazioni per scrivere in forma "normale" le equazioni di iperboli assegnate. Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 1.

1. È data l'iperbole d'equazione

$$-\frac{16}{9}x^2+y^2-16x=0.$$

Tracciare il grafico della curva e determinare i punti d'intersezione con gli assi cartesiani, il centro, il fuoco, la direttrice e l'eccentricità.
Scrivere le equazioni della traslazione che porta l'iperbole ad avere il centro nell'origine.
Scrivere l'equazione dell'iperbole in forma normale e determinarne la distanza focale c, verificando che risulta $e=\frac{c}{a}$.
(Per tracciare il grafico della curva assegnata, vedere anche l'esercizio 34 della Parte prima)

2. Ripetere l'esercizio 1, a partire dall'iperbole d'equazione $-3x^2+y^2-6x=0$.

3. Ripetere l'esercizio 1, a partire dall'iperbole d'equazione $-8x^2+y^2-2x=0$.

4. Ripetere l'esercizio 1, a partire dall'iperbole d'equazione $\frac{-5}{4}x^2+y^2-20x=0$.

5. Ripetere l'esercizio 1, a partire dall'iperbole d'equazione $-x^2+y^2-(1+\sqrt{2})x=0$.

6. Ripetere l'esercizio 1, a partire dall'iperbole d'equazione $-x^2+y^2-2x=0$.

Gli esercizi dal 7 al 10 conducono a tracciare il grafico di iperboli, di cui è data l'equazione normale, determinandone il fuoco, la direttrice e l'eccentricità.
Per risolvere questi esercizi, è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte alla fine del paragrafo 1. In particolare occorre ricordare che nell'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \text{risulta} \qquad a^2=\frac{f^2}{(1-e)^2}, \qquad -b^2=\frac{f^2(1+e)}{(1-e)},$$

dove e indica l'eccentricità dell'iperbole, f indica la distanza del fuoco F dal vertice A dell'iperbole (v. fig. 5, paragrafo 1). Risulta infine $\overline{OF}=c=ae$.

7. È data l'iperbole d'equazione $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

Tracciare il grafico della curva e determinare la lunghezza dell'asse AB, la distanza focale, il fuoco, l'eccentricità, l'equazione della direttrice.
(Per l'iperbole assegnata risulta: $a^2=1$, $b^2=3$. Perciò si ha:

$$1=\frac{f^2}{(1-e)^2}, \qquad -3=\frac{f^2(1+e)}{(1-e)},$$

da cui, dividendo membro a membro le due uguaglianze, $-3=1-e^2$... Così è facile ricavare $e=2$; sostituendo il valore ottenuto nella prima equazione, si ottiene $f=1$...)

8. Ripetere l'esercizio 7 a partire dall'iperbole d'equazione $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$.

9. Ripetere l'esercizio 7 a partire dall'iperbole d'equazione $x^2-y^2=1$.

10. Ripetere l'esercizio 7 a partire dall'iperbole d'equazione $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

I due fuochi dell'iperbole

Gli esercizi dall'11 al 16 conducono a scrivere le equazioni di iperboli in base alla proprietà focale. Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 3. In particolare è utile ricordare che un'iperbole con l'asse AB lungo 2a e i fuochi nei punti $F(-c,0)$, $F'(c,0)$ ha sempre un'equazione del tipo $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, con $b^2=c^2-a^2$.

11. Scrivere le equazioni delle tre iperboli che hanno l'asse AB lungo 2 e i fuochi nei punti seguenti:

(a) $F_1(-9{,}0)$ e $F_1'(9{,}0)$, (b) $F_2(-5{,}0)$ e $F_2'(5{,}0)$, (c) $F_3(-2{,}0)$ e $F_3'(2{,}0)$.

Tracciare un grafico approssimativo di ciascuna curva, determinandone l'eccentricità.

12. Ripetere l'esercizio 11, relativamente alle tre iperboli che hanno l'asse AB lungo 6 e i fuochi nei punti seguenti:

(a) $F_1\left(-\frac{13}{4},0\right)$ e $F_1'\left(\frac{13}{4},0\right)$, (b) $F_2(-5{,}0)$ e $F_2'(5{,}0)$, (c) $F_3(-7{,}0)$ e $F_3'(7{,}0)$.

13. Ripetere l'esercizio 11, relativamente alle tre iperboli che hanno l'asse AB lungo 1 e i fuochi nei punti seguenti:

(a) $F_1\left(-\frac{3}{2},0\right)$ e $F_1'\left(\frac{3}{2},0\right)$, (b) $F_2\left(-\frac{7}{2},0\right)$ e $F_2'\left(\frac{7}{2},0\right)$, (c) $F_3\left(-\frac{13}{4},0\right)$ e $F_3'\left(\frac{13}{4},0\right)$.

14. Scrivere le equazioni delle tre iperboli che hanno i fuochi nei punti $F(-4{,}0)$, $F'(4{,}0)$ e l'asse AB che ha la lunghezza seguente:

(1) $2a=1$, (2) $2a=2$, (3) $2a=6$.

Tracciare un grafico approssimativo di ciascuna curva, determinandone l'eccentricità.

15. Ripetere l'esercizio 14 relativamente alle tre iperboli che hanno i fuochi nei punti $F(-2{,}0)$, $F'(2{,}0)$ e l'asse AB che ha la lunghezza seguente:

(1) $2a=3$, (2) $2a=1$, (3) $2a=\frac{1}{2}$.

16. Ripetere l'esercizio 14 relativamente alle tre iperboli che hanno i fuochi nei punti $F(-8{,}0)$, $F'(8{,}0)$ e l'asse AB che ha la lunghezza seguente:

(1) $2a=15$, (2) $2a=10$, (3) $2a=1$.

Gli asintoti dell'iperbole

Gli esercizi dal 17 al 22 conducono a tracciare il grafico di un'iperbole, di cui è data l'equazione nella forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, determinandone gli asintoti. Per svolgere gli esercizi, è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 4. In particolare è utile ricordare che l'equazione assegnata descrive un'iperbole con le seguenti caratteristiche:

- *ha il centro nell'origine $O(0,0)$,*
- *incontra l'asse delle x nei punti $A(-a,0)$ e $B(a,0)$,*
- *ha come asintoti le due rette d'equazione $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$,*
- *ha la semidistanza focale $c=\overline{OF}$ data da $c=\sqrt{a^2+b^2}$,*
- *ha l'eccentricità e data da $e=\frac{c}{a}$.*

17. Tracciare il grafico delle due iperboli, che hanno le equazioni seguenti:

$$\frac{x^2}{3}-y^2=1, \qquad x^2-\frac{y^2}{3}=1.$$

Di ogni curva determinare: i punti di intersezione con l'asse delle x, gli asintoti, l'eccentricità e i fuochi.

18. Ripetere l'esercizio 17 a partire dalle seguenti equazioni:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1, \qquad \frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1.$$

19. Ripetere l'esercizio 17 a partire dalle seguenti equazioni:

$$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1, \qquad \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1.$$

20. Ripetere l'esercizio 17 a partire dalle seguenti equazioni:

$$x^2-y^2=1, \qquad 4x^2-4y^2=1.$$

(Tenere presente che risulta $4x^2=\frac{x^2}{\frac{1}{4}}$, *perciò, per la seconda iperbole, si ha* $a^2=\frac{1}{4}$*)*

21. Ripetere l'esercizio 17 a partire dalle seguenti equazioni:

$$\frac{4x^2}{3}-4y^2=1, \qquad \frac{4}{3}x^2-\frac{4}{5}y^2=1.$$

(Tenere presente che risulta $x^2\frac{4}{3}=\frac{x^2}{\frac{3}{4}}$, *perciò, per la prima curva, si ha* $a^2=\frac{3}{4}$*)*

22. Ripetere l'esercizio 17 a partire dalle seguenti equazioni:

$$4x^2-2y^2=1, \qquad 9x^2-4y^2=1.$$

Gli esercizi dal 23 al 29 conducono a riflettere in modo più approfondito sugli asintoti dell'iperbole.

23. Tracciare il grafico dell'iperbole d'equazione $x^2-\frac{y^2}{9}=1$, determinandone gli asintoti.
Determinare i punti di intersezione della curva con le rette seguenti:

(*a*) $y=2x$, (*b*) $y=2{,}5x$, (*c*) $y=2{,}9x$, (*d*) $y=2{,}99x$.

Che cosa si osserva?
Che cosa succede se si prova a calcolare i punti d'intersezione dell'iperbole con la retta d'equazione $y=3x$?
(In base alle considerazioni esposte nel cap. 1, Parte quarta, per determinare i punti di intersezione dell'iperbole con una delle rette, occorre risolvere il sistema formato dall'equazione dell'iperbole e dall'equazione della retta. È opportuno svolgere i calcoli, valendosi di un calcolatore tascabile).

24. Ripetere l'esercizio 23, determinando i punti d'intersezione della stessa iperbole con le seguenti rette:

(*a*) $y=-2x$, (*b*) $y=-2{,}5x$, (*c*) $y=-2{,}9x$, (*d*) $y=-2{,}99x$.

Che cosa succede se si prova a calcolare i punti d'intersezione dell'iperbole con la retta d'equazione $y=-3x$?

25. Ripetere l'esercizio 23 più in generale, a partire dalla stessa iperbole e dal fascio di rette per l'origine O, d'equazione $y=mx$.
Spiegare come variano i punti d'intersezione dell'iperbole con una retta variabile nel fascio, fissando l'attenzione sulle seguenti situazioni:

I) m assume valori sempre più vicini a 3;
II) m vale *esattamente* 3;
III) m assume valori sempre più vicini a -3;
IV) m vale *esattamente* -3.

26. Tracciare il grafico dell'iperbole d'equazione $x^2-y^2=1$, determinandone gli asintoti.
Determinare i punti di intersezione della curva con le rette seguenti:

(*a*) $y=0{,}5x$, (*b*) $y=0{,}9x$, (*c*) $y=0{,}99x$, (*d*) $y=0{,}999x$.

Che cosa si osserva?
Che cosa succede se si prova a calcolare i punti d'intersezione dell'iperbole con la retta d'equazione $y=x$?
(È sempre opportuno svolgere i calcoli, valendosi di un calcolatore tascabile)

27. Ripetere l'esercizio 26, determinando i punti d'intersezione della stessa iperbole con le seguenti rette:

$$(a)\ y=-0{,}5x, \quad (b)\ y=-0{,}9x, \quad (c)\ y=-0{,}99x, \quad (d)\ y=-0{,}999x.$$

Che cosa succede se si prova a calcolare i punti d'intersezione dell'iperbole con la retta d'equazione $y=-x$?

28. Ripetere l'esercizio 26 più in generale, a partire dalla stessa iperbole e dal fascio di rette per l'origine O, d'equazione $y=mx$.
Spiegare come variano i punti d'intersezione dell'iperbole con una retta variabile nel fascio, fissando l'attenzione sulle seguenti situazioni:

I) m assume valori sempre più vicini a 1;
II) m vale *esattamente* 1;
III) m assume valori sempre più vicini a -1;
IV) m vale *esattamente* -1.

29. Ripetere l'esercizio 26 ancora più in generale, a partire dall'iperbole d'equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ e dal fascio di rette d'equazione $y=mx$.

Spiegare come variano i punti d'intersezione dell'iperbole con una retta variabile nel fascio, fissando l'attenzione sulle seguenti situazioni:

I) m assume valori sempre più vicini al valore $\frac{b}{a}$,
II) m vale *esattamente* $\frac{b}{a}$.
III) m assume valori sempre più vicini al valore $-\frac{b}{a}$,
IV) m vale *esattamente* $-\frac{b}{a}$.

30. Tracciare il grafico dell'iperbole d'equazione $x^2-\frac{y^2}{2}=1$, determinandone i vertici e gli asintoti.

Fissare l'attenzione sul ramo di curva e sul relativo asintoto, che si trovano nel primo quadrante e calcolare l'ordinata dei seguenti punti della curva: P_1 d'ascissa 5, P_2 d'ascissa 10 e P_3 d'ascissa 20.
Da ogni punto P tracciare la parallela r all'asse delle y e determinare il punto Q, in cui r incontra l'asintoto; valutare le distanze P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3.
Che cosa si osserva?

31. Ripetere l'esercizio 30 più in generale. Si fissa sempre l'attenzione sul ramo di curva e sul relativo asintoto che si trovano nel primo quadrante. Si considera un punto P variabile sulla curva, da P si traccia la parallela r all'asse delle y e si indica con Q il punto in cui r incontra l'asintoto. Come diventa la distanza $\overline{PQ}$, quando la x assume valori sempre più grandi?
(Si trova $\overline{PQ}=2(x-\sqrt{x^2-1})$; moltiplicando e dividendo per l'espressione $(x+\sqrt{x^2-1})$, si ottiene $\overline{PQ}=\frac{2}{x+\sqrt{x^2-1}}$. Se x assume valori sempre più grandi, il denominatore $(x+\sqrt{x^2-1})$ diventa sempre più grande e $\overline{PQ}$ diventa...)

32. Ripetere l'esercizio 31 ancora più in generale, a partire da un'iperbole d'equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Si fissa l'attenzione sul ramo di curva e sul relativo asintoto che si trovano nel primo quadrante; si considera un punto P variabile sulla curva, da P si traccia la parallela r all'asse delle y e si indica con Q il punto in cui r incontra l'asintoto.

Dimostrare che la distanza $\overline{PQ}$ tende a 0, quando si assegnano alla x valori sempre più grandi.
Assumendo $\overline{PQ}$ come misura della distanza dell'iperbole dagli asintoti e valendosi della simmetria della curva rispetto agli assi cartesiani, che cosa si può concludere?

(Si ottiene $\overline{PQ}=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})$; moltiplicando e dividendo per $(x+\sqrt{x^2-a^2})$, si ottiene $\overline{PQ}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$)

Varie forme di iperbole

Gli esercizi dal 33 al 38 conducono ad operare delle trasformazioni del piano, osservando come varia la forma o la posizione di un'iperbole in seguito alle trasformazioni. Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti sia le considerazioni svolte nel paragrafo 5, sia le nozioni relative alle trasformazioni esposte nel cap. 1, Parte terza.

33. È data l'iperbole equilatera d'equazione $x^2-y^2=1$. Si opera un'affinità che altera le ordinate dei punti nel rapporto $\frac{3}{4}$; tracciare il grafico e scrivere l'equazione dell'iperbole ottenuta, determinandone i fuochi e l'eccentricità.
Sempre a partire dall'iperbole equilatera, si opera un'altra affinità che altera le ordinate dei punti nel rapporto $\frac{1}{4}$; tracciare il grafico e scrivere l'equazione dell'iperbole ottenuta, determinandone i fuochi e l'eccentricità. Quale affinità fa passare dalla prima iperbole alla seconda, senza "risalire" all'iperbole equilatera?

34. Ripetere l'esercizio 33, considerando il rapporto $\frac{4}{5}$ per la prima affinità ed il rapporto $\frac{2}{5}$ per la seconda.

35. Disegnare l'iperbole d'equazione $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$, determinandone gli asintoti, i fuochi, l'eccentricità. Operare le seguenti simmetrie:

- simmetria rispetto all'asse delle x,
- simmetria rispetto all'asse delle y,
- simmetria rispetto all'origine,
- simmetria rispetto alla bisettrice b del I e III quadrante.

Esaminare, in ogni caso, la curva trasformata.
Qual è l'unica simmetria che altera l'equazione e la posizione della curva nel riferimento?

36. Ripetere l'esercizio 35 in generale, a partire dall'equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.
(Si trova che l'equazione e la posizione della curva viene alterata solo dalla simmetria rispetto alla bisettrice b del I e III quadrante; in tal caso l'iperbole ha l'equazione $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$. *La curva interseca l'asse delle y nei punti* $A(0,-a)$ *e* $B(0,a)$, *i fuochi sono i punti* $F(0,-c)$, $F'(0,c)$, *con* $c=\sqrt{a^2+b^2}$; *gli asintoti hanno equazione* $y=\frac{a}{b}x$ *e* $y=-\frac{a}{b}x$*)*

37. Tracciare il grafico delle iperboli che hanno le seguenti equazioni:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1, \qquad \frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1.$$

Determinare, relativamente a ciascuna curva, gli asintoti, i fuochi e l'eccentricità.
Con quale trasformazione si può passare dalla prima alla seconda curva?

38. Ripetere l'esercizio 37 a partire dalle seguenti equazioni:

$$x^2-y^2=1, \qquad y^2-x^2=1.$$

Gli esercizi dal 39 al 46 conducono a scrivere in due modi l'equazione di un'iperbole equilatera. Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 6.

39. Sono date le seguenti equazioni, che descrivono iperboli:

$$(a)\ x^2-y^2=1, \quad (b)\ \frac{x^2}{2}-y^2=1, \quad (c)\ x^2-y^2=2, \quad (d)\ 2x^2-y^2=2.$$

Tracciare il grafico di ciascuna curva, indicandone i punti di intersezione con l'asse delle x, gli asintoti, i fuochi e l'eccentricità.
Riconoscere le iperboli equilatere e scriverne le equazioni riferite agli asintoti. Determinare in quest'ultimo caso i vertici A e B di ciascuna curva ed i suoi fuochi F ed F'.
(Per determinare i vertici di un'iperbole equilatera d'equazione $xy=\frac{a^2}{2}$, *basta determinare le intersezioni con la retta d'equazione* $y=x$.
Per quanto riguarda i fuochi, si può tenere presente che F *ed* F' *si trovano sulla retta d'equazione* $y=x$ *ed hanno distanza da* O, *data da* $OF=OF'=c=a\sqrt{2}$...*)*

40. Ripetere l'esercizio 39 a partire dalle seguenti equazioni:

$(a)\ 4x^2-y^2=1, \quad (b)\ 4x^2-y^2=4, \quad 4x^2-4y^2=1, \quad 4x^2-4y^2=4.$

41. Ripetere l'esercizio 39 a partire dalle seguenti equazioni:

$$(a)\ \frac{16}{3}x^2-16y^2=1, \qquad (b)\ 15x^2-16y^2=1, \qquad \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1, \qquad 16x^2-16y^2=4.$$

42. Ripetere l'esercizio 39 a partire dalle seguenti equazioni:

$(a)\ y^2-x^2=2, \quad (b)\ y^2-x^2=1, \quad 4y^2-x^2=1, \quad y^2-4x^2=4.$

(L'equazione (a) descrive un'iperbole equilatera del tipo $y^2-x^2=a^2$, che, in base alle considerazioni svolte nell'esercizio 36, è disposta nel riferimento come in fig. 1. Assumendo gli asintoti come assi cartesiani, si ottiene la situazione illustrata in fig. 2; perciò l'equazione della curva, riferita agli asintoti, è $xy=-\frac{a^2}{2}$)

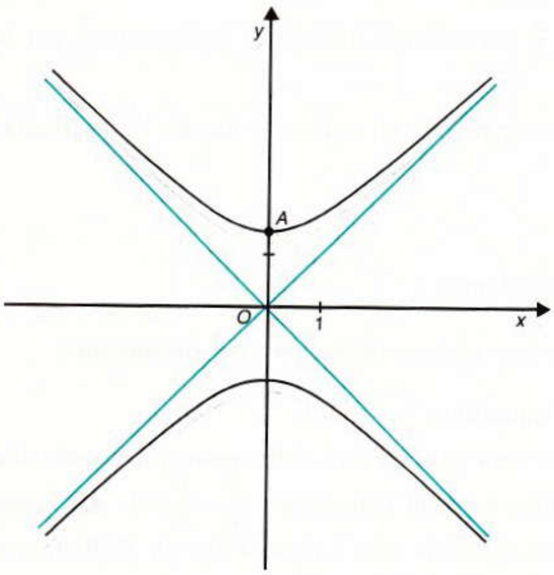

Fig. 1

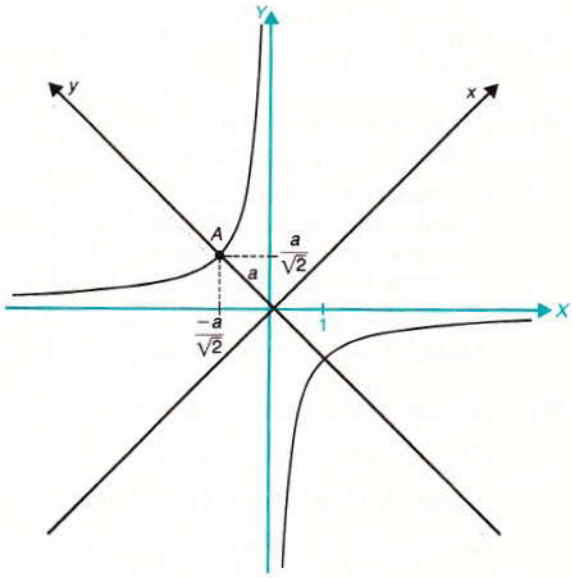

Fig. 2

43. Ripetere l'esercizio 39 a partire dalle seguenti equazioni:

$(a)\ 12y^2-12x^2=3, \quad (b)\ 12y^2-x^2=3, \quad 3y^2-12x^2=12, \quad 3y^2-3x^2=12.$

44. Le seguenti equazioni descrivono iperboli riferite agli asintoti:

$$xy=1, \qquad xy=2, \qquad xy=\frac{1}{2}.$$

Tracciare il grafico di ciascuna curva e determinarne vertici e fuochi.
Scrivere l'equazione di ciascuna curva nel riferimento che ha l'asse delle x coincidente con la retta congiungente i fuochi e tracciare il relativo grafico.

45. Ripetere l'esercizio 44 a partire dalle seguenti equazioni:

$$xy=\frac{3}{2}, \qquad xy=\frac{4}{3}, \qquad xy=4.$$

46. Ripetere l'esercizio 44 a partire dalle seguenti equazioni:

$$xy=-1, \qquad xy=-2, \qquad \frac{1}{2}.$$

(Vedere anche l'esercizio 43)

Iperboli soggette a condizioni

Gli esercizi dal 47 al 54 richiedono di determinare le equazioni di iperboli che soddisfano delle condizioni assegnate. Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti anche le considerazioni svolte nel cap. 1, Parte quinta, paragrafo 4.

47. Scrivere l'equazione dell'iperbole che ha il centro nell'origine, sapendo che un punto d'intersezione con l'asse delle x è $B(2,0)$ e che uno dei fuochi è $F(-3,0)$. Tracciare il grafico della curva determinandone gli asintoti e l'eccentricità.

(L'equazione deve essere della forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, *con* $b^2=c^2-a^2$.
Dell'iperbole assegnata sono date le seguenti informazioni: $a=2$, $c=3$ *e quindi* $b^2=\ldots$ *Si ottiene* $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$*)*

48. Ripetere l'esercizio 47, sapendo che uno dei punti d'intersezione con l'asse delle y è $A(0,-3)$ ed uno dei fuochi è $F(0,4)$.
(Per risolvere questo esercizio, è necessario tenere presenti i risultati dell'esercizio 36: l'iperbole interseca l'asse delle y, perciò ha l'equazione del tipo $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, *con* $b^2=c^2-a^2$. *Ripetendo il procedimento seguito nell'esercizio precedente, si arriva all'equazione* $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$*)*

49. Scrivere l'equazione dell'iperbole, che ha il centro nell'origine, sapendo che uno dei fuochi è $F(1,0)$ e che l'eccentricità vale 2. Tracciare il grafico della curva determinandone i punti di intersezione con l'asse delle x e gli asintoti.

(L'equazione deve essere della forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, *con* $b^2=c^2-a^2$, $e=\frac{c}{a}$.
Dell'iperbole assegnata sono date le seguenti informazioni: $c=1$, $e=2$; *risulta quindi* $a=\frac{1}{2}$ *e perciò* $b^2=\ldots$ *Si ottiene* $4x^2-\frac{4y^2}{3}=1$*)*

50. Ripetere l'esercizio 49 a partire dall'eccentricità $e=3$ e da $F'(0;6)$.
(Per risolvere questo esercizio, è necessario tenere presenti i risultati dell'esercizio 36; dato che il fuoco si trova sull'asse delle y, l'equazione dell'iperbole è $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, *con* $b^2=c^2-a^2$. *Ripetendo il procedimento seguito nell'esercizio precedente, si arriva all'equazione* $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{32}=1$*)*

51. Di un'iperbole con il centro nell'origine si hanno le seguenti informazioni:
- uno dei punti di intersezione con l'asse delle x è $B(\sqrt{2},0)$
- l'eccentricità vale $2\sqrt{2}$.

Scrivere l'equazione e tracciare il grafico della curva determinandone gli asintoti e i fuochi.

(L'equazione deve essere della forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, *con* $b^2=c^2-a^2$, $e=\frac{c}{a}$.
Dell'iperbole assegnata sono date le seguenti informazioni: $a=\sqrt{2}$, $e=2\sqrt{2}$; *risulta quindi* $c=\ldots$ *Si ottiene* $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{14}=1$*)*

52. Di un'iperbole con il centro nell'origine si hanno le seguenti informazioni:
- uno dei punti di intersezione con l'asse delle y è $B(0,-\sqrt{5})$,
- l'eccentricità vale $\sqrt{10}$.

Scrivere l'equazione e tracciare il grafico della curva determinandone gli asintoti e i fuochi.

(L'equazione deve essere della forma $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, *con* $b^2=c^2-a^2$, $e=\frac{c}{a}$.
Dell'iperbole assegnata sono date le seguenti informazioni: $a=\sqrt{5}$, $e=3\sqrt{5}$; *risulta quindi* $c=\ldots$ *Si ottiene* $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{220}=1$*)*

53. Di un'iperbole con il centro nell'origine si hanno le seguenti informazioni:
- un fuoco è il punto $F(\sqrt{5},0)$,

– gli asintoti hanno equazione $y=\frac{1}{2}x$ e $y=-\frac{1}{2}x$.

Scrivere l'equazione e tracciare il grafico della curva determinandone le intersezioni con l'asse delle x e l'eccentricità.

(L'equazione deve essere della forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, con $b^2=c^2-a^2$, $e=\frac{c}{a}$.

Dell'iperbole assegnata sono date le seguenti informazioni: $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$, e quindi $b=\ldots$; $c=\sqrt{5}$ e quindi $a^2=\ldots$ Si ottiene $\frac{x^2}{4}-y^2=1$)

54. Di un'iperbole con il centro nell'origine si hanno le seguenti informazioni:

– passa per il punto $P(2,1)$,

– gli asintoti hanno equazione $y=\frac{3}{4}x$ e $y=-\frac{3}{4}x$.

Scrivere l'equazione e tracciare il grafico della curva determinandone le intersezioni con l'asse delle x e l'eccentricità.

(Disegnando gli asintoti ed indicando il punto assegnato, ci si rende conto che l'equazione deve essere della forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, con $b^2=c^2-a^2$, $e=\frac{c}{a}$.

Dell'iperbole assegnata sono date le seguenti informazioni: $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$, $\frac{2^2}{a^2}-\frac{1^2}{b^2}=1$.

Ricavando, per esempio, b dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda, ...si arriva all'equazione $\frac{9x^2}{20}-\frac{4y^2}{5}=1$)

Proprietà dell'iperbole

Gli esercizi dal 55 al 62 conducono a scoprire delle proprietà caratteristiche dell'iperbole.

55. Tracciare il grafico dell'iperbole d'equazione $3x^2-y^2=2$, determinandone gli asintoti.
La retta r d'equazione $y=2x-1$ incontra nei punti A e B l'iperbole e nei punti A' e B' gli asintoti dell'iperbole.
Verificare che risulta $AA'=BB'$.

56. Ripetere l'esercizio 55, considerando, al posto della retta r, altre rette; per esempio r' d'equazione $y=-2x+1$, oppure r'' d'equazione $y=x+2$.

57. Tracciare il grafico dell'iperbole d'equazione $2x^2-y^2=1$, determinandone gli asintoti r ed r'.
Scrivere l'equazione della tangente t alla curva nel suo punto $T(1,1)$; determinare le coordinate dei punti P e Q, in cui t incontra gli asintoti e calcolare l'area del triangolo OPQ.
Scrivere l'equazione della tangente t' alla curva nel punto $T'(5,-7)$; determinare le coordinate dei punti P' e Q', in cui t' incontra gli asintoti e calcolare l'area del triangolo $OP'Q$.
Verificare che valgono le seguenti proprietà:

– il punto T divide a metà il segmento PQ; il punto T' divide a metà il segmento $P'Q'$,

– i triangoli OPQ e $OP'Q'$ hanno la stessa area.

58. Tracciare il grafico dell'iperbole d'equazione $x^2-\frac{y^2}{4}=1$, determinandone gli asintoti.

Dal punto $A(1,0)$ dell'iperbole condurre le parallele agli asintoti, determinando un parallelogramma; calcolare l'area del parallelogramma ottenuto.
Ripetere il procedimento, conducendo le parallele agli asintoti a partire dal punto $C\left(\frac{3}{2},\sqrt{5}\right)$ e calcolare l'area del nuovo parallelogramma ottenuto.
Verificare che i due parallelogrammi hanno la stessa area.

59. Tracciare il grafico dell'iperbole d'equazione $x^2-8y^2=8$, determinandone i fuochi F ed F'.
Scrivere le equazioni delle due rette t e t', tangenti alla curva, condotte dal punto $A(2,0)$.
Scrivere l'equazione della retta n, che passa per F ed è perpendicolare a t; determinare le coordinate del punto H, in cui n incontra t.
In modo analogo determinare il piede H' della perpendicolare n', condotta da F a t'.

Ripetere il procedimento per determinare i punti K e K', piedi delle perpendicolari condotte da F' alle tangenti t e t'.
Verificare che valgono le seguenti proprietà:

I) $\overline{HO}=\overline{H'O}=\overline{KO}=\overline{K'O}=8$;

II) $\overline{FH}\cdot\overline{FH'}=\overline{F'K}\cdot\overline{F'K'}=1$.

60. Tracciare il grafico dell'iperbole d'equazione $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$, determinandone i fuochi F ed F'.
Scrivere le equazioni delle due rette n ed n', tangenti alla curva, condotte nei punti A e B, dove la curva interseca l'asse delle x.
Scrivere le equazioni delle tangenti t e t' condotte dal punto $C(1,0)$.
Determinare i seguenti punti:

L ed M, in cui la retta t incontra le rette n ed n',
N e P, in cui la retta t' incontra le stesse rette n ed n'.

Verificare che sono retti gli angoli $L\hat{F}M$, $L\hat{F'}M$, $N\hat{F}P$, $N\hat{F'}P$.

61. Sull'asse delle x si indicano i punti $F'(-5,0)$, $A'(-3,0)$, $A(3,0)$, $F(5,0)$; con centro in F' si traccia un cerchio di raggio $r>F'A$ e con centro in F si traccia un cerchio di raggio $r'=r-AA'$. I due cerchi si incontrano in due punti P e Q.
Verificare che P e Q si trovano sull'iperbole che ha F ed F' come fuochi, A ed A' come vertici.

62. Ripetere l'esercizio precedente in generale, a partire dai punti $F'(-c,0)$, $A'(-a,0)$, $A(a,0)$, $F(c,0)$.

Costruzioni geometriche dell'iperbole

Lo svolgimento dell'esercizio 62 suggerisce una costruzione per punti di un'iperbole, di cui sono dati i vertici A, A' e i fuochi F ed F' (fig. 3). Si disegnano le due circonferenze seguenti:

- *di centro F' e raggio $r>F'A$;*
- *di centro F e raggio $r'=r-AA'$.*

Le due circonferenze si incontrano in due punti P e Q, che appartengono all'iperbole assegnata. Ripetendo più volte la costruzione si ottengono tanti punti P e Q e raccordando questi punti si ottiene proprio la curva cercata.

Lo svolgimento dell'esercizio 59 suggerisce la seguente proprietà dell'iperbole: il piede H della perpendicolare condotta da un fuoco F ad una tangente t all'iperbole si trova sempre sulla circonferenza di centro O e raggio a (fig. 4). Viceversa, si può disegnare sul piano la circonferenza

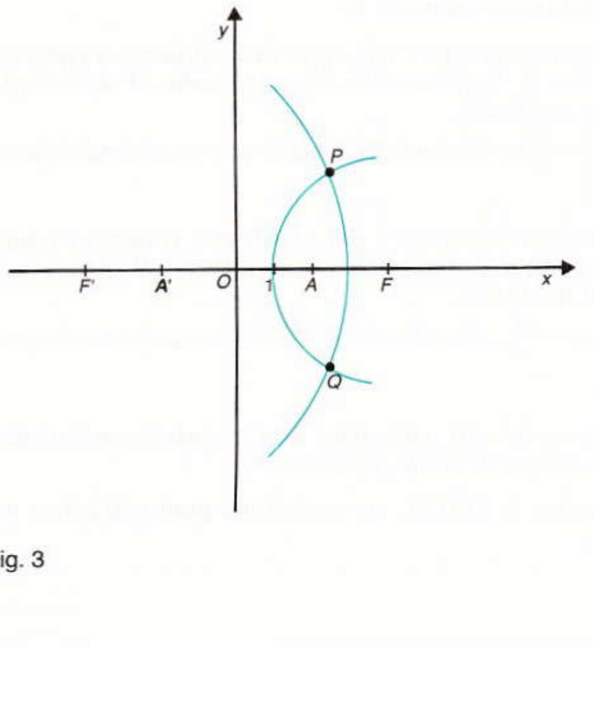

Fig. 3

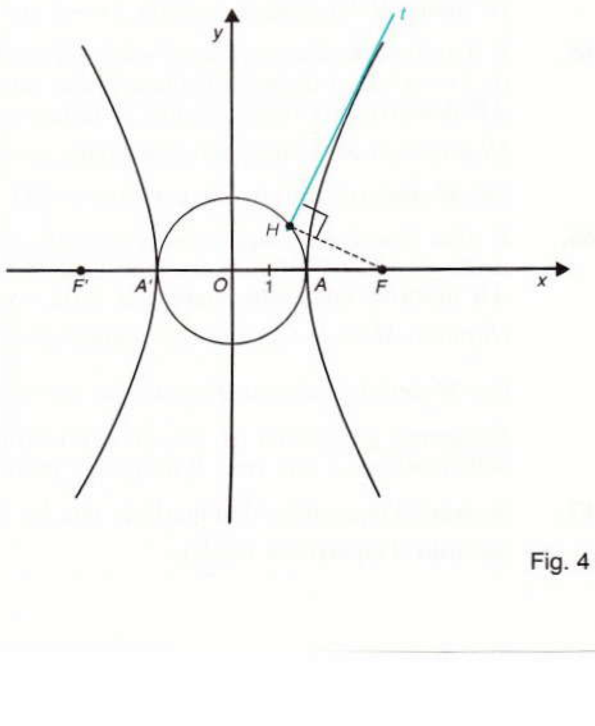

Fig. 4

di centro O e raggio a e fissare un punto F sull'asse delle x, all'esterno della circonferenza (fig. 5). Si fa scorrere il vertice H di una squadretta lungo la circonferenza, in modo che un suo lato passi per F; l'altro lato assume sempre la posizione t, tangente all'iperbole. Nasce così l'iperbole come inviluppo delle sue tangenti (fig. 6).

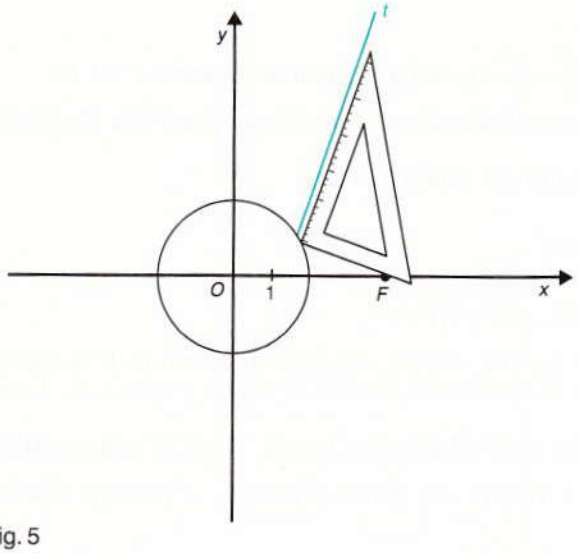

Fig. 5

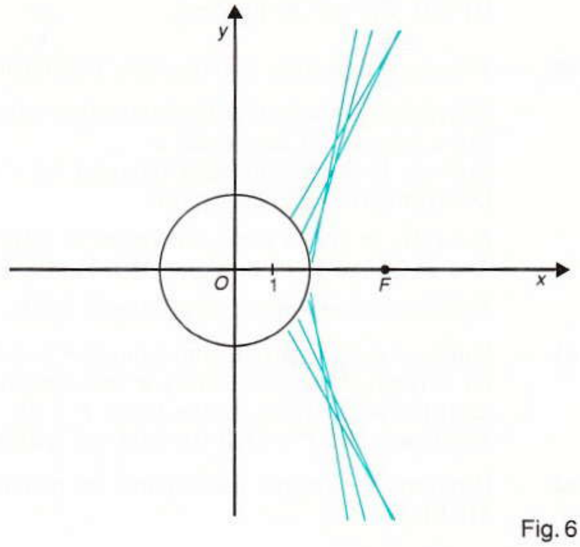

Fig. 6

Problemi vari sulle coniche

Sono raccolti in quest'ultima parte alcuni problemi, che richiedono la conoscenza delle nozioni svolte nei capitoli 1 e 2.

63. È data l'ellisse d'equazione $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

Scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera che ha gli stessi fuochi dell'ellisse.
Determinare i 4 punti $CDEF$ di intersezione delle due curve.
Verificare che il quadrilatero $CDEF$ è un rettangolo e calcolarne il perimetro p e l'area S.
(L'iperbole ha equazione $\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}y^2=1$; si ottiene $p=6\sqrt{2}$, $S=4$)

64. È data la parabola d'equazione $y=-x^2+4$; considerare una retta r che appartiene al fascio d'equazione $y=x+k$ ed incontra la parabola in due punti A e B. Verificare che il punto medio M della corda AB descrive una retta, mentre r varia nel fascio.
(Il punto M ha sempre l'ascissa $x=-1$, per qualunque valore di k)

65. È data l'ellisse d'equazione $x^2+4y^2=4$; considerare una retta r che appartiene al fascio d'equazione $y=-x+k$ ed incontra l'ellisse in due punti A e B. Verificare che il punto medio M della corda AB descrive una retta, mentre la retta r varia nel fascio.

(Il punto M ha le seguenti coordinate: $x=\frac{k}{5}$, $y=\frac{4}{5}k$. Eliminando k fra le due equazioni si trova che M descrive la retta d'equazione $y=4x$)

66. È data l'iperbole d'equazione $x^2-y^2=1$; considerare una retta r che appartiene al fascio d'equazione $y=-2x+k$ ed incontra l'iperbole in due punti A e B. Verificare che il punto M della corda AB descrive una retta, mentre la retta r varia nel fascio.

(Il punto M ha le seguenti coordinate: $x=\frac{2}{3}k$, $y=-\frac{k}{3}$. Eliminando k fra le due equazioni si trova che M descrive la retta d'equazione $y=-\frac{1}{2}x$)

Svolgendo gli esercizi 64, 65, 66 si è verificata, in tre casi particolari, una proprietà caratteristica delle coniche: è una retta il luogo dei punti di mezzo di corde parallele.

67. Scrivere l'equazione dell'iperbole che ha il centro in $O(0,0)$, un vertice nel punto $A(2,0)$ e un asintoto d'equazione $y=\frac{1}{2}x$.

Determinare i punti di intersezione dell'iperbole con la retta d'equazione $y=x-2$, verificando che un punto è $A(2,0)$; indicare con B l'altro punto trovato.
Scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera, che ha gli assi cartesiani come asintoti e passa per B.
Scrivere l'equazione della parabola che ha l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y, il vertice in A e passa per B.
Calcolare le coordinate dei punti di intersezione delle curve ottenute.
Scrivere l'equazione dell'ellisse che ha centro in O, passa per A e per B', proiezione di B sull'asse delle y.
Considerare il fascio di rette d'equazione $y=-x+k$ e dire come bisogna scegliere il parametro k per avere rette che siano esterne all'iperbole equilatera e secanti tutte le altre coniche determinate prima.
Completare lo svolgimento dell'esercizio con i relativi grafici.

68. Determinare i vertici e gli asintoti dell'iperbole d'equazione $2x^2-y^2=1$.
Scrivere l'equazione della circonferenza che ha il centro in $O(0,0)$ e passa per i vertici dell'iperbole.
Calcolare l'area del quadrilatero che è inscritto nella circonferenza ed ha i vertici sugli asintoti dell'iperbole.
Accompagnare lo svolgimento dell'esercizio con i relativi grafici.

69. Determinare i vertici, gli asintoti, i fuochi F ed F' e l'eccentricità e dell'iperbole d'equazione $x^2-y^2=9$.
Scrivere l'equazione dell'ellisse che ha come estremi dell'asse maggiore i punti F ed F' ed un'eccentricità $e'=\frac{e}{2}$.
Determinare i punti di intersezione fra le due curve.
Accompagnare lo svolgimento dell'esercizio con i relativi grafici.

70. È data la parabola d'equazione $y=-x^2+4x$; determinarne il vertice V, il fuoco F, la direttrice, i punti O ed A di intersezione con l'asse delle x.
Scrivere le equazioni della retta t, tangente alla parabola in O e della retta n, perpendicolare a t in O; in modo analogo determinare l'equazione di t', tangente alla parabola in A, e di n'.
Calcolare le coordinate del punto d'intersezione P delle rette n ed n'.
Determinare l'area del quadrilatero $OAVP$.
Scrivere l'equazione della circonferenza che ha centro in P ed è tangente alla direttrice della parabola. Determinare i punti di intersezione fra la parabola e la circonferenza.
Accompagnare lo svolgimento dell'esercizio con i relativi grafici.

71. L'ellisse d'equazione $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ e l'iperbole d'equazione $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ hanno gli stessi fuochi F ed F'.
Determinare i quattro punti di intersezione delle due coniche.
In ogni punto scrivere l'equazione della tangente sia all'ellisse che all'iperbole; verificare che le due tangenti risultano sempre perpendicolari.
Accompagnare lo svolgimento dell'esercizio con i relativi grafici.

72. Ripetere l'esercizio 78, a partire da altre due coniche che hanno sempre gli stessi fuochi F ed F'; per esempio l'ellisse d'equazione $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ e l'iperbole d'equazione $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.

73. Verificare che l'insieme di tutte le coniche che hanno per fuochi i punti $F(2,0)$ ed $F'(-2,0)$ si può descrivere nel modo seguente:
- si scrive l'equazione di una qualunque conica che ha F ed F' come fuochi, per esempio l'ellisse che ha equazione $\frac{x^2}{5}+y^2=1$;
- ogni altra conica con gli stessi fuochi ha l'equazione data da $\frac{x^2}{5+k}+\frac{y^2}{1+k}=1$.

Per quali valori di k si ottengono delle ellissi?
Per quali valori di k si ottengono delle iperboli?
Ci sono dei valori di k per cui l'equazione perde significato?

74. Prendere in esame l'insieme di coniche confocali (cioè che hanno lo stesso fuoco) descritte dall'equazione $\frac{x^2}{5+k}+\frac{y^2}{1+k}=1$.
Determinare le coniche che passano per il punto $P(\sqrt{3},1)$.
Verificare che le coniche indicate sono due (un'ellisse ed un'iperbole) e che esse hanno nel punto P le tangenti fra loro perpendicolari.