2
Complementi

I fuochi delle coniche e la riflessione della luce

In tutto il capitolo ci siamo resi conto che i fuochi hanno una notevole importanza per le coniche; questi punti sono sempre stati messi in relazione con proprietà geometriche che non spiegano, però, l'origine del nome.

Il termine "fuoco" deriva da una proprietà fisica, dovuta alla riflessione della luce; nelle pagine che seguono considereremo i fuochi delle coniche da questo punto di vista.

1. La riflessione della luce e i fuochi dell'ellisse

La fig. 1 mostra la fotografia di una lamiera riflettente incurvata a forma di ellisse. In uno dei fuochi, F, è inserita una sorgente di luce (una piccola lampadina), schermata in modo da "isolare" un raggio di luce; nell'altro fuoco, F', è inserito, in posizione verticale, un cartoncino bianco.

Questo esperimento mostra che quando un raggio di luce proveniente da F, con una qualunque direzione, colpisce la lamiera in un punto P, viene da questa deviato in modo tale che il raggio riflesso passa per l'altro fuoco F'.

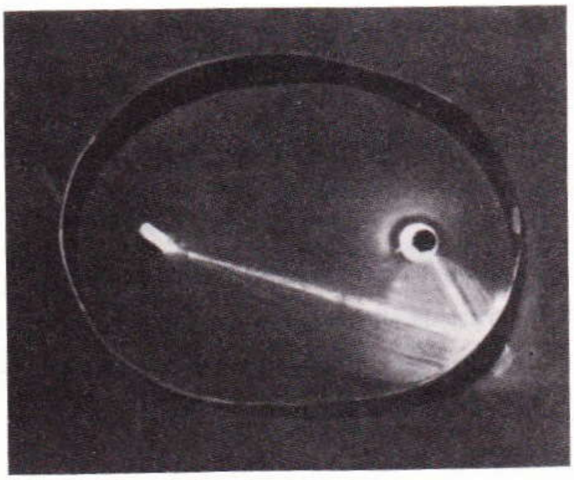

Fig. 1

È chiaro, data la simmetria dei fuochi, che la sorgente potrebbe essere disposta in F'. Nel fuoco, dove non si trova la lampadina, si concentrano quindi tutti i raggi riflessi dall'ellisse; si capisce pertanto il perché del termine "fuoco". Vedremo ora che questa proprietà fisica conduce a scoprire una proprietà geometrica dell'ellisse.

Cominciamo col ricordare le leggi della riflessione su uno specchio piano (fig. 2): se un raggio di luce incontra uno specchio piano in un punto P, la luce "torna indietro", dando luogo a un raggio riflesso, secondo le due leggi:

- raggio incidente, raggio riflesso e normale allo specchio in P sono complanari;
- l'angolo di riflessione è uguale all'angolo d'incidenza:

$$\hat{r} = \hat{i}\,.$$

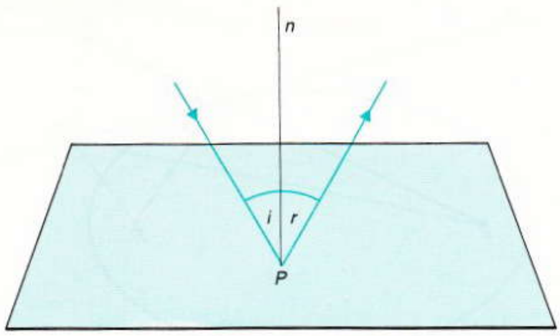

Fig. 2

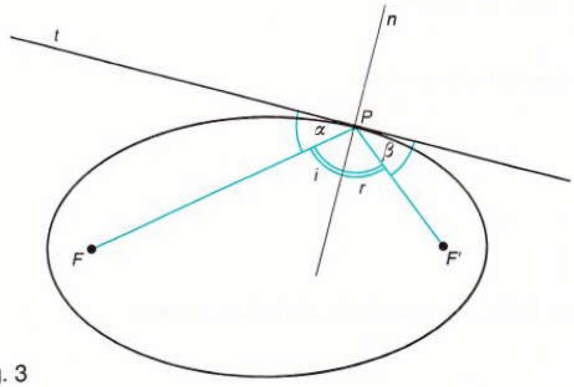

Fig. 3

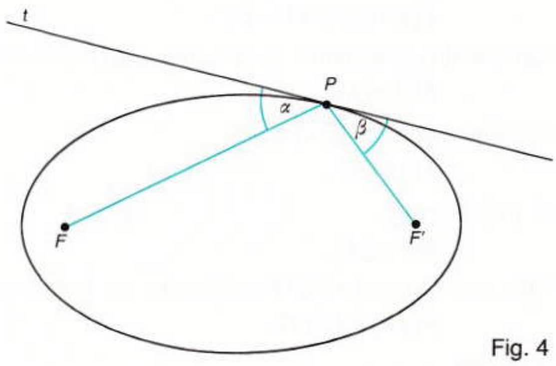

Fig. 4

In fig. 3 abbiamo disegnato un'ellisse che possiamo considerare come la traccia della lamiera di fig. 1. Nell'intorno di un punto P la lamiera è stata *approssimata* con uno specchio piano; la traccia di questo è la retta t tangente all'ellisse in P.

In base all'esperimento prima descritto, risulta che il raggio FP viene riflesso in PF', e allora, per la leggi della riflessione, deve risultare

$$\hat{r}=\hat{i},$$

e quindi

$$\beta=\alpha \quad \text{in quanto angoli complementari di angoli uguali.}$$

Si scopre così la seguente proprietà geometrica (fig. 4): per un punto qualunque P dell'ellisse accade che le rette FP e $F'P$ formano angoli uguali con la tangente t in P.

Questa proprietà, suggerita da un'esperimento di fisica, *caratterizza* la retta t tangente all'ellisse in un suo qualunque punto P; si riesce infatti a dimostrare la seguente proprietà: se una retta s passante per P forma con i raggi focali FP, $F'P$ angoli uguali, allora questa retta risulta tangente all'ellisse in P.

Riferiamoci alla fig. 5. Si ha, per ipotesi, che $\beta=\alpha$; si vuole dimostrare che la retta s è tangente all'ellisse in P, e cioè che ogni altro punto Q di s è esterno all'ellisse. Ragioniamo sulla fig. 6: prolunghiamo FP di un tratto

$$PH=F'P;$$

si ha quindi

$$FH=FP+PF'.$$

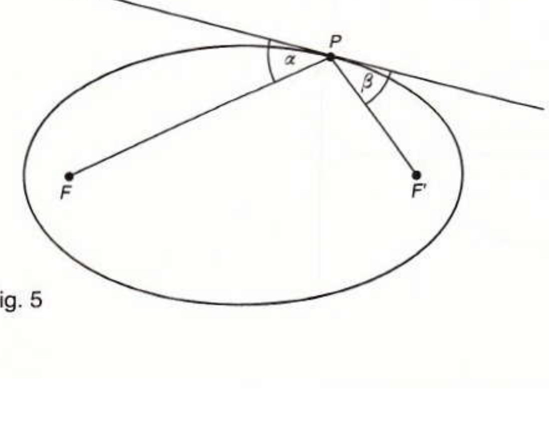

Fig. 5

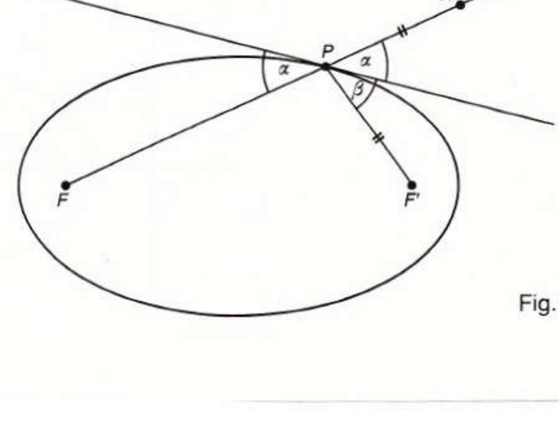

Fig. 6

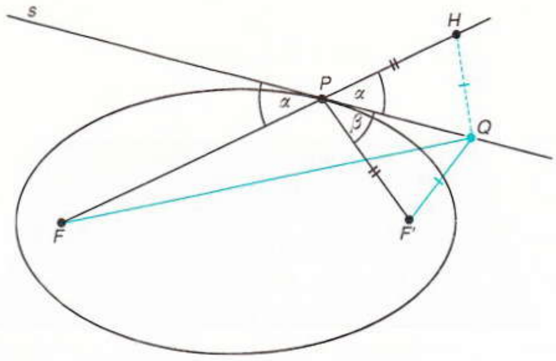

Fig. 7

Vogliamo far vedere che per un altro punto Q di s (fig. 7) risulta

$$FQ+QF'>FP+PF'.$$

Questa disuguaglianza si dimostra facilmente così: essendo $\beta=\alpha$, sarà

$$F'Q=QH,$$

e quindi, invece di scrivere

$$FQ+QF',$$

si può scrivere

$$FQ+QH.$$

Ora, nel triangolo FQH risulta che un lato è minore della somma degli altri due, e cioè

$$FQ+QH>FH,$$

e quindi

$$FQ+QH>FP+PF';$$

quest'ultima relazione ci dice che Q è un punto esterno all'ellisse. Si conclude che la retta s è tangente all'ellisse proprio nel punto P.

2. Il fuoco della parabola

In fig. 8 è rappresentata un'ellisse ed è indicato uno dei suoi fuochi, F, e la relativa direttrice, d. La proprietà che caratterizza un punto P che percorre l'ellisse è, come sappiamo

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pd}}=e.$$

Abbiamo inoltre visto (Parte terza, paragrafo 1) che risulta

$$e=\frac{c}{a}.$$

Si ha dunque

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pd}}=\frac{c}{a}=\frac{a-\overline{AF}}{a}=1-\frac{\overline{AF}}{a}.$$

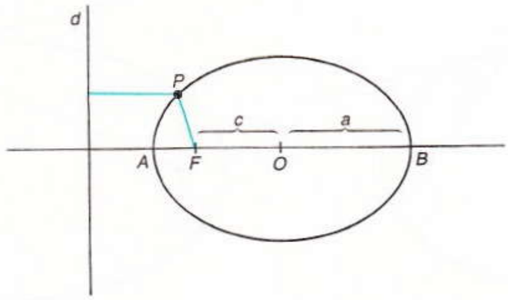

Fig. 8

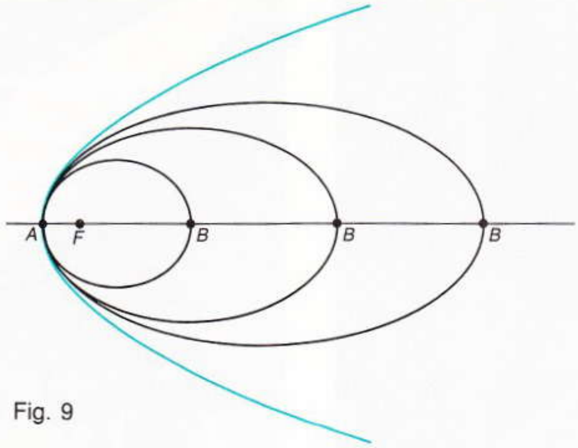

Fig. 9

Consideriamo ora delle ellissi in cui l'asse maggiore AB vada via via aumentando, mentre restano fissi i punti A ed F (fig. 9); il rapporto

$$\frac{AF}{a}$$

diventa allora sempre più piccolo fino a risultare trascurabile rispetto ad 1; di conseguenza, la relazione

$$\frac{\overline{PH}}{\overline{Pd}}=1-\frac{\overline{AF}}{a}$$

tende al limite a 1. Dal punto di vista geometrico, ciò significa che il punto B "sfugge all'infinito", e si passa da ellissi sempre più "allungate" alla parabola, che corrisponde a

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pd}}=1,$$

proprietà geometrica che conosciamo.

Possiamo ora comprendere un noto esperimento di fisica (fig. 10): disponiamo nel fuoco F delle ellissi una sorgente di luce, ed esaminiamo i vari raggi riflessi PF': se a cresce, anche F' si allontana sempre di più da A, lungo la retta AF, e, al limite, quando l'ellisse si apre a parabola, il raggio riflesso PF' diventa parallelo alla retta AF.

Troviamo così una proprietà degli specchi parabolici (fig. 11) frequentemente usati nella tecnica: i raggi che escono da una sorgente di luce, disposta nel fuoco F, vengono riflessi parallelamente all'asse di simmetria, e, di conseguenza, la luce è proiettata a distanza.

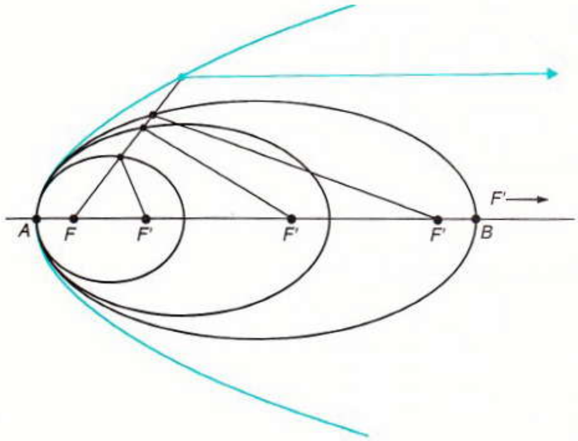

Fig. 10

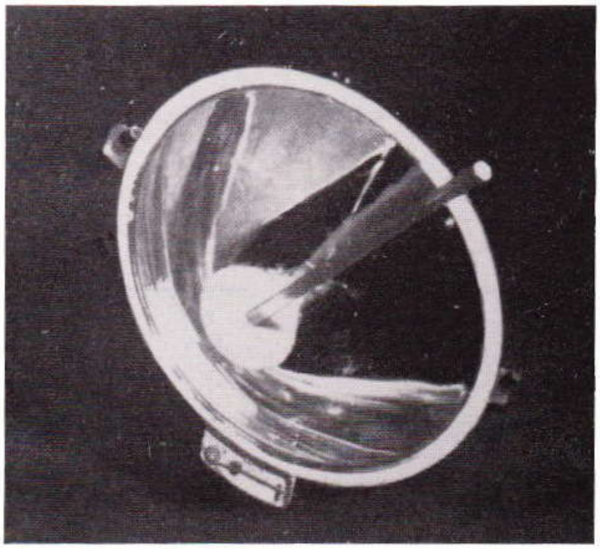

Fig. 11

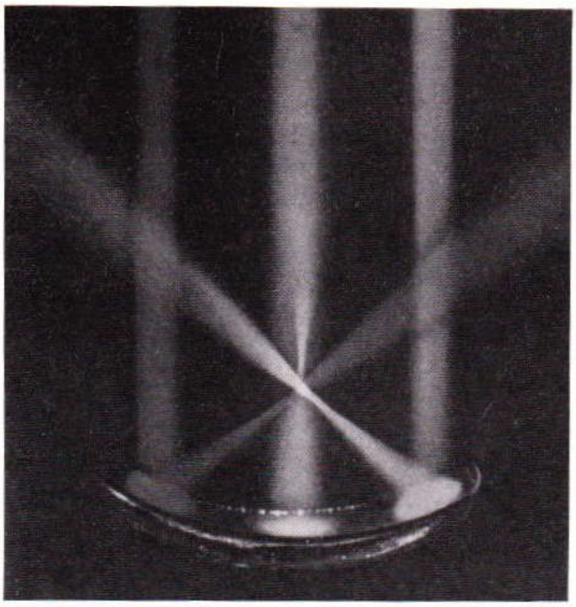

Fig. 12

Fig. 13

Questa proprietà era nota ad Archimede, che aveva ideato di utilizzarla "in senso inverso": convogliare cioè in un unico punto i raggi del Sole che cadevano su uno specchio parabolico (fig. 12). In questo specchio si ha la massima concentrazione di luce e di calore, tanto che un oggetto, posto in quel punto, può prendere fuoco. È proprio dal fenomeno degli "specchi ustori" che nasce il termine "fuoco"; ma il nome fu dato – sembra – da Keplero.

Sappiamo bene che questa proprietà, particolarmente evidente per le radiazioni luminose, vale anche per altre radiazioni elettromagnetiche: è per questo che le antenne radar hanno forma di paraboloide (fig. 13).

Da un punto di vista geometrico, è interessante notare che la tangente t in un punto P della parabola determina ancora degli angoli uguali: risultano uguali gli angoli α e β, indicati in fig. 14.

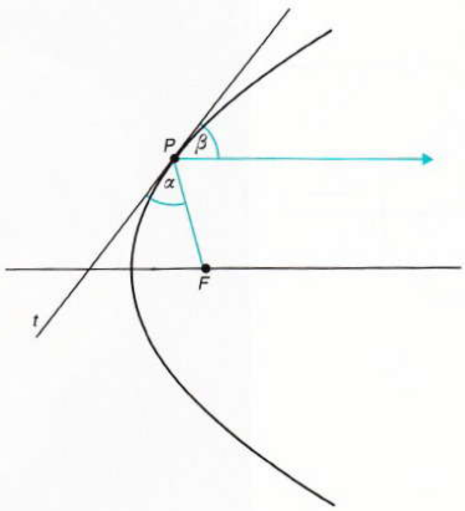

Fig. 14

3. L'iperbole e il fuoco virtuale

Per l'iperbole, la proprietà ottica relativa ai fuochi è più riposta. La si può mettere in evidenza con l'esperimento seguente: si realizza uno specchio iperbolico curvando opportunamente una striscia di lamiera, e si dispone una sorgente di luce nel fuoco F relativo a questo ramo (fig. 15).

I raggi di luce emessi dalla sorgente in F colpiscono la lamiera e vengono riflessi in modo tale che i loro prolungamenti passano per l'altro fuoco F'. Se si guarda "dentro allo specchio", si vede un

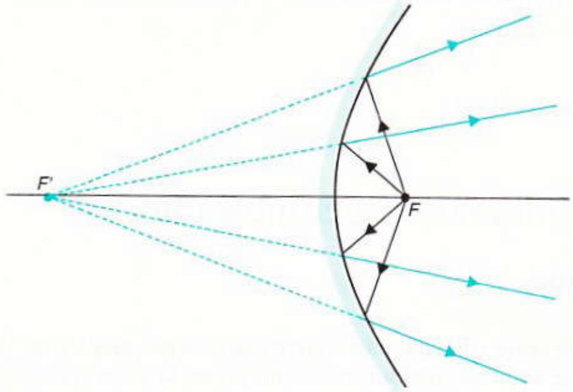

Fig. 15

punto luminoso che sembra trovarsi dietro allo specchio, proprio in F'. Ma se in F' poniamo un fiammifero, non lo vedremo certo accendersi. Si dice che il fuoco F' è **virtuale**.

Questa proprietà, legata alla riflessione della luce, dà luogo, anche per l'iperbole, a una proprietà geometrica (fig. 16): se P è un punto dell'iperbole e t è la tangente alla curva in P, risultano uguali gli angoli α e β che i raggi focali FP e $F'P$ formano con la tangente t.

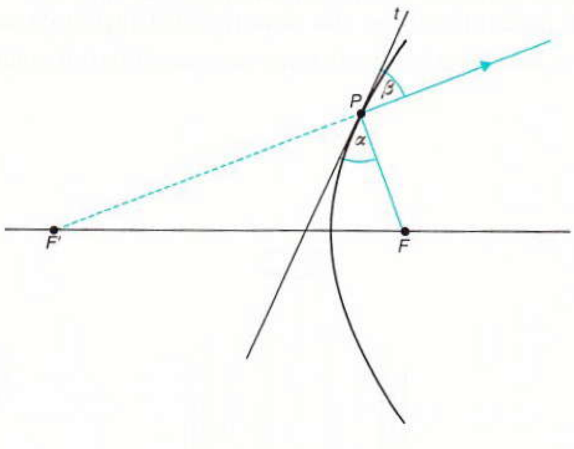

Fig. 16