1. Complementi

Geometria analitica dello spazio

1. Il sistema di riferimento cartesiano

Per individuare la posizione di un punto nello spazio occorrono *tre coordinate*; per esempio per localizzare la posizione di un aereo o di un sottomarino si dà la latitudine, la longitudine e l'altezza o la profondità.

In generale, per fissare la posizione di un punto P si fa riferimento a un sistema cartesiano ortogonale (fig. 21): gli assi x, y, z sono perpendicolari a due a due; il loro punto d'incontro è l'origine O delle coordinate. Gli assi individuano tre piani, xy, xz, yz, passanti per O e ortogonali fra loro; questi tre piani dividono lo spazio in 8 parti, dette *ottanti*. Esercitiamoci sulla fig. 22 a "vedere" questi ottanti.

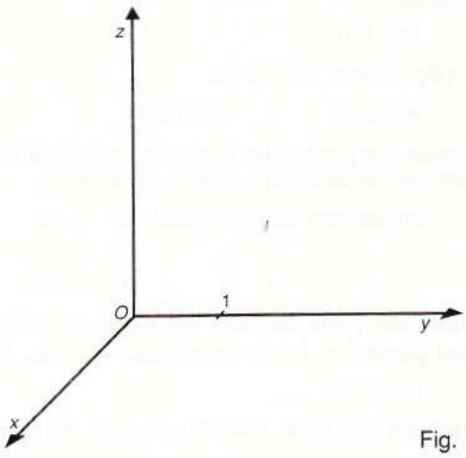

Fig. 21

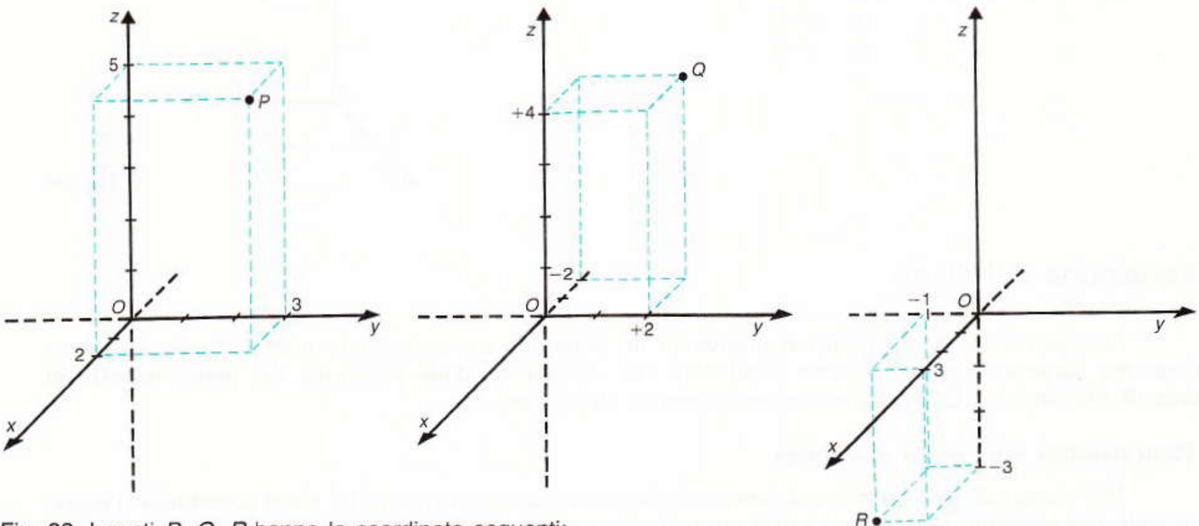

Fig. 22. I punti P, Q, R hanno le coordinate seguenti:

P: $x=2$, $y=3$, $z=5$. Si scrive: $P(2,3,5)$

Q: $x=-2$, $y=2$, $z=4$. Si scrive: $Q(-2,2,4)$

R: $x=3$, $y=-1$, $z=-3$. Si scrive: $R(3,-1,-3)$

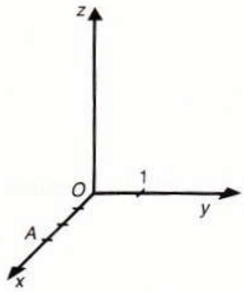

Fig. 23a

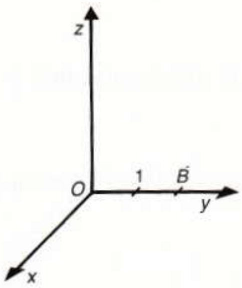

Fig. 23b

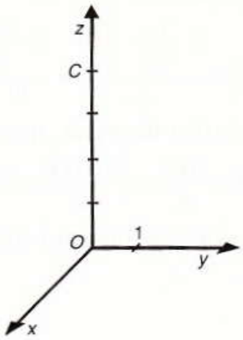

Fig. 23c

Se il punto si trova su un asse, due coordinate sono nulle: per esempio, nella fig. 23a, il punto A ha le coordinate

$$x=3, \quad y=0, \quad z=0;$$

si ha dunque

$$A(3,0,0).$$

E così (fig. 23b e 23c) si ha

$$B(0,2,0) \quad \text{e} \quad C(0,0,4).$$

In generale, un punto che percorre uno degli assi è caratterizzato dal fatto che ha due coordinate nulle; le equazioni degli assi sono perciò le seguenti:

equazione dell'asse delle x: $y=0$, $z=0$
» » » » y: $x=0$, $z=0$
» » » » z: $x=0$, $y=0$.

Un punto che percorre uno dei piani coordinati ha una delle coordinate nulla: per esempio, P che si trova sul piano xy, ha la coordinata z nulla. Si ha, nel caso della fig. 24:

$$P(3,2,0).$$

Le equazioni dei piani coordinati sono dunque:

equazione del piano xy: $z=0$
» » » xz; $y=0$
» » » yz: $x=0$.

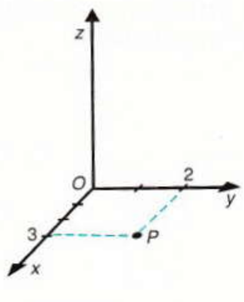

Fig. 24

2. Equazione del piano

Si capisce che se un punto si muove su un piano, le sue coordinate non potranno variare a piacere, ma saranno soggette a certe condizioni che dipendono dalla posizione del piano rispetto al sistema di riferimento. Esaminiamo successivamente alcuni casi.

A) Piani paralleli a un piano coordinato

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato il caso particolare dei piani coordinati: l'equazione $z=0$, per esempio, caratterizza tutti i punti che hanno la terza coordinata nulla, e individua il piano xy; $z=0$ è l'equazione del piano xy.

Consideriamo ora un piano parallelo ad xy, a quota 3 (fig. 25). È chiaro che tutti i punti che appartengono a questo piano hanno $z=3$; l'equazione del piano è dunque

$$z=3.$$

In generale, l'equazione di un piano parallelo al piano xy e a quota a, sarà

$$z=a.$$

Analogamente, i piani paralleli al piano xz (fig. 26) avranno l'equazione

$$y=b,$$

e i piani paralleli al piano yz (fig. 27) avranno l'equazione

$$x=c.$$

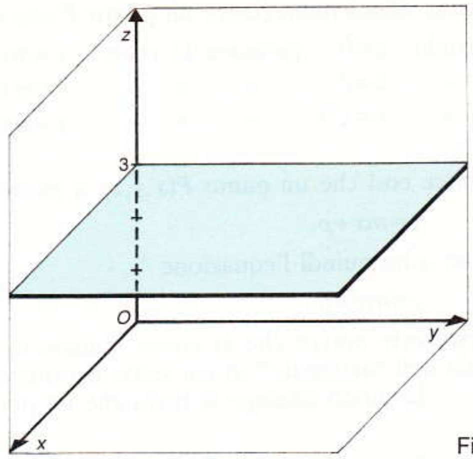

Fig. 25

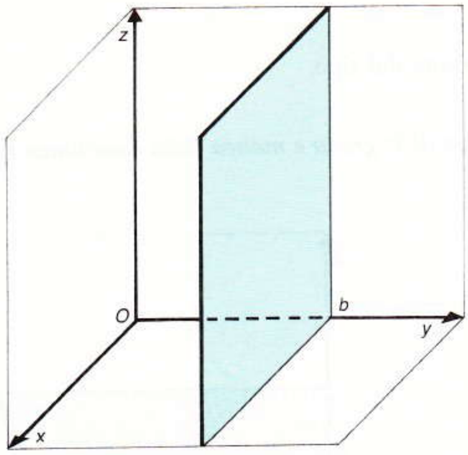

Fig. 26

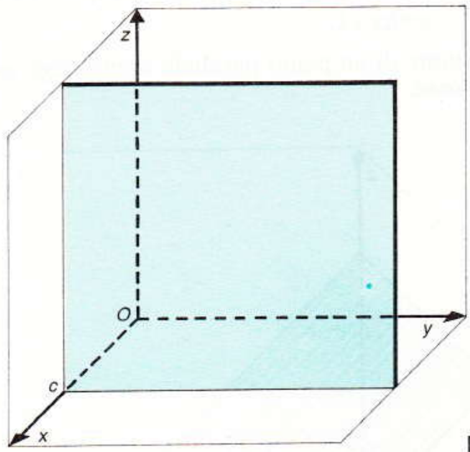

Fig. 27

B) Piani paralleli a un asse coordinato

In fig. 28 è rappresentato un piano α parallelo all'asse delle z. Questo piano sega il piano xy secondo una retta r che avrà un'equazione del tipo

$$y=mx+p.$$

Per trovare l'equazione del piano α, pensiamo ad α come formato da tante rette parallele ad r (fig. 29).

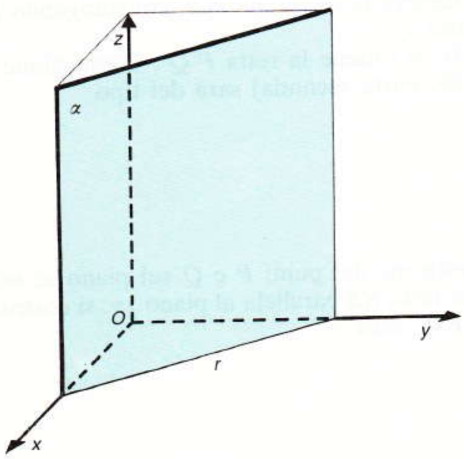

Fig. 28

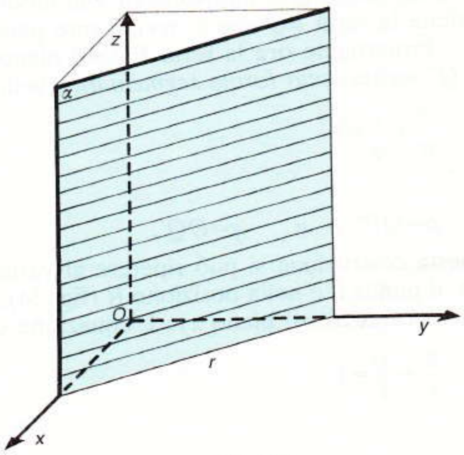

Fig. 29

Possiamo allora immaginare un punto P che si muove sul piano in questo modo:

– a quota $z=0$ percorre la retta $y=mx+p$
– » » $z=2$ » » » $y=mx+p$
– » » $z=\sqrt{5}$ » » » $y=mx+p$
....

Si capisce così che un punto $P(x,y,z)$ si muove proprio sul piano α se risulta

$$y=mx+p.$$

Il piano α ha quindi l'equazione

$$y=mx+p. \tag{1}$$

È importante notare che la stessa equazione (1) rappresenta enti diversi – una retta o un piano – a seconda dell'"ambiente" in cui viene considerata.

In modo analogo si trova che un piano parallelo all'asse delle x (fig. 30) ha un'equazione del tipo

$$z=ny+q;$$

e un piano parallelo all'asse delle y (fig. 31) ha un'equazione del tipo

$$z=hx+k.$$

L'equazione di un piano parallelo a uno degli assi è dunque *di 1° grado e manca della coordinata relativa a quell'asse.*

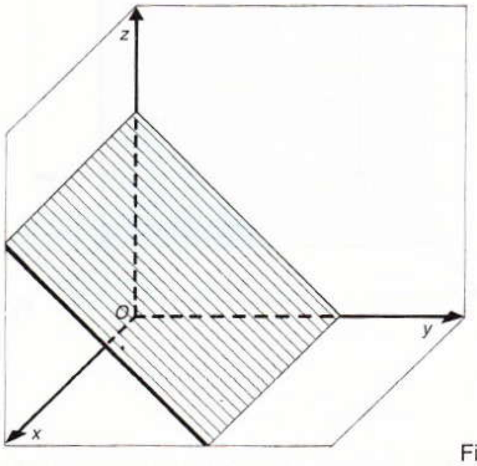

Fig. 30

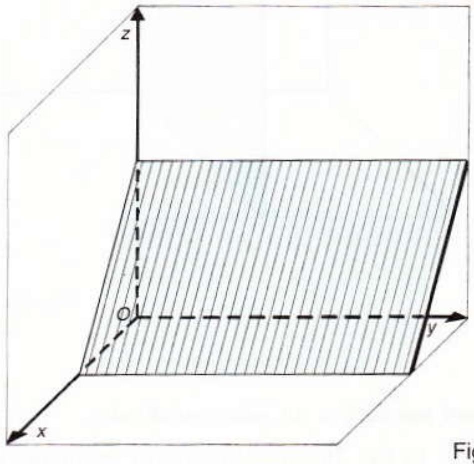

Fig. 31

C) Piani per l'origine

Consideriamo un piano α passante per O e non contenente un asse coordinato (fig. 32). Un punto P e un punto Q si muovono su α in modo da avere sempre la stessa quota z; congiungendo P con Q si ottiene la retta PQ che è ovviamente parallela al piano xy.

Proiettiamo ora la retta PQ sul piano xy (fig. 33): si ottiene la retta $P'Q'$. L'equazione della retta $P'Q'$ scritta *sotto forma segmentaria* (vedi esercizio 30, Parte seconda) sarà del tipo

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1 \tag{1}$$

dove

$$p=OP' \quad \text{e} \quad q=OQ'.$$

Ora, questa costruzione si può ripetere al variare della posizione dei punti P e Q sul piano α: se, per esempio, il punto P è nella posizione R (fig. 34), condotta la retta RS parallela al piano xy, si costruirà la sua proiezione $R'S'$ sul piano xy. L'equazione della retta $R'S'$ sarà

$$\frac{x}{r}+\frac{y}{s}=1, \tag{2}$$

dove

$$r=OR' \quad \text{e} \quad s=OS'.$$

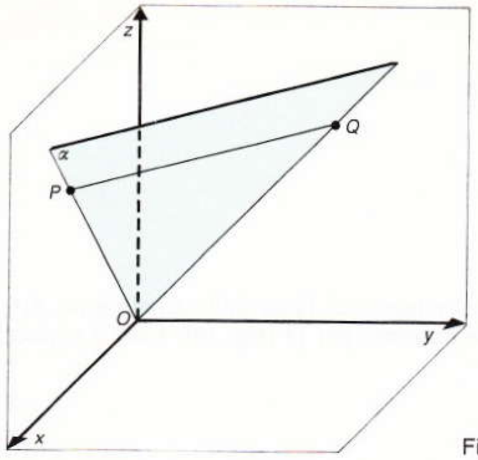

Fig. 32

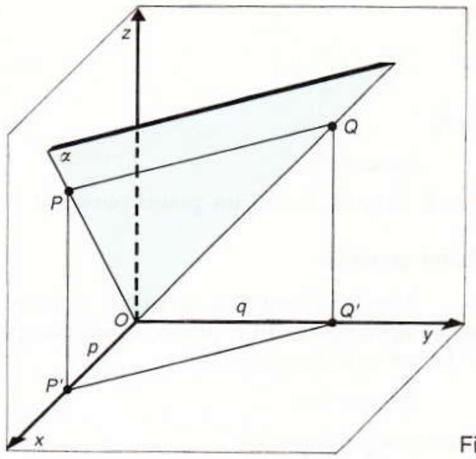

Fig. 33

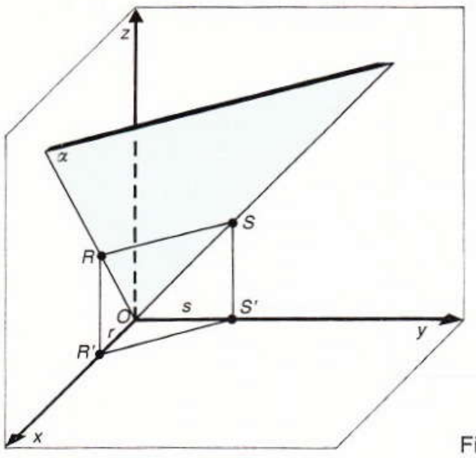

Fig. 34

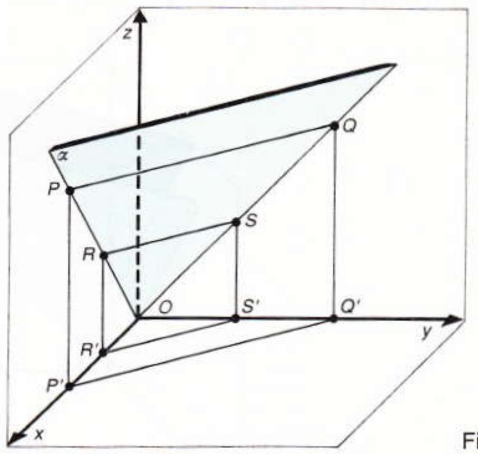

Fig. 35

Osserviamo che, anche in questo caso, il piano si può pensare come formato da tante rette parallele a PQ.

E, ora, riferiamoci alla fig. 35: si scopre che fra i coefficienti della (1) e della (2) vi è un legame dovuto alla similitudine di triangoli; i triangoli OPP' e ORR' sono simili fra loro, e così sono anche simili fra loro i triangoli OQQ' e OSS'. Si ha quindi:

$$\frac{RR'}{OR'}=\frac{PP'}{OP'}=\text{costante}$$

e cioè

$$\frac{z}{r}=\frac{z}{p}=a \qquad \text{(dove } a \text{ rappresenta la costante)} \tag{3}$$

e così

$$\frac{SS'}{OS'}=\frac{QQ'}{OQ'}=\text{costante}$$

e cioè

$$\frac{z}{s}=\frac{z}{q}=b \qquad \text{(dove } b \text{ rappresenta la costante).} \tag{4}$$

Dalle (3) e (4) si ha

$$r=p=\frac{z}{a} \qquad \text{e} \qquad s=q=\frac{z}{b}.$$

Sostituendo questi valori nell'equazione (1) o nella (2), si ha

$$\frac{x}{\frac{z}{a}}+\frac{y}{\frac{z}{b}}=1,$$

ossia

$$\frac{ax}{z}+\frac{by}{z}=1$$

e quindi

$$\boldsymbol{z=ax+by.}$$

Questa è l'equazione di un piano passante per l'origine.

D) Piano generico

Consideriamo ora un piano α che non passa per O e interseca l'asse delle z nel punto $A(0,0,c)$. Si può sempre costruire il piano α' ad esso parallelo e non passante per O (fig. 36). Così si capisce che, se A' ha un'equazione del tipo

$$z=ax+by,$$

α deve avere l'equazione

$$z=ax+by+c.$$

Questa è dunque l'equazione del piano; è un'equazione di 1° grado nelle tre variabili x, y, z.

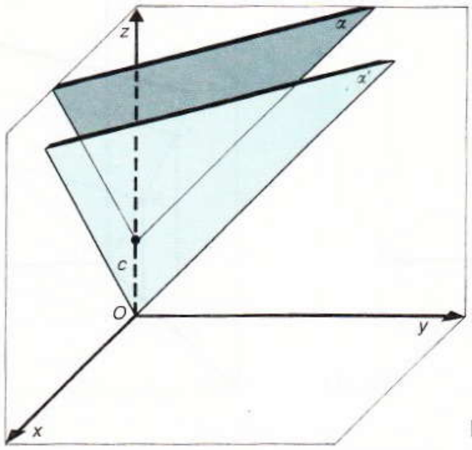

Fig. 36

3. Equazione del piano passante per tre punti assegnati

Per capire come si procede per determinare l'equazione del piano che passa per tre punti di cui si conoscono le coordinate, facciamo un esempio numerico. I punti sono:

$$A(3,1,4), \qquad B(1,2,3), \qquad C(2,3,1).$$

Per determinare l'equazione del piano passante per A, B, C, si ragiona così: l'equazione del piano è sempre del tipo:

$$z=ax+by+c. \tag{1}$$

Se il piano deve contenere il punto $A(3,1,4)$, l'equazione (1) deve essere soddisfatta quando al posto di x, y, z si scrivono le coordinate di A; deve dunque essere:

$$4=a\cdot 3+b\cdot 1+c$$

ossia

$$3a+b+c-4=0.$$

E così se il piano deve contenere $B(1,2,3)$, dovrà essere:

$$3=a\cdot 1+b\cdot 2+c$$

ossia

$$a+2b+c-3=0.$$

Infine se il piano deve contenere $C(2,3,1)$, dovrà essere:

$$1=2a+3b+c$$

ossia

$$2a+3b+c-1=0.$$

Per ottenere i coefficienti a, b, c si deve dunque risolvere il sistema formato dalle seguenti equazioni

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{cases} 3a+b+c-4=0 \\ a+2b+c-3=0 \\ 2a+3b+c-1=0. \end{cases}$$

Valendosi del metodo di riduzione, si toglie alla 1ª equazione la somma delle altre due; si ha:

$$-4b-c=0 \qquad \text{da cui} \qquad c=-4b.$$

Possiamo poi togliere alla 3ª equazione la 2ª moltiplicata per 2; si ha:

$$-b-c+5=0.$$

In definitiva si ottiene

$$\begin{cases} c=-4b \\ b+c=5 \\ 3a+b+c-4=0 \end{cases}$$

Operando con il metodo di sostituzione si ottiene

$$\begin{cases} c=-4b \\ -3b=5 \\ 3a-3b-4=0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} b=-\frac{5}{3} \\ c=\frac{20}{3} \\ a=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

L'equazione del piano ABC è dunque

$$z=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}y+\frac{20}{3}$$

o anche

$$x+5y+3z-20=0.$$

4. Equazioni di una retta

Una retta, nello spazio, si può sempre considerare come l'intersezione di due piani. La sua espressione analitica sarà quindi data da un sistema di due equazioni lineari; ogni equazione rappresenta un piano. Per esempio, il sistema

$$\begin{cases} z=2 \\ y=3 \end{cases}$$

rappresenta (fig. 37) la retta r d'intersezione del piano α di equazione $z=2$ e del piano β di equazione $y=3$: α è parallelo ad xy a quota 2, e β è parallelo a xy e passa per il punto $B(0,3,0)$. La retta è dunque rappresentata analiticamente **non** da una sola equazione, ma da due equazioni lineari: le equazioni di due piani che la contengono.

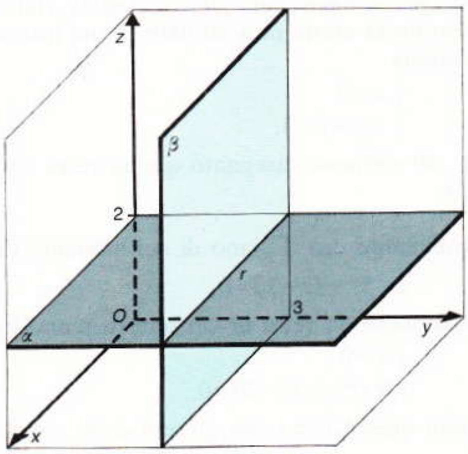

Fig. 37

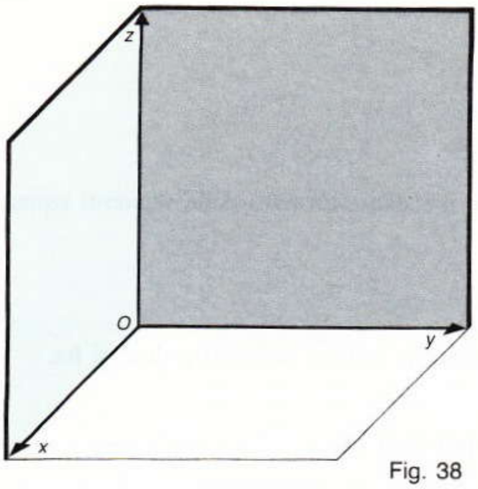

Fig. 38

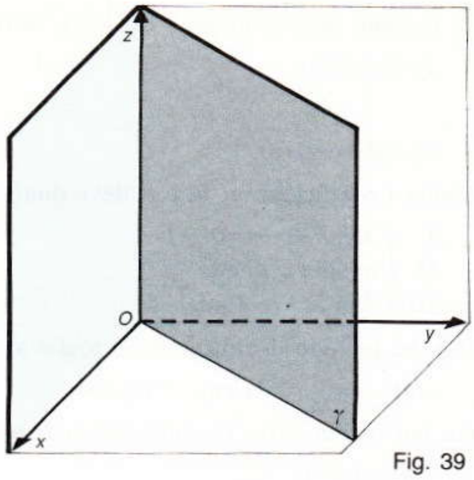

Fig. 39

È chiaro che una stessa retta può essere rappresentata da diversi sistemi di equazioni: per una retta infatti passano infiniti piani, e quindi l'espressione analitica della retta può essere rappresentata da due qualunque di questi piani. Per esempio, l'asse delle z (fig. 38) è l'intersezione dei piani $x=0$ e $y=0$, ed è quindi rappresentato dal sistema

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0; \end{cases}$$

ma lo stesso asse è l'intersezione, ad esempio, del piano xz e del piano γ (fig. 39), la cui traccia su xy è la bisettrice dell'angolo formato dagli assi x e y, e cioè d'equazione

$$y=x.$$

L'espressione analitica dell'asse delle z può dunque essere data dal sistema

$$\begin{cases} x=0 \\ y=x. \end{cases}$$

5. Individuare la posizione di un piano d'equazione assegnata

Il modo più semplice per individuare la posizione di un piano è quella di disegnare le rette in cui questo interseca i piani coordinati. Portiamo due esempi:

1) Il piano α ha l'equazione

$$z=-y+3.$$

Questo piano è parallelo all'asse delle x, dato che nella sua equazione manca la variabile x. Per disegnare il piano basta allora determinare la sua intersezione col piano yz, cioè con $x=0$; si ha la retta r descritta dal sistema

$$\begin{cases} x=0 \\ z=-y+3. \end{cases}$$

In fig. 40 abbiamo disegnato questa retta r trovandone i punti d'intersezione con gli assi y e z: $A(3,0)$ e $B(0,3)$.

2) Disegnamo ora il piano di cui abbiamo determinato l'equazione nel paragrafo 3; l'equazione è:

$$x+5y+3z-20=0.$$

Determiniamo la retta in cui questo piano incontra il piano xy, e cioè $z=0$; si ha il sistema

$$\begin{cases} z=0 \\ x+5y+3z-20=0. \end{cases}$$

Segando questa retta con gli assi delle x e delle y si hanno i punti

$$P(20,0), \qquad Q(0,4),$$

che abbiamo indicato in fig. 41.

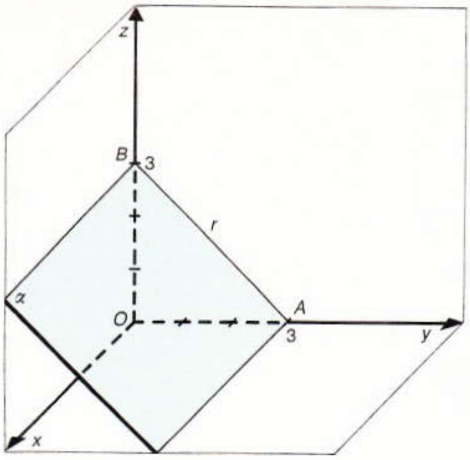

Fig. 40

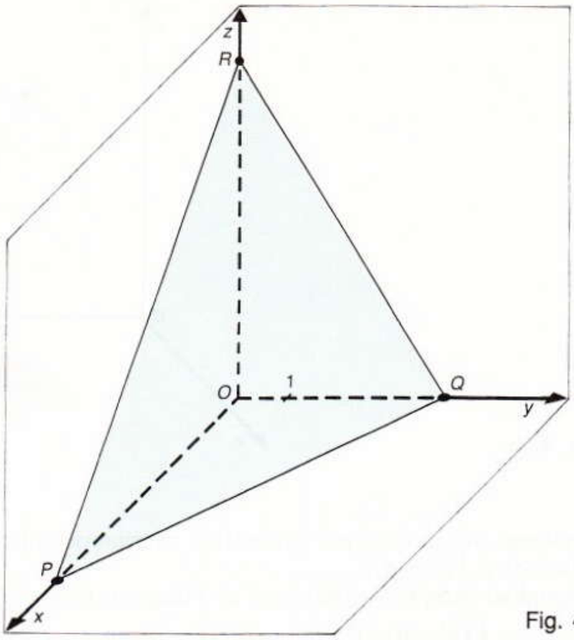

Fig. 41

Segando col piano yz, cioè $x=0$, si ha, oltre al punto Q già individuato, il punto $R\left(0, \frac{20}{3}\right)$.

6. Distanza fra due punti. Equazione della sfera

Le considerazioni che sviluppiamo in questo paragrafo ripetono, nell'ambiente spazio, quelle svolte nel testo e relative alla distanza di due punti e all'equazione del cerchio.

Cominciamo con l'esprimere analiticamente la distanza di un punto $P(a,b,c)$ dall'origine O. Il segmento OP (fig. 42) si può considerare come la diagonale di un parallelepipedo rettangolo di lati lunghi a, b, c. Per il teorema di Pitagora, applicato al triangolo OPC, si ha

$$\overline{OP}^2=c^2+\overline{OC}^2.$$

Il segmento OH si ottiene, sempre con il teorema di Pitagora, dal triangolo OAC; si ha

$$\overline{OC}^2=a^2+b^2.$$

In definitiva risulta

$$\overline{OP}^2=a^2+b^2+c^2, \qquad (1)$$

ossia

$$\overline{OP}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

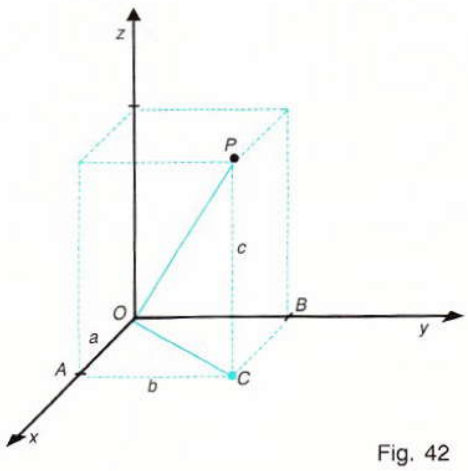

Fig. 42

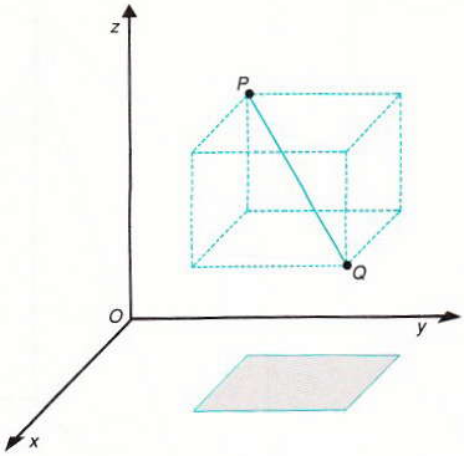

Fig. 43

Passiamo ora al caso più generale e riferiamoci alla fig. 43. Vogliamo determinare la distanza dei punti $Q(a,b,c)$ e $P(l,m,n)$.
Basandoci sempre sul teorema di Pitagora, si ha:

$$\overline{PQ}^2=(a-l)^2+(b-m)^2+(c-n)^2. \tag{2}$$

Riprendiamo ora la (1). Se lasciamo variare P sempre con la condizione che OP sia costante, per esempio uguale ad r, il punto $P(x,y,z)$ si muoverà sulla superficie di una sfera di raggio r e centro O (fig. 44). L'equazione della sfera che ha per centro l'origine e il raggio uguale ad r, è dunque

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

E così, l'equazione della sfera di centro $Q(a,b,c)$ e raggio r (fig. 45) sarà

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

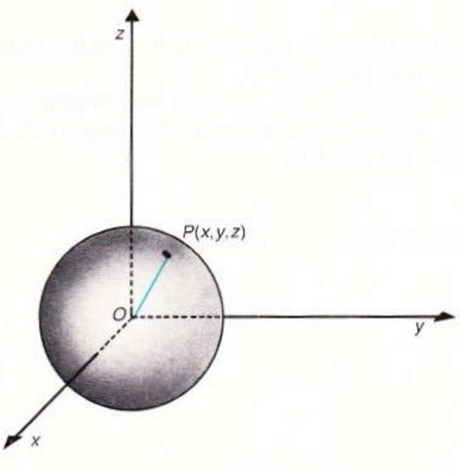

Fig. 44

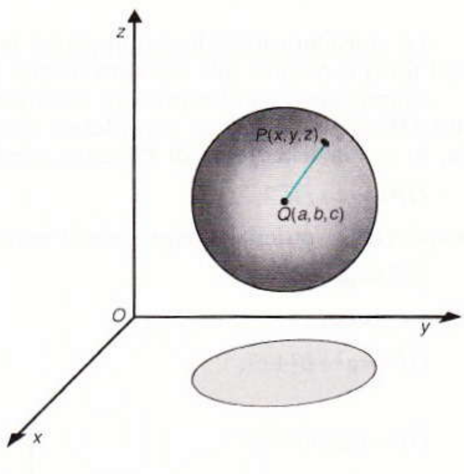

Fig. 45