Esercizi

Presentiamo un eserciziario molto vasto per dare ad ogni insegnante la possibilità di adeguare il suo corso alle attitudini e agli interessi degli studenti.

Desideriamo tuttavia sottolineare che un insegnamento della matematica, in particolare della trigonometria, in cui viene data troppa importanza all'esecuzione ripetitiva di tanti esercizi non è né scientificamente valido né didatticamente efficace.

1. Parte prima
Esercizi

I grafici oggi

1. Le figg. 1 e 2 mostrano dei sismogrammi che registrano movimenti vibratori della crosta terrestre durante un terremoto. Esaminare ed interpretare i due grafici.

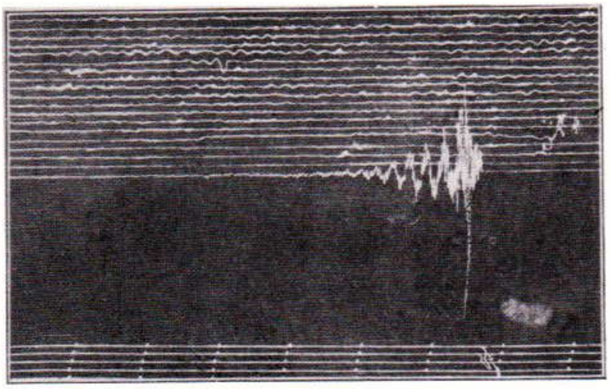


Fig. 1

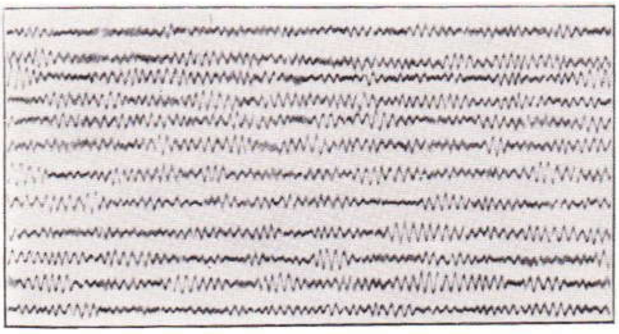


Fig. 2

2. Le figg. 3 e 4 fanno parte di uno studio per prevedere terremoti: i grafici rappresentano le deformazioni della crosta terrestre rilevate prima di un grande terremoto. Esaminare ed interpretare i due grafici.

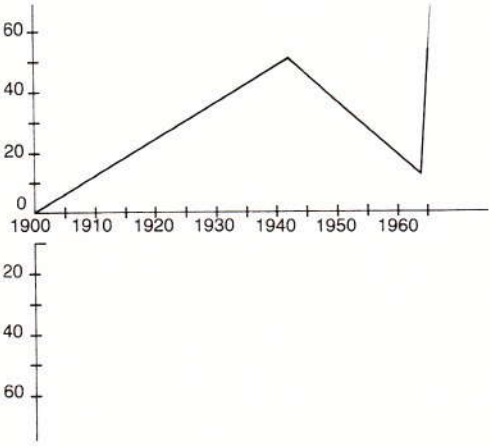


Fig. 3

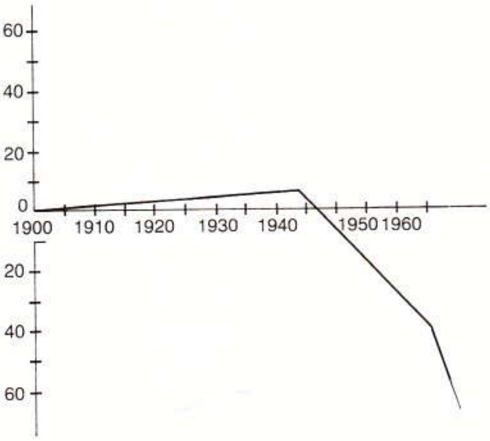


Fig. 4

3. Le figg. 5 e 6 presentano dei grafici disegnati dalla "macchina della verità", molto usata nei processi e nelle indagini giudiziarie negli USA, a partire dagli anni '50.

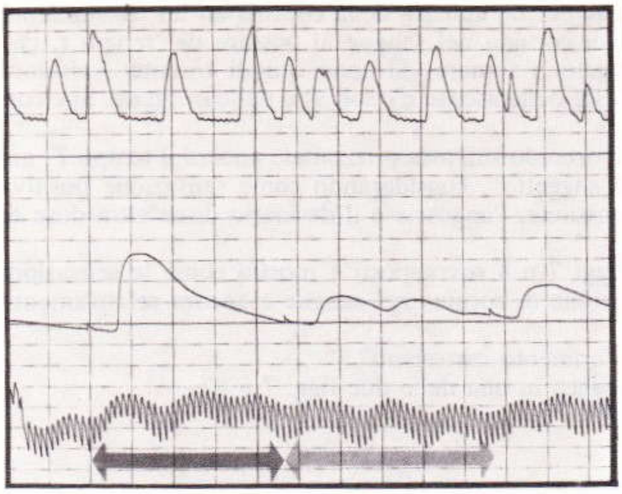


Fig. 5

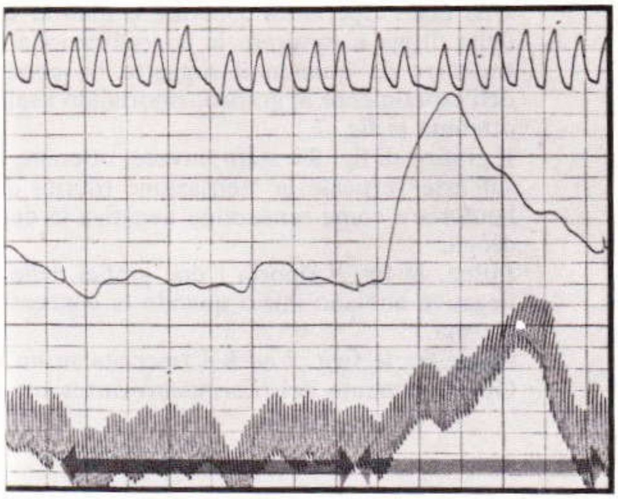


Fig. 6

La "macchina della verità" si limita a registrare graficamente l'andamento di alcune reazioni fisiologiche della persona interrogata: la pressione del sangue, il ritmo della respirazione, la traspirazione del palmo della mano, ...
La macchina viene usata così: si pone all'imputato una domanda di controllo, cioè una domanda di cui si conosce con sicurezza la risposta (esempio: «È vero che lei abita a New York?»); successivamente si pone una domanda pertinente, cioè una domanda fondamentale per il processo e di cui non si conosce la risposta (esempio: «È vero che lei non conosceva la vittima?»).
Con il grafico di fig. 5 si è ritenuto che l'interrogato rispondesse la verità sia alla domanda pertinente (freccia in colore) che a quella di controllo (freccia nera).
Invece il grafico della fig. 6 sembra suggerire che l'interrogato abbia mentito alla domanda pertinente.
Si chiede: i grafici tracciati nelle figg. 5 e 6 si riferiscono ad un sistema cartesiano?
Se no, quale elemento del riferimento cartesiano manca?

4. Nelle figg. 7, 8 e 9 sono riportati dei grafici ottenuti nel 1982 da due sperimentatori americani, che si occupano degli effetti della cocaina, una droga di antica origine.

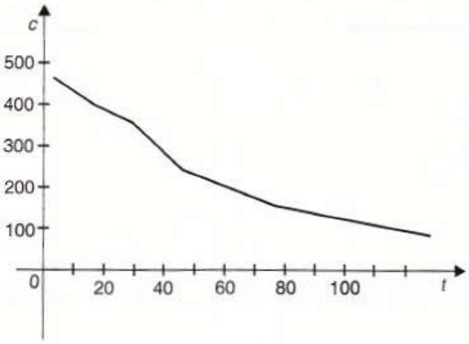


Fig. 7

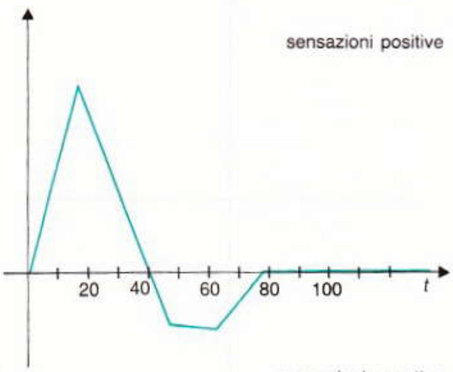


Fig. 8

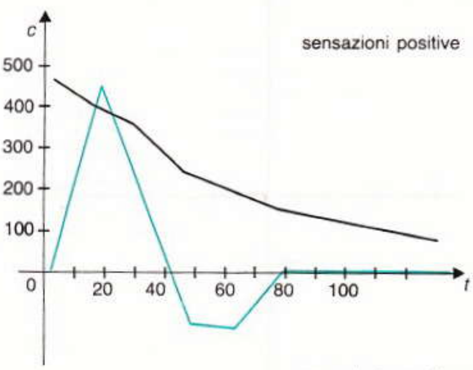


Fig. 9

Una delle esperienze condotte è stata la seguente: far fumare della cocaina ad un consumatore della droga e misurare la concentrazione c di cocaina nel sangue al passare del tempo t, che trascorre da quando il soggetto ha cominciato a fumare. Si sono quindi tradotti i risultati dell'esperimento in grafico, riportando t sull'asse delle ascisse e c sull'asse delle ordinate. Si è così ottenuta la fig. 7.
Il grafico di fig. 8 è stato, invece, ottenuto riportando sull'asse orizzontale ancora il tempo T, ma sull'asse verticale la "sensazione riferita dal soggetto", considerando come sensazione positiva l'euforia e come sensazione negativa la depressione, l'angoscia e il desiderio di un'altra dose di droga.
Infine, la fig. 9 riporta i due grafici delle figg. 7 e 8 sovrapposti e mostra come le sensazioni negative abbiano inizio quando la concentrazione di cocaina nel sangue è ancora relativamente elevata.
Quale fra le figg. 7 ed 8 è tracciata su un riferimento cartesiano?
Quale elemento del riferimento cartesiano manca in una delle due figg. 7 e 8?

Le coordinate cartesiane

Dal punto alle sue coordinate

5. Determinare le coordinate dei punti A, B, C, D, E, F, G, H indicati nelle figg. 10 e 11.

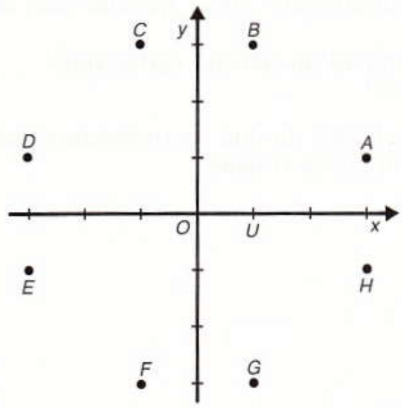


Fig. 10

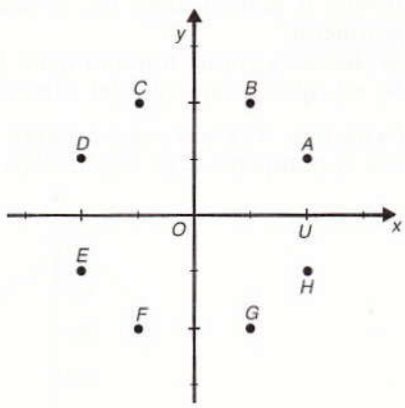


Fig. 11

6. Determinare le coordinate dei punti O, U, A, B, C, D indicati nelle figg. 12 e 13.

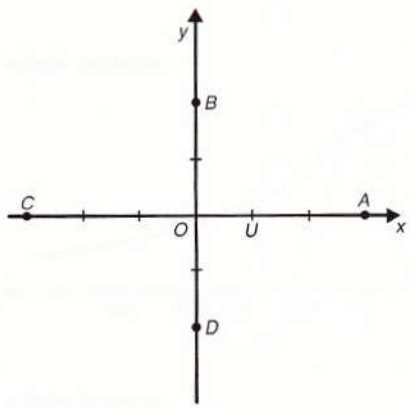


Fig. 12

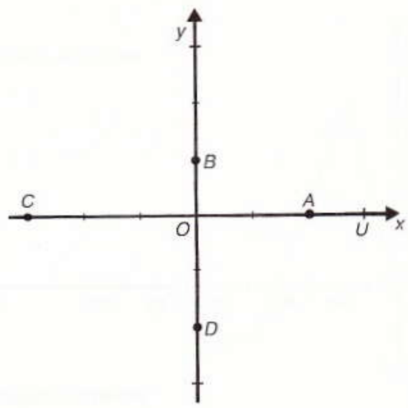


Fig. 13

7. Determinare le coordinate dei punti A, B, C, D in ciascuno dei riferimenti presentati nelle figg. 14, 15, 16.

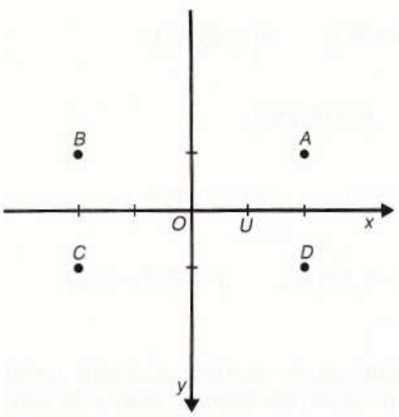


Fig. 14

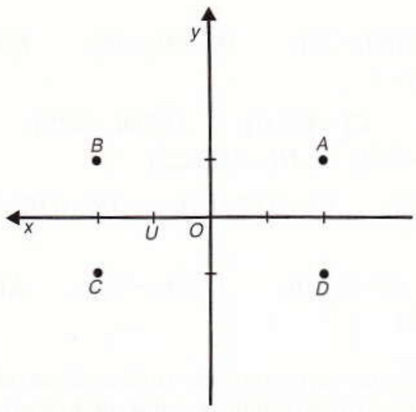


Fig. 15

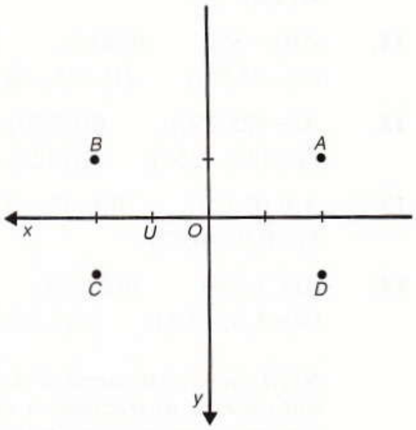


Fig. 16

8. Determinare le coordinate dei punti A, B, C, D in ciascuno dei riferimenti presentati nelle figg. 17, 18, 19.

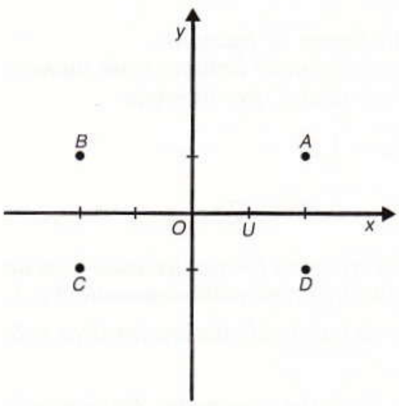


Fig. 17

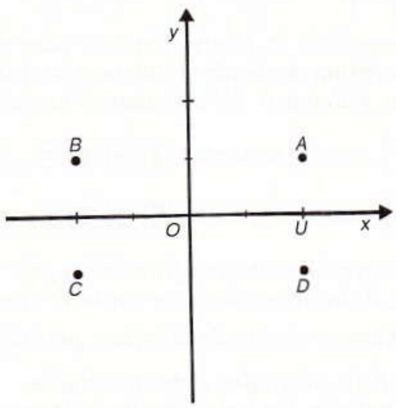


Fig. 18

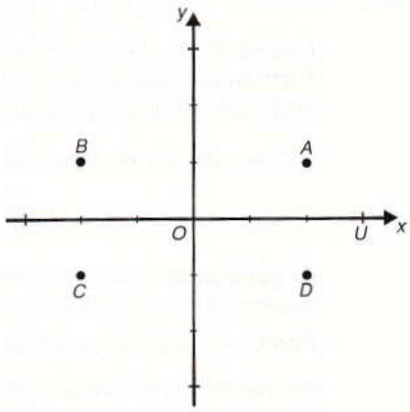


Fig. 19

Dalle coordinate al punto

Rappresentare sul piano cartesiano i punti che hanno le coordinate assegnate negli esercizi dal 9 al 14. Riferirsi, in ogni caso, al piano cartesiano di fig. 20, scegliendo l'unità di misura più opportuna per ottenere un disegno ben leggibile.

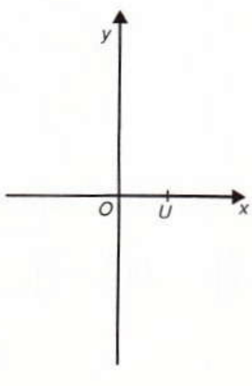


Fig. 20

9. $A(3{,}5)$; $B(-3{,}5)$; $C(3,-5)$; $D(-3,-5)$ $E(5{,}3)$; $F(3{,}0)$; $G(0{,}5)$; $O(0{,}0)$

10. $A(-6{,}0)$; $B(0,-4)$; $C(-6,-4)$; $D(-4,-6)$; $E(-6{,}4)$; $F(6,-4)$; $G(6{,}4)$; $H(4{,}6)$

11. $A(0,-35)$; $B(80{,}0)$; $C(80,-35)$; $D(-80,-35)$; $E(80{,}35)$; $F(-80{,}35)$; $G(-35{,}80)$; $H(-35,-80)$

12. $A(-425{,}250)$; $B(0{,}250)$; $C(-425{,}0)$; $D(250,-425)$; $E(425{,}250)$; $F(-425,-250)$; $G(425,-250)$; $H(-250{,}425)$

13. $A(0{,}02;0{,}2)$; $B(0{,}02;-0{,}2)$; $C(-0{,}02;0{,}2)$; $D(-0{,}02;-0{,}2)$; $E(0{,}2;0{,}02)$; $F(-0{,}2;-0{,}02)$

14. $A(7{,}3;5{,}6)$; $B(0;5{,}6)$; $C(-7{,}3;0)$; $D(5{,}6;-7{,}3)$; $E(-7{,}3;5{,}6)$; $F(-7{,}3;-5{,}6)$; $G(-5{,}6;-7{,}3)$; $H(5{,}6;7{,}3)$

Negli esercizi seguenti si debbono rappresentare sugli assi cartesiani anche numeri razionali scritti sotto forma di frazione o numeri irrazionali. Le più elementari nozioni sui numeri reali e la loro rappresentazione sono richiamate negli stessi esercizi. Per una trattazione più esauriente e sistematica dei campi numerici vedi cap. 7.

Rappresentare sul piano cartesiano i punti che hanno le coordinate assegnate negli esercizi dal 15 al 22. Riferirsi, in ogni caso, al piano cartesiano di fig. 20, scegliendo l'unità di misura più opportuna per ottenere un disegno ben leggibile.

15. $A(1{,}0)$; $B\left(\frac{3}{2},0\right)$; $C\left(\frac{2}{3},0\right)$; $D\left(\frac{7}{4},0\right)$; $E\left(\frac{4}{7},0\right)$; $F\left(\frac{8}{5},0\right)$

I punti B, C, D, E, F dell'esercizio 15 hanno l'ascissa data sotto forma di frazione. Esprimendo queste ascisse in forma decimale si ottiene o un numero decimale limitato o un numero decimale illimitato periodico. Valendosi del calcolatore tascabile si ottiene, per esempio

– *l'espressione decimale di* $\frac{3}{2}$ *con la sequenza* $\boxed{3}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$; *si ha:* 1,5

– *l'espressione decimale di* $\frac{2}{3}$ *con la sequenza* $\boxed{2}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$; *si ha:* 0,6666667

In quest'ultimo caso occorre ricordare che una frazione si può scrivere sotto forma decimale con un numero finito di cifre solo se il suo denominatore contiene come fattori primi esclusivamente 2 o 5. Perciò $\frac{2}{3}$ *darà luogo ad un numero decimale illimitato periodico, di cui il calcolatore fornisce solo un valore approssimato con 6 (o più) cifre dopo la virgola.*
In ogni caso è immediato indicare il punto che ha esattamente l'ascissa assegnata, frazionando opportunamente l'unità di misura (vedi fig. 21 e fig. 22).

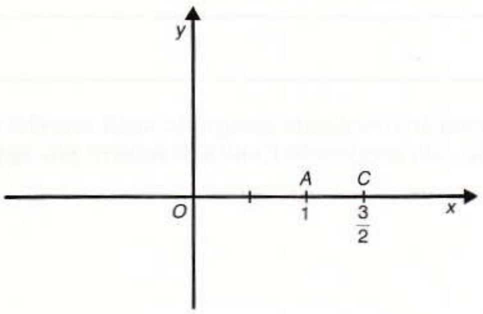


Fig. 21

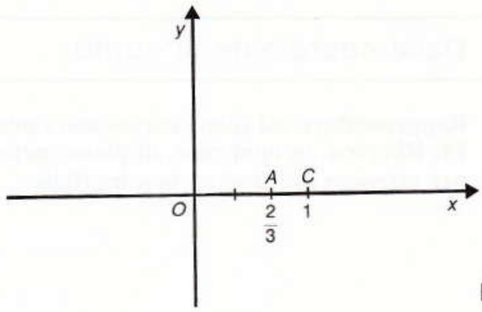


Fig. 22

16. $A(0{,}1)$; $B\left(0,\frac{9}{5}\right)$; $C\left(0,\frac{5}{9}\right)$; $D(0,-1)$; $E\left(0,-\frac{9}{5}\right)$; $F\left(0,-\frac{5}{9}\right)$

17. $A\left(\frac{3}{4},\frac{7}{5}\right)$; $B\left(\frac{4}{3},\frac{5}{7}\right)$; $C\left(-\frac{3}{4},\frac{7}{5}\right)$; $D\left(\frac{4}{3},-\frac{7}{5}\right)$; $E\left(\frac{5}{6},\frac{11}{8}\right)$; $F\left(\frac{6}{5},\frac{8}{11}\right)$; $G\left(-\frac{5}{6},-\frac{11}{8}\right)$; $H\left(-\frac{6}{5},-\frac{8}{11}\right)$

18. $A(\sqrt{2},0)$; $B(\sqrt{5},0)$; $C(\sqrt{10},0)$; $D(\sqrt{20},0)$; $E(\sqrt{3},0)$; $F(\sqrt{6},0)$; $G(\sqrt{7},0)$; $H(\sqrt{12},0)$

I punti assegnati nell'esercizio 18 hanno l'ascissa che è un numero irrazionale. Esprimendo queste ascisse in forma decimale si ottengono numeri che presentano infinite cifre dopo la virgola e non sono periodici. Di tali numeri il calcolatore fornisce un valore approssimato con 6 (o più) cifre dopo la virgola.
Ecco un esempio: per ottenere con il calcolatore l'espressione decimale di $\sqrt{2}$ si preme la sequenza

$\boxed{2}\ \boxed{\sqrt{}}$.

Si ha:

1,4142136,

che è dunque solo un valore approssimato del numero irrazionale $\sqrt{2}$.
Tuttavia si può indicare il punto A che ha esattamente l'ascissa $\sqrt{2}$, valendosi di una semplice costruzione effettuata con riga e compasso (fig. 23).
In modo analogo si può procedere per rappresentare i punti B, C, D.
Per i punti E, F, G, H si può eseguire una costruzione come quella presentata in fig. 24.

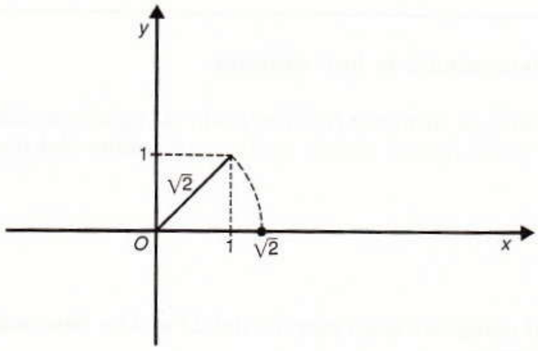


Fig. 23

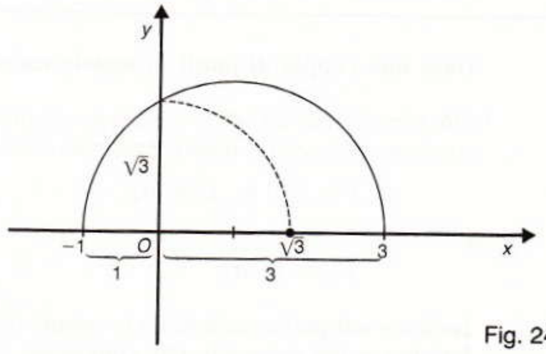


Fig. 24

19. $A(0,\pi)$; $B(0,2\pi)$; $C\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; $D(0,-3\pi)$; $E\left(0,-\frac{2}{3}\pi\right)$; $F\left(0,-\frac{\pi}{4}\right)$

I punti assegnati nell'esercizio 19 hanno l'ordinata data da π o da un multiplo di π.
π è un numero irrazionale, ma, a differenza dei casi esaminati nell'esercizio 18, non è possibile costruire con riga e compasso un segmento lungo esattamente π (vedi cap. 5).
Per rappresentare i punti dati converrà allora valersi di un valore approssimato di π; nei casi assegnati è sufficiente considerare

$\pi \cong 3.$

I calcolatori tascabili hanno un apposito tasto che fornisce il valore approssimato di π con 6 (o più) cifre decimali.

20. $A(\sqrt{2},-\sqrt{3})$; $B(-\pi,\sqrt{5})$; $C(-\sqrt{12},-\sqrt{8})$; $D(\sqrt{26},5)$; $E\left(-\frac{3}{2},\frac{\pi}{2}\right)$; $F\left(\frac{3}{4}\pi,-1\right)$; $G(\sqrt{15},4)$; $H(-\sqrt{35},-\sqrt{40})$

21. $A\left(\sqrt{8},\frac{\sqrt{8}}{4}\right)$; $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $C\left(\frac{\sqrt{10}}{5},-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$; $D\left(\frac{\sqrt{40}}{4},\frac{\sqrt{40}}{10}\right)$;
$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$; $F\left(-\frac{4}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{6}}\right)$; $G\left(-\frac{5}{\sqrt{5}},-\frac{8}{\sqrt{8}}\right)$; $H\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

L'esercizio si svolge rapidamente a partire dai valori approssimati delle coordinate irrazionali assegnate.

Per ottenere il valore approssimato di $\frac{\sqrt{8}}{4}$, si preme la sequenza

$\boxed{8}\ \boxed{\sqrt{}}\ \boxed{\div}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$.

Invece, per ottenere il valore approssimato di $\frac{1}{\sqrt{2}}$ si preme la sequenza

$\boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{\sqrt{}}\ \boxed{=}$.

22. $A(\sqrt{120},-2\pi)$; $B(-2\sqrt{5},-\sqrt{10})$; $C(-4\sqrt{3},\sqrt{12})$; $D\left(\frac{\sqrt{12}}{2},\frac{\sqrt{18}}{3}\right)$;
$E\left(\frac{\sqrt{32}}{4},-\frac{\sqrt{27}}{3}\right)$; $F\left(-\frac{\sqrt{50}}{5},\frac{\sqrt{98}}{7}\right)$

È indispensabile il calcolatore tascabile per rappresentare i punti D, E, F?

Distanza fra due punti

Distanza fra due punti di uguale ascissa

Data una coppia di punti di uguale ascissa, determinare la loro distanza.

Gli esercizi dal 23 al 36 chiedono di determinare la distanza fra due punti di uguale ascissa. Per svolgere gli esercizi tenere presente che i due punti hanno uguale ascissa, cioè sono del tipo

$P(a,b)$ *e* $Q(a,d)$,

perciò risulta:

$\overline{PQ}=|d-b|$.

Indicare sul piano cartesiano le coppie di punti assegnate negli esercizi dal 23 al 42 e determinare la lunghezza del segmento che congiunge ogni coppia.

23. $P(0,3)$ e $Q(0,7)$; $A(2,3)$ e $B(2,7)$; $C(-1,3)$ e $D(-1,7)$; $E\left(\frac{1}{2},3\right)$ e $F\left(\frac{1}{2},7\right)$

24. $A(0,1)$ e $B(0,6)$; $C\left(-\frac{2}{3},1\right)$ e $D\left(-\frac{2}{3},6\right)$; $E(-2,1)$ e $F(-2,6)$; $G(4,1)$ e $H(4,6)$

25. $A(-3,-2)$ e $B(-3,4)$; $C(-3,2)$ e $D(-3,-4)$; $E(-3,-2)$ e $F(-3,-4)$;
$G(-3,2)$ e $H(-3,4)$

26. $A(0,4;0,03)$ e $B(0,4;0,3)$; $C(0,4;-0,03)$ e $D(0,4;-0,3)$; $E(0,4;-0,03)$ e $F(0,4;0,3)$;
$G(0,4;0,03)$ e $H(0,4;-0,3)$

Negli esercizi dal 27 al 36 per calcolare la distanza fra le coppie di punti assegnati, si debbono eseguire sottrazioni anche fra numeri razionali espressi sotto forma di frazioni o fra numeri irrazionali espressi sotto forma di radicali.

27. $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$ e $B\left(0,\frac{9}{2}\right)$; $C\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$ e $D\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$; $E\left(\frac{4}{3},\frac{1}{2}\right)$ e $F\left(\frac{4}{3},-\frac{9}{2}\right)$;
$G\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ e $H\left(-2,-\frac{9}{2}\right)$

28. $P\left(0,\frac{1}{12}\right)$ e $Q\left(0,\frac{1}{3}\right)$; $R\left(-\sqrt{5},\frac{1}{24}\right)$ e $S\left(-\sqrt{5},-\frac{1}{12}\right)$; $T\left(3,-\frac{1}{24}\right)$ e $V\left(3,-\frac{1}{6}\right)$;
$W\left(-4,\frac{1}{3}\right)$ e $D\left(-4,-\frac{1}{24}\right)$

Calcolare in più modi la distanza fra le coppie di punti assegnati

a) valendosi delle frazioni,

b) esprimendo le frazioni in forma decimale con 1 cifra dopo la virgola,

c) esprimendo le frazioni in forma decimale con 2 cifre dopo la virgola,

d) valendosi del calcolatore tascabile.

Confrontare i risultati ottenuti.

29. $A\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$ e $B\left(-1,-\frac{1}{6}\right)$; $C\left(\sqrt{7},\frac{1}{3}\right)$ e $D\left(\sqrt{7},-\frac{7}{24}\right)$; $E\left(2,\frac{1}{24}\right)$ e $F\left(2,\frac{2}{3}\right)$; $G\left(-\sqrt{6},-\frac{1}{3}\right)$ e $H\left(-\sqrt{6},\frac{1}{6}\right)$

Rispondere agli stessi quesiti proposti nell'esercizio 28 a partire dalle coppie di punti assegnate.

30. $P\left(0,\frac{1}{12}\right)$ e $Q\left(0,\frac{1}{3}\right)$; $R\left(-\sqrt{5},\frac{1}{24}\right)$ e $S\left(-\sqrt{5},-\frac{1}{12}\right)$; $T\left(3,-\frac{1}{24}\right)$ e $V\left(3,-\frac{1}{6}\right)$; $W\left(-4,\frac{1}{3}\right)$ e $Z\left(-4,-\frac{1}{24}\right)$

Rispondere agli stessi quesiti proposti nell'esercizio 28 a partire dalle coppie di punti assegnate.

31. $A(-3,\sqrt{2})$ e $B(-3,4\sqrt{2})$; $C(-3,-\sqrt{2})$ e $D(-3,-4\sqrt{2})$; A ed $E(-3,-2\sqrt{2})$; $F(-3,3\sqrt{2})$ e $G(-3,0)$

Calcolare in due modi le distanze fra le coppie di punti assegnate:

a) valendosi dei radicali

b) valendosi del calcolatore tascabile.

Confrontare i risultati ottenuti.

Svolgiamo l'esercizio, per esempio, relativamente alla distanza $\overline{AB}$.

a) $\overline{AB}=4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

Per avere il valore approssimato del risultato con il calcolatore tascabile, si preme la sequenza:

$\boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}$.

Si ottiene:

$3\sqrt{2}\cong 4{,}2426407.$

b) *Valendosi subito del calcolatore tascabile, si calcola*

$\overline{AB}=4\sqrt{2}-\sqrt{2},$

premendo la sequenza

$\boxed{4}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}$

con la maggior parte dei calcolatori si ottiene lo stesso risultato approssimato; cioè

$\overline{AB}\cong 4{,}2426407.$

32. $A\left(-3,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $B\left(-3,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $C(0,\sqrt{3})$ e $D(0,2\sqrt{3})$; $E\left(1,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $F\left(1,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$; $G(-\sqrt{2},\sqrt{3})$ e $H(-\sqrt{2},-2\sqrt{3})$

Rispondere agli stessi quesiti proposti nell'esercizio 31, a partire dalle coppie di punti assegnate.

33. $A(0,\sqrt{5})$ e $B(0,-4\sqrt{5})$; $C(6,-\sqrt{10})$ e $D(6,-3\sqrt{10})$; $E\left(-1,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ e $F\left(-1,-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$; $G\left(-\frac{1}{4},2\sqrt{7}\right)$ e $H\left(-\frac{1}{4},\sqrt{7}\right)$

Rispondere agli stessi quesiti dell'esercizio 31 a partire dalle coppie di punti assegnate.

34. $A(4,\sqrt{5})$ e $B(4,2)$; A e $C(4,3)$; $D(4,\sqrt{5}-2)$ ed $E(4,0)$; $F(4,2-\sqrt{5})$ ed E; $G(4,3-\sqrt{5})$ ed E; $H(4,\sqrt{5}-3)$ ed E

Esaminiamo insieme il calcolo delle distanze $\overline{AB}$ *ed* $\overline{AC}$. *Si ha:*

$\overline{AB}=|\sqrt{5}-2|.$

Per valutare con il calcolatore la differenza

$\sqrt{5}-2,$

ci si vale della sequenza

$\boxed{5}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$;

si ottiene 0,236068.
La differenza

$\sqrt{5}-2$

è dunque un numero positivo.
Del resto si arriva facilmente a questa conclusione anche senza valersi del calcolatore; risulta infatti:

$$\sqrt{5}>2, \quad \text{da cui} \quad \sqrt{5}-2>0$$

In definitiva, si ha:

$$AB=|\sqrt{5}-2|=\sqrt{5}-2\cong 0{,}236068$$

Procedendo in modo analogo per determinare la distanza $\overline{AC}$, si calcola la differenza.

$$\sqrt{5}-3;$$

si ottiene:

$$\sqrt{5}-3\cong -0{,}763932<0$$

Per ottenere la distanza $\overline{AC}$ dovremo allora cambiare segno alla differenza ora calcolata; scriveremo dunque:

$$\overline{AC}=|\sqrt{5}-3|=-(\sqrt{5}-3),$$

ossia

$$\overline{AC}=|\sqrt{5}-3|=3-\sqrt{5}\cong 0{,}763932$$

In modo del tutto analogo si procede per calcolare le altre distanze proposte.

35. $A(-1,\sqrt{8})$ e $B(-1,2)$; $C(\sqrt{2},\sqrt{8})$ e $D(\sqrt{2},3)$; $O(0,0)$ ed $E(0,\sqrt{8}-2)$; O e $F(0,3-\sqrt{8})$

36. $A(-3,\sqrt{10})$ e $B(-3,3)$; $C(2,\sqrt{10})$ e $D(2,4)$; $E(0,-\sqrt{10})$ e $F(0,-\sqrt{5})$; $G(-1,-\sqrt{8})$ e $H(-1,-\sqrt{2})$

Determinare punti che hanno fra loro distanza assegnata.

37. È dato il punto $A(-2,0)$; determinare i due punti del piano che hanno la stessa ascissa -2 e distano 4 da A.

38. È dato il punto $B(3,1)$; determinare i due punti del piano che hanno la stessa ascissa 3 e distano 2 da B.

39. È dato il punto $C\left(1,\frac{1}{4}\right)$; determinare i due punti del piano che hanno la stessa ascissa 1 e distano $\frac{1}{2}$ da C.

40. È dato il punto $D(-5,2)$; determinare i due punti del piano che hanno la stessa ascissa -5 e distano $\sqrt{3}$ da D.

41. Riflettendo sul procedimento seguito per svolgere gli esercizi 37, 38, 39, 40, trovare una regola generale per risolvere il seguente problema: dato il punto $P(a,b)$, determinare i punti d'ascissa a, che hanno da P distanza d.

Distanza fra due punti di uguale ordinata

Data una coppia di punti di uguale ordinata determinare la loro distanza.

Gli esercizi dal 42 al 48 chiedono di calcolare la distanza fra due punti di uguale ordinata. Per risolvere gli esercizi tenere presente che i due punti hanno uguale ordinata, cioè sono del tipo

$$P(a,b) \text{ e } Q(c,b),$$

perciò risulta:

$$\overline{PQ}=|c-a|.$$

Indicare sul piano cartesiano le coppie di punti assegnate negli esercizi dal 42 al 48 e determinare la lunghezza del segmento che congiunge ogni coppia.

42. $A(3,4)$ e $B(9,4)$; $C(-3,4)$ e $D(9,4)$; $E(3,4)$ e $F(-9,4)$; $G(-3,4)$ e $H(-9,4)$

43. $P(450,350)$ e $Q(300,350)$; $R(-450,-400)$ e $S(-300,-400)$; $T(-450,650)$ e $Z(300,650)$; $V(450,-500)$ e $W(-300,-500)$

44. $A(0{,}03;-0{,}2)$ e $B(0{,}3;-0{,}2)$; $C(-0{,}03;0{,}4)$ e $D(-0{,}3;0{,}4)$; $E(-0{,}03;-0{,}8)$ e $F(0{,}3;-0{,}8)$; $G(0{,}03;0{,}01)$ e $H(-0{,}3;0{,}01)$

45. $P\left(\frac{1}{12},0\right)$ e $Q\left(\frac{1}{3},0\right)$; $R\left(\frac{1}{24},-\sqrt{8}\right)$ e $S\left(-\frac{1}{12},-\sqrt{8}\right)$; $T\left(-\frac{1}{24},3\right)$ e $V\left(-\frac{1}{6},3\right)$; $W\left(\frac{1}{3},-4\right)$ e $D\left(-\frac{1}{24},-4\right)$

Calcolare la distanza fra le coppie di punti assegnati in più modi:

a) valendosi delle frazioni,
b) esprimendo le frazioni in forma decimale con 1 cifra dopo la virgola,
c) esprimendo le frazioni in forma decimale con 2 cifre dopo la virgola,
d) valendosi del calcolatore tascabile.

Confrontare i risultati ottenuti.

46. $A\left(-\frac{2}{3},-1\right)$ e $B\left(-\frac{1}{6},-1\right)$; $C\left(\frac{1}{3},\sqrt{7}\right)$ e $D\left(-\frac{7}{24},\sqrt{7}\right)$; $E\left(\frac{1}{24},2\right)$ e $F\left(\frac{2}{3},2\right)$; $G\left(-\frac{1}{3},-3\right)$ e $H\left(\frac{1}{6},-3\right)$

Ripetere l'esercizio 45 a partire dalle coppie di punti assegnate.

47. $A(\sqrt{2},-2)$ e $B(4\sqrt{2},-2)$; $C(-\sqrt{2},-2)$ e $D(-4\sqrt{2},-2)$; A ed $E(-2\sqrt{2},-2)$; $F(3\sqrt{2},-2)$ e $G(0,-2)$

Calcolare le distanze fra le coppie di punti assegnate in due modi:

a) valendosi dei radicali
b) valendosi del calcolatore tascabile.

Confrontare i risultati ottenuti.

48. $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-4\right)$ e $B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-4\right)$; $C(\sqrt{3},0)$ e $D(2\sqrt{3},0)$; $E\left(\frac{1}{\sqrt{3}},1\right)$ e $F\left(\frac{2}{\sqrt{3}},1\right)$; $G(\sqrt{3},-2)$ e $H(-2\sqrt{3},-2)$

Ripetere l'esercizio 47, a partire dalle coppie di punti assegnate.

Determinare punti che hanno fra loro distanza assegnata.

49. È dato il punto $A(0,3)$; determinare i due punti del piano che hanno la stessa ordinata 3 e distano 2 da A.

50. È dato il punto $B(1,-4)$; determinare i due punti del piano che hanno la stessa ordinata -4 e distano 5 da B.

51. È dato il punto $D(4,-5)$; determinare i due punti del piano che hanno la stessa ordinata -5 e distano $\sqrt{3}$ da D.

52. Riflettendo sul procedimento seguito per svolgere gli esercizi 49, 50, 51, trovare una regola generale per risolvere il seguente problema: dato il punto $P(a,b)$, determinare i punti d'ordinata b, che hanno da P distanza d.

Distanza fra due punti qualunque

Data una coppia di punti, determinare la loro distanza.

Indicare le coppie di punti assegnate negli esercizi dal 53 al 66 e determinare la lunghezza del segmento che congiunge ogni coppia ricordando che, se sono assegnati i punti

$$P(a,b) \text{ e } Q(c,d),$$

risulta

$$\overline{PQ}=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$$

53. $A(1,2)$ e $O(0,0)$; $B(-3,5)$ ed O; $C(4,-6)$ ed O; $D(-8,-5)$ ed O

54. $A(3,1)$ e $B(-2,4)$; $C(4,-3)$ ed A; $D(-5,-7)$ ed A; $E(-2,-9)$ e D

55. $A(-650,-800)$ e $B(250,400)$; $C(-250,400)$ ed A; $D(250,-400)$ ed A; $E(-250,-400)$ ed A

56. $A(1250,-5000)$ e $B(-3750,2500)$; $C(3750,-2500)$ ed A; $D(-3750,-2500)$ ed A; $E(3750,2500)$ ed A

57. $A(5{,}75;-3{,}25)$ e $B(2{,}05;4{,}15)$; $C(-2{,}05;4{,}15)$ ed A; $D(2{,}05;-4{,}15)$ ed A; $E(-2{,}05;-4{,}15)$ ed A

58. $A(-0{,}006;-0{,}06)$ e $B(0{,}005;0{,}05)$; $C(-0{,}005;0{,}05)$ ed A; $D(0{,}005;-0{,}05)$ ed A; $E(-0{,}005;-0{,}05)$ ed A

59. $A\left(\frac{3}{2},\frac{5}{4}\right)$ e $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$; $C\left(\frac{5}{2},\frac{9}{4}\right)$ e B; $D\left(\frac{5}{3},\frac{6}{5}\right)$ e $E\left(\frac{2}{3},\frac{1}{5}\right)$; $F\left(\frac{8}{3},\frac{11}{5}\right)$ ed E

60. $A\left(\frac{7}{3},\frac{3}{2}\right)$ e $B\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{2}\right)$; $C\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ e B; $D\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{4}\right)$ ed $E\left(\frac{1}{5},-\frac{1}{4}\right)$; $F\left(-\frac{9}{5},\frac{7}{4}\right)$ ed E

61. $A\left(\frac{3}{8},\frac{5}{12}\right)$ e $B\left(-\frac{3}{8},-\frac{7}{12}\right)$; $C\left(-\frac{4}{3},-\frac{5}{24}\right)$ ed A; C e B; C ed $O(0,0)$

62. $A\left(-\frac{7}{6},\frac{8}{9}\right)$ e $B\left(\frac{1}{6},\frac{10}{9}\right)$; $C\left(\frac{11}{3},-\frac{9}{2}\right)$ ed A; C e B; A e $O(0,0)$

63. $A(\sqrt{5},-\sqrt{3})$ e $B(2\sqrt{5},\sqrt{3})$; $C(-\sqrt{6},-\sqrt{7})$ e $D(\sqrt{6},\sqrt{7})$;
$E(-3\sqrt{2},\sqrt{8})$ e $F(-\sqrt{2},-\sqrt{8})$; $G(\sqrt{10},-\sqrt{20})$ e $H(-\sqrt{10},\sqrt{20})$

64. $A(\sqrt{12},-\sqrt{20})$ e $B(-\sqrt{27},-\sqrt{30})$; $C(-\sqrt{75},\sqrt{45})$ ed A; C e B

65. $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},2\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ed A; C e B

66. $A\left(-\frac{\sqrt{5}}{4},-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ e $B\left(\frac{\sqrt{5}}{4},\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$; $C\left(-\frac{3}{4}\sqrt{5},\frac{2}{3}\sqrt{7}\right)$ ed A; C e B

Determinare punti che hanno fra loro distanza assegnata.

67. È dato il punto $P(-3,4)$; indicare alcuni punti che distano 5 da P.

68. È dato il punto $Q(-2,5)$; indicare alcuni punti che distano 5 da Q.

69. È dato il punto $O(0,0)$; indicare alcuni punti che distano $\sqrt{5}$ da O.

70. Quale proprietà caratterizza le coordinate dei punti che distano $\sqrt{5}$ da O?

71. Quale proprietà caratterizza le coordinate dei punti che distano r da O?

72. Determinare sull'asse delle x il punto P, che ha uguale distanza da $A(-1,2)$ e da $B(-5,4)$. *(Indicare con $(x,0)$ le coordinate di P e determinare x in modo che risulti $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$...).*
$\left[P\left(-\frac{9}{2},0\right)\right]$

73. Determinare sull'asse delle y il punto P che ha uguale distanza da $A(-2,1)$ e da $B(3,-1)$.
$\left[P\left(0,\frac{5}{4}\right)\right]$

74. Determinare i punti di ascissa -2, che hanno distanza 5 dal punto $A(-5,1)$.
$[P(-2,5),\ Q(-2,-3)]$

75. Determinare i punti di ordinata 1, che distano $\sqrt{2}$ dal punto $A(2,0)$. $[P(-1,1),\ Q(5,1)]$

76. Nel testo si è dimostrato che, dati i punti $A(a,b)$ e $B(c,d)$, risulta.

(1) $\overline{AB}=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$.

Scegliere quali fra le seguenti formule sono equivalenti alla (1), motivando la scelta.

(2) $\overline{AB}=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$; (3) $\overline{AB}=\sqrt{(c-d)^2+(d-a)^2}$;

(4) $\overline{AB}=\sqrt{(a-c)^2+(d-b)^2}$; (5) $\overline{AB}=\sqrt{(c-a)^2+(b-d)^2}$

Ancora sulla distanza fra due punti

77. Calcolare il perimetro del triangolo ABC, che ha per vertici i punti seguenti:
$A(0,3)$, $B(-4,0)$, $C(2,-1)$

78. Calcolare il perimetro del quadrilatero $ABCD$, che ha per vertici i punti seguenti:
$A(-3,2)$, $B(0,5)$, $C(3,-2)$, $D(-1,-3)$

79. Verificare che è rettangolo il triangolo ABC, che ha per vertici i punti seguenti:
$A(2,-1)$, $B(5,-2)$, $C\left(\frac{2}{3},-5\right)$
(Basta verificare che per il triangolo risulta valido il teorema di Pitagora).

80. Verificare che è rettangolo il triangolo ABC, che ha per vertici i punti seguenti:
$A(-2,-3)$, $B(-5,-2)$, $C(-3,4)$

81. Verificare che è isoscele il triangolo ABC, che ha per vertici i punti seguenti:
$A(-1,-2)$, $B(3,4)$, $C(-3,0)$

82. Verificare che è isoscele il triangolo ABC, che ha per vertici i punti seguenti:
$A(-2,1)$, $B(-1,3)$, $C(-4,2)$

83. Verificare che è equilatero il triangolo ABC, che ha per vertici i punti seguenti:
$A(0,-1)$, $B(2,1)$, $C(1-\sqrt{3},\sqrt{3})$
Calcolare l'area del triangolo.

84. Verificare che è equilatero il triangolo ABC, che ha per vertici i punti seguenti:
$A(-1,-1)$, $B(1,1)$, $C(-\sqrt{3},\sqrt{3})$
Calcolare l'area del triangolo.

85. Verificare che è un parallelogramma il quadrilatero $ABCD$, che ha per vertici i punti seguenti:
$A(0,2)$, $B(2,0)$, $C(6,1)$, $D(4,3)$
Verificare che la somma dei quadrati delle diagonali è uguale alla somma dei quadrati dei quattro lati.
(Per verificare che il quadrilatero è un parallelogramma, basta verificare che i lati opposti sono uguali).

86. Verificare che è un rettangolo il quadrilatero $ABCD$, che ha per vertici i punti seguenti:
$A(-4,1)$, $B(-1,-3)$, $C(7,3)$, $D(4,7)$
(Basta verificare che i lati opposti sono uguali e le diagonali sono uguali).

87. Verificare che è un rombo il quadrilatero $ABCD$, che ha per vertici i punti seguenti:
$A(0,-3)$, $B(0,2)$, $C(4,5)$, $D(4,0)$
Calcolare l'area del quadrilatero.
(Per verificare che il quadrilatero è un rombo, basta verificare che i lati sono tutti uguali; l'area è data dal prodotto delle diagonali).

88. Verificare che è un quadrato il quadrilatero $ABCD$, che ha per vertici i punti seguenti:
$A(1,2)$, $B(-2,0)$, $C(0,-3)$, $D(3,-1)$
(Basta verificare che i lati hanno uguale lunghezza l e che le diagonali sono lunghe $l\sqrt{2}$).

Le coordinate del punto medio di un segmento

89. Indicare sul piano cartesiano i punti $P(2,4)$, $Q(2,1)$ ed individuare graficamente il punto medio M del segmento PQ, cioè il punto M che divide il segmento PQ in due parti uguali.
Calcolare la distanza $\overline{PM}=\overline{MQ}=\frac{\overline{PQ}}{2}$.

90. Ripetere l'esercizio 89 a partire dalle seguenti coppie di punti:

$P(2,0)$ e $Q(2,3)$; $P(3,-1)$ e $Q(3,2)$; $P(-1,-6)$ e $Q(-1,-3)$

Svolgendo gli esercizi 89 e 90 si è condotti a disegnare tanti segmenti PQ con gli estremi P e Q di uguale ascissa. In tutti i casi il punto medio M divide il segmento in due parti uguali e risulta sempre

$$\overline{PM}=\overline{MQ}=\frac{\overline{PQ}}{2}=\frac{3}{2}$$

Tuttavia le figure mostrano chiaramente che M non si trova sempre nella stessa posizione sul piano. Si conclude che, per determinare la posizione del punto medio M di un segmento PQ, non basta calcolare la distanza

$$\overline{PM}=\overline{MQ}=\frac{\overline{PQ}}{2},$$

è, invece, necessario determinare le coordinate di M, a partire dalle coordinate degli estremi P e Q del segmento.

91. Considerare di nuovo i punti $P(2,4)$ e $Q(2,1)$ e determinare le coordinate del punto medio M del segmento PQ, tenendo presenti i seguenti suggerimenti:

a) per determinare l'ascissa di M, osservare che M si trova sul segmento PQ e perciò ha la stessa ascissa di P e di Q;

b) per determinare l'ordinata y_M di M, osservare che, a partire da $P(2,1)$, si raggiunge M percorrendo la distanza

$$\overline{PM}=\frac{3}{2},$$

nel verso stabilito lungo l'asse delle y (fig. 25).

(Risulta $y_M=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$*)*

Per determinare y_M*, si può anche pensare di raggiungere M a partire da Q(2,4), percorrendo la distanza*

$$\overline{QM}=\frac{3}{2}$$

in verso opposto a quello stabilito lungo l'asse delle y (fig. 26).
Si ottiene così:

$$y_M=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

In ogni caso il punto M ha le coordinate $M\left(2,\frac{5}{2}\right)$

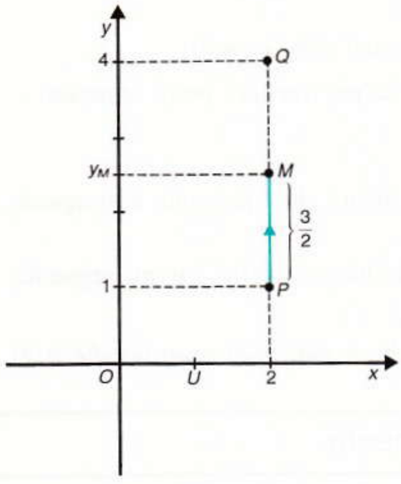


Fig. 25

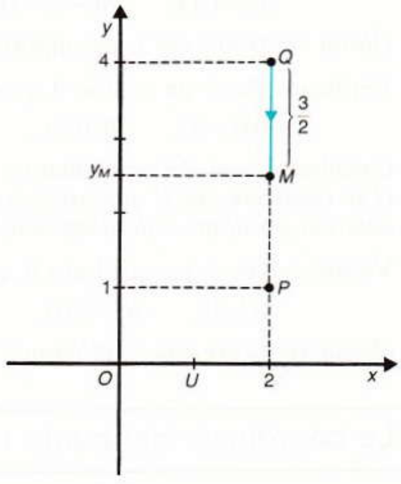


Fig. 26

92. Ripetere l'esercizio 91, a partire dalle coppie di punti assegnate nell'esercizio 90.

93. Riflettendo sullo svolgimento degli esercizi 91 e 92, indicare un procedimento generale per determinare la posizione del punto medio M di un segmento PQ, che ha per estremi i due punti di uguale ascissa

$$P(a,b) \text{ e } Q(a,d).$$

Basarsi sulla fig. 27.

$\left(\textit{Si ottiene } M\left(a, \dfrac{d+b}{2}\right)\right)$

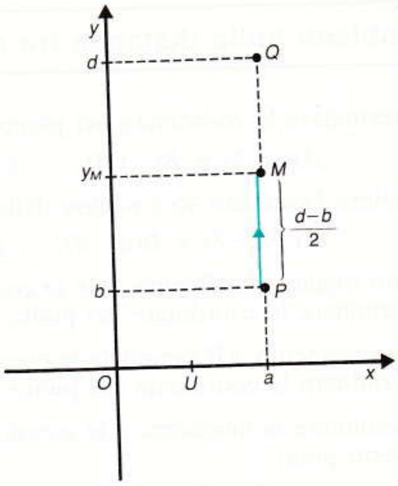


Fig. 27

94. Ripetere il procedimento seguito nell'esercizio 93, per determinare la posizione del punto medio M di un segmento PQ, che ha per estremi due punti di uguale ordinata

$$P(a,b) \text{ e } Q(c,b).$$

Basarsi sulla fig. 28.

$\left(\textit{Si ottiene } M\left(\dfrac{a+c}{2}, b\right)\right)$

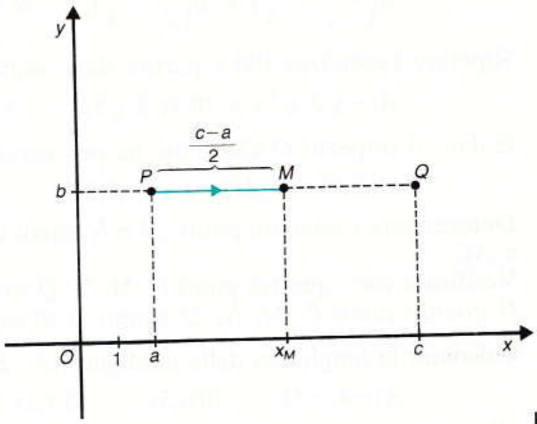


Fig. 28

95. Determinare la posizione del punto medio M di un segmento PQ, che ha per estremi i due punti

$$P(a,b) \text{ e } Q(c,d).$$

Tenere presente la fig. 29 ed osservare che ci si può ricondurre ai casi trattati negli esercizi 93 e 94, tracciando da P, M, Q le parallele agli assi e valendosi del teorema di Talete.

$\left(\textit{Si ottiene } M\left(\dfrac{a+c}{2}, \dfrac{d+b}{2}\right)\right)$

Svolgendo gli esercizi 93, 94, 95, si è dunque arrivati ad una regola generale:
il punto medio M di un segmento PQ ha le coordinate date dalla media aritmetica delle coordinate degli estremi P e Q.
Si scrive spesso brevemente:

dati $P(x_P, y_P)$ ***e*** $Q(x_Q, y_Q)$***, il punto medio è*** $M\left(\dfrac{x_P+x_Q}{2}, \dfrac{y_P+y_Q}{2}\right)$.

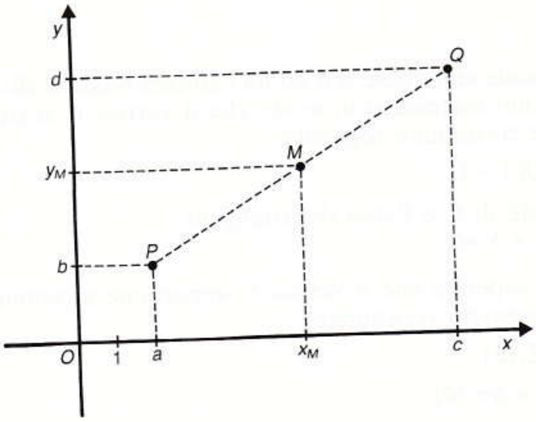


Fig. 29

Problemi sulla distanza fra due punti e sulle coordinate del punto medio

96. Determinare le coordinate del punto medio dei segmenti che hanno i seguenti estremi:

$A(-3,4)$ e $B(-1,4)$; A e $C(-3,6)$; B e C

97. Ripetere l'esercizio 96 a partire dalle seguenti coppie di punti:

$A(-2,-8)$ e $B(6,-8)$; B e $C(6,-12)$; A e C

98. Di un segmento AB sono date le coordinate di $A(5,4)$ e le coordinate del punto medio $M(3,1)$; determinare le coordinate del punto B. $[B(1,-2)]$

99. Di un segmento AB sono date le coordinate di $B(-6,10)$ e le coordinate del punto medio $M(0,4)$; determinare le coordinate del punto A. $[A(6,-2)]$

100. Determinare la lunghezza e le coordinate del punto medio dei segmenti che hanno per estremi i seguenti punti:

$A\left(-\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right)$ e $B\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{4}\right)$; B e $C\left(\frac{5}{2},\frac{3}{4}\right)$; A e C

101. Ripetere l'esercizio 100 a partire dalle seguenti coppie di punti:

$A(-\sqrt{3},\sqrt{5})$ e $B(3\sqrt{3},\sqrt{5})$; A e $C(-\sqrt{3},-\sqrt{5})$; B e C

102. È dato il trapezio $OABC$, che ha per vertici i punti

$O(0,0)$, $A(2,6)$, $B(3,6)$, $C(5,0)$

Determinare i seguenti punti: M e N, medi dei lati OA e BC; P e Q, medi delle due diagonali OB e AC.
Verificare che i quattro punti P, M, N, Q sono allineati su una stessa parallela alle basi AB e OC.
(I quattro punti P, M, N, Q hanno la stessa ordinata, perciò...).

103. Calcolare la lunghezza delle mediane AN, BP, CN del triangolo ABC, che ha per vertici i punti

$A(-4,-3)$, $B(0,5)$, $C(4,1)$.

(Determinare i punti M, N, P, medi dei lati AB, BC, AC; si ottiene poi:

$\overline{AN}=6\sqrt{2}$, $\overline{BP}=\overline{CM}=6$)

104. Ripetere l'esercizio 103, a partire dal triangolo ABC, che ha per vertici i punti

$A(7,-4)$, $B(-3,-6)$, $C(1,8)$

($\overline{AN}=\sqrt{89}$, $\overline{BP}=\sqrt{113}$, $\overline{CM}=\sqrt{170}$)

105. Verificare che è isoscele il triangolo ABC, che ha per vertici i punti

$A(3,2)$, $B(0,-2)$, $C(-2,2)$.

Calcolare l'area del triangolo.
(Per il calcolo dell'area, basta ricordare che, in un triangolo isoscele, la mediana relativa alla base è anche altezza. Si ottiene l'area $S=10$)

106. Ripetere l'esercizio 105 a partire dal triangolo ABC, che ha per vertici i punti seguenti:

$A(-2,5)$, $B(-5,2)$, $C(3,-3)$

(L'area è $S=\frac{39}{2}$)

107. Un triangolo ABC è isoscele sulla base AB ed ha l'altezza relativa alla base lunga 2. Il triangolo è disegnato in un riferimento cartesiano in modo che il vertice C si trovi nel primo quadrante e i vertici A e B abbiano le coordinate seguenti:

$A(-2,-1)$ e $B(4,-1)$

Determinare le coordinate di C e l'area del triangolo.
(Si ottiene $C(1,1)$; l'area è $S=6$)

108. Ripetere l'esercizio 107, sapendo che il vertice C appartiene al semiasse positivo delle x e che i vertici A e B hanno le seguenti coordinate:

$A(-6,8)$ e $B(2,12)$

(Si ottiene $C(3,0)$; l'area è $S=50$)

109. Un triangolo equilatero ABC ha il vertice $A(3,0)$, il vertice B di ascissa 0 e il vertice C di ascissa 3; determinare i vertici e l'area del triangolo.
(Problema tratto da uno dei temi di maturità scientifica del 1982. Si ottengono i vertici $B(0,\sqrt{3})$, $C(3,2\sqrt{3})$; l'area è $S=3\sqrt{3}$).

110. È dato il triangolo ABC, che ha per vertici i punti seguenti:

$$A(2,-3), \quad B(0,6), \quad C(-4,0).$$

Indicato con M il punto medio del lato BC, verificare che risulta:

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AM}^2+\frac{1}{2}\overline{BC}^2$$

111. È dato il triangolo ABC, che ha per vertici i punti seguenti:

$$A(-5,3), \quad B(0,-7), \quad C(1,0)$$

Verificare che la somma dei quadrati delle mediane è uguale ai $\frac{3}{4}$ della somma dei quadrati dei lati.

112. È dato il triangolo di vertici $A(1,-3)$, $B(-4,-5)$, $C(-2,1)$. Determinare i punti medi dei suoi lati ed indicarli con M, N, P. Verificare che il triangolo MNP ha perimetro metà del triangolo ABC.

La pendenza di un segmento

Calcolare la pendenza di segmenti che hanno gli estremi assegnati.

Gli esercizi dal 113 al 119 chiedono di calcolare la pendenza di segmenti che hanno gli estremi $A(a,b)$, $B(c,d)$ assegnati. In tal caso la pendenza m è data da $m=\frac{d-b}{c-a}$ (con $c\neq a$).

113. Calcolare la pendenza dei segmenti che hanno per estremi le seguenti coppie di punti:

$A(3,1)$ e $B(7,6)$; A e $C(7,1)$; A e $D(7,0)$; A ed $E(1,4)$; A ed $F(0,5)$

114. Ripetere l'esercizio 113 a partire dalle seguenti coppie di punti:

$A(-3,2)$ e $B(1,5)$; $C(-3,8)$ e B; $D(-3,5)$ e B; $E(4,0)$ e B;
$F(-2,-4)$ e B; $G(3,-2)$ e B

115. Ripetere l'esercizio 113 a partire dalle seguenti coppie di punti:

$O(0,0)$ ed $A(3,4)$; O e $B(3,8)$; O e $C(-3,20)$; O e $D(-3,0)$;
O ed $E(-3,-10)$; O ed $F(3,-8)$

Per risolvere gli esercizi 116-134, si debbono eseguire operazioni con frazioni e radicali o riflettere in modo più approfondito sulla nozione di pendenza.

116. Ripetere l'esercizio 113 a partire dalle seguenti coppie di punti:

$A\left(\frac{5}{3},-\frac{3}{4}\right)$ e $O(0,0)$; A e $B\left(0,-\frac{11}{4}\right)$; A e $C\left(-\frac{4}{3},0\right)$; A e $D\left(0,\frac{5}{4}\right)$;
A ed $E\left(\frac{2}{3},\frac{9}{4}\right)$; A ed $F\left(\frac{8}{3},-\frac{7}{4}\right)$

117. Ripetere l'esercizio 113 a partire dalle seguenti coppie di punti:

$A\left(-\frac{3}{2},-\frac{8}{5}\right)$ e $B\left(\frac{7}{2},\frac{2}{5}\right)$; A e $C\left(-\frac{5}{2},-\frac{3}{5}\right)$; A e $D\left(\frac{3}{10},-\frac{1}{5}\right)$;
A ed $E\left(-\frac{1}{6},-\frac{44}{15}\right)$; A ed $F\left(0,-\frac{4}{15}\right)$; A e $G\left(\frac{9}{2},0\right)$

118. Ripetere l'esercizio 113 a partire dalle seguenti coppie di punti:

$A(\sqrt{2},\sqrt{8})$ e $B(0,\sqrt{2})$; A e $C(-\sqrt{8},0)$; A e $D(0,-\sqrt{8})$;
A ed $E(2\sqrt{2},-\sqrt{18})$; A ed $O(0,0)$; E ed $O(0,0)$

119. Ripetere l'esercizio 113 a partire dalle seguenti coppie di punti:

$$A\left(-\frac{9}{5},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ e } B\left(-\frac{4}{5},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right);\quad A \text{ ed } O(0,0);\quad A \text{ e } C\left(0,\frac{4}{\sqrt{3}}\right);$$

$$A \text{ e } D\left(\frac{1}{5},0\right);\quad A \text{ ed } E\left(\frac{11}{5},\frac{7}{\sqrt{3}}\right);\quad E \text{ e } B$$

120. Nel testo si è detto che, dati i punti $A(a,b)$ e $B(c,d)$, la pendenza m del segmento AB è data da:

(1) $\quad m=\dfrac{d-b}{c-a}$

Fra le formule seguenti scegliere quella equivalente alla (1), motivando la scelta:

(2) $\quad m=\dfrac{b-d}{c-a}$; $\qquad$ (3) $\quad m=\dfrac{b-d}{a-c}$; $\qquad$ (4) $\quad m=\dfrac{d-b}{a-c}$

121. Se le coordinate degli estremi A e B di un segmento si indicano con

$$A(x_A,y_A),\qquad B(x_B,y_B),$$

come diventa la formula (1), che fornisce la pendenza m del segmento AB?

Determinare gli estremi di un segmento di data pendenza.

122. Un segmento AB ha l'estremo A di ascissa nulla, l'estremo B di coordinate (3,5) e la pendenza m che vale 2. Determinare l'estremo A.

(Indicata con y l'ordinata di A, deve essere $\dfrac{y-5}{0-3}=2$, *da cui...)* [A(0,−1)]

123. Ripetere l'esercizio 122 con $B(-6,-8)$ e $m=1$. [$A(0,-2)$]

124. Un segmento AB ha l'estremo B di ordinata nulla, l'estremo A di coordinate $(-2,4)$ e la pendenza m che vale -3. Determinare l'estremo B. $\left[B\left(-\frac{2}{3},0\right)\right]$

125. Ripetere l'esercizio 124 con $A(-2,7)$ e $m=-\frac{7}{3}$. [$B(1,0)$]

126. Un segmento AB ha l'estremo A di coordinate $(4,-3)$ e la pendenza m che vale 1. Determinare l'estremo B.
La risposta è unica?
Se no, indicare almeno quattro risposte possibili.

127. Un segmento AB è lungo $d=\sqrt{5}$, ha pendenza $m=2$ ed ha l'estremo A di coordinate (1,2). Determinare l'estremo B.
(Indicate con x e y le coordinate incognite di B, deve risultare:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=5\\ \dfrac{y-2}{x-1}=2\end{cases}\quad \text{da cui}\quad \begin{cases}5(x-1)^2=5\\ y-2=2(x-1)\end{cases}\quad \text{ossia}\quad \begin{cases}(x-1)^2=1 < \begin{matrix}x-1=1\\ x-1=-1\end{matrix}\\ y-2=2(x-1)\end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottengono due punti O(0,0) e B(2,4). Perché?)

128. Ripetere l'esercizio 127, dati $B(-2,3)$, $d=\sqrt{20}$, $m=-2$. [$A(0,-1)$ e $A'(-4,7)$]

Pendenza e lunghezza di un segmento

Confrontiamo due delle formule, relative ad un segmento AB di estremi $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$:

– la formula che fornisce la pendenza m del segmento AB, ossia:

(1) $\quad m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$;

– la formula che fornisce la lunghezza del segmento AB, cioè

(5) $\quad \overline{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Si osserva che la (5) si può anche scrivere nella forma:

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2\left[1+\frac{(y_B-y_A)^2}{(x_B-x_A)^2}\right]}=|x_B-x_A|\sqrt{1+\left(\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\right)^2}$$

Valendosi della (1), si ottiene allora:

(6) $\qquad \overline{AB}=|x_B-x_A|\sqrt{1+m^2}.$

Questa formula permette di calcolare la lunghezza di un segmento conoscendo solo la sua pendenza m e le ascisse dei suoi estremi A e B.

129. Calcolare la lunghezza di un segmento AB, che ha pendenza $m=3$, sapendo che le ascisse dei suoi estremi sono 4 e 6. [$\overline{AB}=2\sqrt{10}$)]

130. Ripetere l'esercizio 129, sapendo che la pendenza m vale -3 e che le ascisse di A e B sono -8 e -10. [$\overline{AB}=2\sqrt{10}$]

131. Ripetere l'esercizio 129, sapendo che la pendenza m vale $\sqrt{3}$ e che le ascisse di A e B sono 2 e -3. [$\overline{AB}=10$]

132. Ripetere l'esercizio 127, valendosi della formula (6). Confrontare i risultati ottenuti e i calcoli svolti.
(Si deve determinare $A(x,y)$ in modo che risulti:

$$\begin{cases} |x-1|\sqrt{5}=\sqrt{5} \\ \dfrac{y-2}{x-1}=2 \end{cases} \quad \textit{da cui} \quad \begin{cases} |x-1|=1 < \begin{matrix} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{matrix} \\ y-2=2(x-1). \end{cases}$$

133. Ripetere l'esercizio 128, valendosi della formula (6). Confrontare i risultati ottenuti ed i calcoli svolti.

La pendenza di un segmento in problemi fisici ed economici

134. Un punto materiale si muove su una traiettoria rettilinea. Si misura in metri la distanza s percorsa a partire da una posizione iniziale O e in secondi i relativi tempi impiegati a percorrere le distanze. Si hanno così i seguenti dati:

a) $t_1=3$ e $s_1=10$, $\quad t_2=8$ e $s_2=20$;
b) $t_1=3$ e $s_1=10$, $\quad t_2=8$ e $s_2=5$;
c) $t_1=3$ e $s_1=10$, $\quad t_2=8$ e $s_2=20$;

Calcolare la velocità media del punto materiale nei tre casi.
Nei tre casi, rappresentare i dati su un piano cartesiano, riportando sull'asse delle ascisse i tempi t e sull'asse delle ordinate le distanze s; si otterranno tre coppie di punti del tipo $A(t_1,s_1)$ e $B(t_2,s_2)$.
Che cosa indica la pendenza di ciascun segmento AB?
(Ricordare che la velocità media v_m è data da:

$$v_m=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1})$$

135. Riflettendo sullo svolgimento dell'esercizio precedente, si può arrivare facilmente ad una regola generale: la pendenza del segmento AB, di estremi $A(t_1,s_1)$ e $B(t_2,s_2)$ indica la velocità media di un punto materiale che ha percorso le distanze s_1 ed s_2 agli istanti t_1 e t_2.
Che significato ha una pendenza positiva? E una pendenza negativa? E una pendenza nulla?

136. Un punto materiale si muove su una traiettoria rettilinea. Si misurano in metri al secondo le velocità v e in secondi il tempo t che trascorre. Si hanno così i seguenti dati:

a) $t_1=5$ e $v_1=30$, $\quad t_2=10$ e $v_2=50$;
b) $t_1=5$ e $v_1=30$, $\quad t_2=10$ e $v_2=20$;
c) $t_1=5$ e $v_1=30$, $\quad t_2=10$ e $v_2=30$;

Calcolare l'accelerazione media del punto materiale nei tre casi.
Nei tre casi, rappresentare i dati su un piano cartesiano, riportando sull'asse delle ascisse i tempi t e sull'asse delle ordinate le velocità v; si otterranno tre coppie di punti del tipo $A(t_1,v_1)$ e $B(t_2,v_2)$.

Che cosa indica la pendenza di ciascun segmento AB?
(Ricordare che l'accelerazione media a_m è data da:

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1})$$

137. Riflettendo sullo svolgimento dell'esercizio precedente, si può arrivare facilmente ad una regola generale: la pendenza del segmento AB, di estremi $A(t_1, v_1)$ e $B(t_2, v_2)$ indica l'accelerazione media di un punto materiale che ha le velocità v_1 e v_2 agli istanti t_1e t_2.
Che significato ha una pendenza positiva? E una pendenza negativa? È una pendenza nulla?

138. In economia è spesso necessario analizzare la variazione del costo di produzione di un bene al variare del numero di unità prodotte. In particolare, si calcola il *costo marginale* c_m di un prodotto, definito nel modo seguente: si indica con c_1 il costo quando si producono n_1 unità del prodotto, e con c_2 il costo quando si producono n_2 unità e si calcola

$$c_m = \frac{c_2 - c_1}{n_2 - n_1}.$$

Se si rappresentano i dati su un piano cartesiano, riportando sull'asse delle ascisse il numero n di unità prodotte e sull'asse delle ordinate i costi c, si otterrà una coppia di punti del tipo $A(n_1, c_1)$ e $B(n_2, c_2)$.
Che cosa indica ora la pendenza del segmento AB?
Che significato ha una pendenza positiva? E una pendenza negativa? E una pendenza nulla?

139. In economia è spesso necessario analizzare la variazione del profitto che si ricava dalla produzione di un bene al variare del numero di unità prodotte. In particolare, si calcola il *profitto marginale* p_m di un prodotto definito nel modo seguente: si indica con p_1 il profitto quando si producono n_1 unità del prodotto, e con p_2 il profitto quando si producono n_2 unità; si calcola

$$p_m = \frac{p_2 - p_1}{n_2 - n_1}.$$

Se si rappresentano i dati su un piano cartesiano, riportando sull'asse delle ascisse il numero n di unità prodotte e sull'asse delle ordinate i profitti p, si otterrà una coppia di punti del tipo $A(n_1, p_1)$ e $B(n_2, p_2)$.
Che cosa indica ora la pendenza del segmento AB?
Che significato ha una pendenza positiva? E una pendenza negativa? E una pendenza nulla?

1. Parte seconda
Esercizi

La retta

Dal grafico di una retta alla sua equazione

Gli esercizi dall'1 al 5 chiedono di scrivere l'equazione di rette che sono parallele all'asse delle y e passano per un punto $A(a,b)$. In tal caso è opportuno ricordare che l'equazione è sempre del tipo

$$x=a.$$

Determinare le equazioni delle rette parallele all'asse delle y assegnate negli esercizi dall'1 al 5, dopo averle disegnate sul piano cartesiano.

1. r che passa per $A(4,3)$; s che passa per $B(-6,2)$; t che passa per $C(10,0)$; u che passa per $U(1,0)$; v che passa per $D(-85,-60)$

2. r che passa per $A(-2{,}38;4{,}18)$; s che passa per $B(5{,}7;-9{,}3)$; t che passa per $C(-28{,}4;58{,}6)$; u che passa per $D(127{,}4;675{,}2)$; v che passa per $E(748{,}1;957{,}7)$

3. r che passa per $A\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$; s che passa per $B\left(-\frac{2}{3},-\frac{5}{3}\right)$; t che passa per $C\left(\frac{7}{4},-\frac{9}{4}\right)$; u che passa per $D\left(-\frac{10}{3},\frac{4}{3}\right)$; v che passa per $E\left(-\frac{4}{5},0\right)$

4. r che passa per $A\left(-\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; s che passa per $B\left(\frac{1}{\sqrt{8}},\sqrt{5}\right)$; t che passa per $C(\pi,-1)$; u che passa per $D\left(\frac{3}{2}\pi,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5. r che passa per $A(-5,1)$ ed r' che passa per $A'(5,2)$;
s che passa per $B\left(\frac{3}{4},-2\right)$ e s' che passa per $B'\left(-\frac{3}{4},3\right)$;
t che passa per $C(\sqrt{2},0)$ e t' che passa per $C'(-\sqrt{2},0)$

6. Considerare le rette r ed r' dell'esercizio 5 ed esaminarne il grafico e le equazioni.
Si osserva che la stessa proprietà caratterizza le due rette: sulle due rette r ed r' si trovano tutti i punti che hanno distanza 5 dall'asse delle y. Questa proprietà si traduce nell'equazione seguente:

$$|x|=5.$$

Basandosi sulle considerazioni ora svolte, descrivere con un'unica equazione le coppie di rette s, s' e t, t' dell'esercizio 5.

Gli esercizi dal 7 all'11, chiedono di scrivere l'equazione di rette che sono parallele all'asse delle y e passano per un punto $A(a,b)$.
In tal caso è opportuno ricordare che l'equazione è sempre del tipo

$$y=b.$$

Determinare le equazioni delle rette parallele all'asse delle x assegnate negli esercizi dal 7 all'11, dopo averle disegnate sul piano cartesiano.

7. r che passa per $A(-3{,}2)$; s che passa per $B(4,-3)$; t che passa per $C(8{,}10)$; u che passa per $D(15,-20)$; v che passa per $E(-1{,}1)$

8. r che passa per $A\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$; s che passa per $B\left(-\frac{5}{3},-\frac{7}{3}\right)$; t che passa per $C\left(\frac{9}{4},-\frac{3}{4}\right)$; u che passa per $D\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$; v che passa per $E\left(0,\frac{12}{5}\right)$

9. r che passa per $A(1,-\sqrt{7})$; s che passa per $B(-2,\sqrt{8})$; t che passa per $C\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; u che passa per $D\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; v che passa per $E(\sqrt{6},-\sqrt{10})$

10. r che passa per $A\left(\frac{1}{3},\frac{\pi}{3}\right)$; s che passa per $B\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; t che passa per $C\left(1,-\frac{3}{2}\pi\right)$; u che passa per $D\left(-2,\frac{3}{4}\pi\right)$; v che passa per $E\left(0,-\frac{5}{6}\pi\right)$

11. r che passa per $A(2,-8)$ e r' che passa per $A'(0{,}8)$; s che passa per $B\left(-\frac{2}{3},-\frac{7}{3}\right)$ e s' che passa per $B'\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$; t che passa per $C(1,\sqrt{15})$ e t' che passa per $C'(0,\sqrt{15})$

12. Riprendendo le considerazioni svolte nell'esercizio 6, descrivere con un'unica equazione le coppie di rette r ed s', s ed s', t e t'.

Gli esercizi dal 13 al 26 chiedono di scrivere l'equazione di rette che passano per due punti $A(a,b)$, $B(c,d)$. In tal caso è opportuno ricordare che l'equazione della retta AB si scrive nella forma

$$\frac{y-b}{x-a}=\frac{d-b}{c-a}.$$

Se si indica con m la pendenza della retta, data da:

$$m=\frac{d-b}{x-a},$$

l'equazione si può scrivere in forma esplicita, *cioè nella forma*

$$y=mx+n.$$

Determinare le equazioni delle rette che passano per le coppie di punti indicate negli esercizi dal 13 al 26, dopo averne tracciato il grafico. Scrivere, in ogni caso, l'equazione della retta in forma esplicita, precisando il valore che assumono m ed n.

13. $A(1{,}5)$ e $B(3{,}6)$; $O(0{,}0)$ e $C(2{,}8)$; A e C; B e C

14. $A(3{,}8)$ e $B(7{,}4)$; $O(0{,}0)$ e$C(6{,}5)$; A e C; B e C

15. $A(-2{,}4)$ e $B(3,-1)$; $O(0{,}0)$ e $C(-5,-7)$; A e C; B e C

16. $A(-10,-50)$ e $B(-60{,}10)$; $O(0{,}0)$ e $C(20,-10)$; A e C; B e C

17. $A(950,-720)$ e $B(0,-370)$; $C(-650{,}0)$ e $D(-150,-480)$; A e C; B e D

18. $A(-0{,}35;8{,}45)$ e $B(0{,}15;-1{,}55)$; $C(-0{,}05;0)$ e $D(-6{,}5;-8{,}05)$; A e C; B e D

19. $A(-0{,}01;-0{,}83)$ e $B(0{,}11;0{,}03)$; $C(0;-0{,}66)$ e $D(-0{,}41;0)$; A e C; B e D

20. $A\left(\frac{8}{3},-\frac{5}{4}\right)$ e $O(0{,}0)$; A e $B\left(0,-\frac{13}{4}\right)$; A e $C\left(-\frac{1}{3},0\right)$; A e $D\left(0,\frac{3}{4}\right)$; A ed $E\left(\frac{2}{3},-1\right)$

21. $A\left(-\frac{5}{2},-\frac{9}{5}\right)$ e $B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{5}\right)$; A e $C\left(-\frac{3}{2},-\frac{4}{5}\right)$; A e $D\left(-\frac{3}{10},0\right)$; A ed O; A ed $E\left(0,\frac{3}{4}\right)$

22. $A(\sqrt{3},\sqrt{12})$ e $B(0,\sqrt{3})$; A e $C(-\sqrt{27},0)$; A ed $O(0{,}0)$; A e $D(-\sqrt{3},-\sqrt{12})$

23. $A\left(-\frac{9}{5},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $B\left(-\frac{4}{5},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$; A ed $O(0{,}0)$; A e $C\left(0,\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$; A e $D\left(\frac{11}{5},\frac{7}{\sqrt{3}}\right)$

24. $A\left(\frac{\sqrt{7}}{3},\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$ e $B(-4\sqrt{5},-4\sqrt{5})$

L'equazione che si ottiene è molto semplice

$$y=x,$$

ma richiede calcoli laboriosi.
Tuttavia i calcoli si possono evitare, osservando che A e B sono due punti che hanno le coordinate uguali fra loro...

25. $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $C(\pi,2\pi)$ e $D\left(-\frac{\pi}{2},-\pi\right)$; $E\left(\frac{4}{5},-\frac{8}{5}\right)$ ed $F(\sqrt{2},-2\sqrt{2})$

Si può evitare di svolgere calcoli laboriosi per determinare le equazioni delle tre rette?

26. $A(\pi,1+\pi)$ e $B(\sqrt{10},1+\sqrt{10})$; $C(\sqrt{8},1-\sqrt{8})$ e $D(0,1)$

Si può evitare di svolgere calcoli laboriosi per determinare le equazioni delle due rette?

27. Nel testo si è dimostrato che, se si indicano con $A(a,b)$ e $B(b,c)$ due punti assegnati, l'equazione della retta AB si scrive nella forma

(1) $$\frac{y-b}{x-a}=\frac{d-b}{c-a}.$$

Fra le seguenti formule scegliere quelle equivalenti alla (1), motivando la scelta:

(2) $\frac{y-b}{x-a}=\frac{b-d}{c-a}$; (3) $\frac{y-b}{x-a}=\frac{b-d}{c-a}$; (4) $\frac{b-y}{a-x}=\frac{b-d}{a-c}$;

(5) $\frac{b-y}{x-a}=\frac{d-b}{c-a}$; (6) $\frac{x-a}{y-b}=\frac{d-b}{c-a}$

28. Riferendosi all'esercizio precedente, scrivere altre formule equivalenti alla (1) per descrivere l'equazione della retta AB.

29. Se uno dei punti assegnati (A o B) coincide con l'origine degli assi $O(0,0)$, quale forma assume l'equazione (1)?
Sembra di ottenere equazioni di tipo diverso a seconda che si scelga A o B coincidente con O; in entrambi i casi scrivere in forma esplicita le equazioni ottenute e confrontarle.

30. Se i punti assegnati sono i punti in cui la retta incontra gli assi coordinati, cioè se i punti sono

$$A(p,0) \text{ e } B(0,n),$$

quale forma assume l'equazione (1)?
Verificare che, in tal caso, l'equazione della retta si può sempre scrivere nella forma seguente:

(1') $$\frac{x}{p}+\frac{y}{n}=1.$$

L'equazione (1') prende il nome di equazione segmentaria *della retta.*

31. Se le coordinate dei punti A e B si indicano con

$$A(x_A,y_A), \quad B(x_B,y_B),$$

come diventa la formula (1) che esprime l'equazione della retta AB?

32. Come si può verificare se tre punti A, B, C di coordinate note sono allineati su una stessa retta?
Se i punti sono

$$A(x_A,y_A), \quad B(x_B,y_B), \quad C(x_C,y_C),$$

si può procedere così: scrivere l'equazione della retta AB e verificare se il punto $P(x,y)$, che percorre la retta può assumere la posizione C.
(Si ottiene la condizione:

$$\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A})$$

33. Verificare se sono allineati i seguenti punti:

$$A(1,-2), \quad B\left(-2,\frac{5}{2}\right), \quad C\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$$

34. Sono dati i punti $A(-4,8)$, $B(1,5)$, $C(5,3)$ e $D(11,-1)$. Questi punti sono allineati? Se uno di essi non è allineato con gli altri tre, modificare la sua ordinata (lasciando fissa l'ascissa) in modo da ottenere l'allineamento; oppure modificare la sua ascissa (lasciando fissa l'ordinata) in modo da ottenere l'allineamento.

35. L'esercizio 31 conduce a scrivere l'equazione della retta che passa per i punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ nella forma seguente:

$$\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

La stessa equazione si può scrivere in forma intera, cioè

$$(y-y_A)(x_B-x_A)=(y_B-y_A)(x-x_A), \quad \text{ossia} \quad (y-y_A)(x_B-x_A)-(y_B-y_A)(x-x_A)=0$$

Svolgendo opportunamente i prodotti indicati, si arriva a scrivere:

$$-(y_B-y_A)x+(x_B-x_A)y+[(y_B-y_A)x_A-(x_B-x_A)y_A]=0.$$

In definitiva, si ottiene un'equazione del tipo

(1″) $\quad ax+by+c=0.$

L'equazione ora scritta prende il nome di *equazione implicita* della retta; a, b, c sono tre termini costanti che hanno il seguente significato:

$$a=-(y_B-y_A), \qquad b=(x_B-x_A), \qquad c=(y_B-y_A)x_A-(x_B-x_A)y_A$$

Dimostrare che le equazioni di tutte le rette finora considerate sono casi particolari dell'equazione (1″), verificando che:

- se risulta $a=0$, si ha una retta parallela all'asse delle x,
- » » $b=0$, » » » » » » » y,
- » » $c=0$, » » » » che passa per $O(0,0)$,
- » » $b\neq0$, l'equazione si può scrivere nella forma $y=mx+n$.

Nell'ultimo caso esaminato ($b\neq0$), quale relazione lega m ad a e b?

Dall'equazione della retta al grafico

Gli esercizi dal 36 al 50 chiedono di tracciare il grafico di rette d'equazione assegnata.

Per svolgere gli esercizi, è opportuno ricordare le seguenti nozioni esposte nel testo:
- *l'equazione di una retta si presenta sempre nella forma*

  $y=mx+n$, *oppure nella forma* $x=a$;
- *l'equazione esprime la proprietà comune alle coordinate di tutti i punti che si trovano sulla retta;*
- *per due punti passa una sola retta.*

Perciò, per tracciare il grafico di una retta, basta indicare sul piano cartesiano due punti A e B che hanno le coordinate legate dall'equazione ed unirli.

Tracciare il grafico delle rette di cui è assegnata l'equazione negli esercizi dal 36 al 42.

36. $y=-3;\quad y=-\frac{3}{4};\quad y=0;\quad y=2;\quad x=-4;\quad x=0;\quad x=\frac{5}{2};\quad 4y=-3;\quad 2x=5$

Prestare particolare attenzione alle ultime due equazioni: in entrambi i casi basta ricavare la y (o la x) per scrivere l'equazione in una delle forme note. Riflettere sul significato che assume in geometria analitica il termine equazione.

37. $y=x;\quad \frac{y}{x}=1;\quad y=2x;\quad \frac{y}{x}=2;\quad y=\frac{1}{2}x;\quad \frac{y}{x}=\frac{1}{2};\quad 2y=x;\quad -4y+2x=0$

Prestare particolare attenzione alle ultime due equazioni, che rappresentano ancora delle rette: in entrambi i casi basta ricavare la y per scrivere l'equazione in una delle forme note.

38. $y=-2x+5;\quad \frac{y-5}{x}=-2;\quad y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2};\quad y=-\frac{4}{3}x-\frac{5}{6};\quad 4y-3x+2=0;\quad 6y+8x+5=0$

Prestare particolare attenzione alle ultime due equazioni che rappresentano ancora delle rette: in entrambi i casi basta ricavare la y per scrivere l'equazione in una delle forme note.

39. $y=0$; $y=\frac{1}{20}x$; $y=\frac{1}{10}x$; $y=\frac{1}{5}x$; $y=\frac{1}{3}x$; $y=x$; $y=3x$; $y=5x$; $y=10x$; $y=20x$

Rappresentare tutte le rette sullo stesso piano cartesiano e riflettere sulla nozione di pendenza. Leggendo le equazioni nell'ordine assegnato, le rette corrispondenti hanno pendenza crescente o decrescente?

40. $y=0$; $y=-10x$; $y=-5x$; $y=-3x$; $y=-x$; $y=-\frac{1}{3}x$; $y=-\frac{1}{5}x$; $y=-\frac{1}{10}x$

Rappresentare tutte le rette sullo stesso piano cartesiano e riflettere sulla nozione di pendenza. Leggendo le equazioni nell'ordine assegnato, le rette corrispondenti hanno pendenza crescente o decrescente?

41. $y=x-10$; $y=x-5$; $y=x-1$; $y=x$; $y=x+1$; $y=x+5$; $y=x+10$

Rappresentare tutte le rette sullo stesso piano cartesiano e riflettere sul significato del termine noto n, leggendo le equazioni nell'ordine assegnato ed esaminando i corrispondenti grafici.

42. $y=-x-4$; $y=-x-1$; $y=-x-\frac{1}{4}$; $y=-x$; $y=-x+\frac{1}{4}$; $y=-x+1$; $y=-x+4$

Rappresentare tutte le rette sullo stesso piano cartesiano e riflettere sul significato del termine noto n, leggendo le equazioni nell'ordine assegnato ed esaminando i corrispondenti grafici.

Negli esercizi dal 43 al 45 sono indicate tante coppie di rette; rappresentare sullo stesso piano cartesiano ogni coppia, confrontando i grafici con le relative equazioni.

43. $y=4x-\frac{2}{3}$ e $y=-\frac{2}{3}x+4$; $y=-\frac{2}{5}x+\frac{1}{2}$ e $y=\frac{1}{2}x-\frac{2}{5}$; $y=-3x-1$ e $y=-x-3$

44. $y=-6x+3$ e $y=6x-3$; $y=-3x-2$ e $y=3x+2$; $y=4x-1$ e $y=-4x+1$

45. $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ e $y=3x+1$; $y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$ e $y=-2x+4$; $y=-4x-8$ e $y=-x-2$

46. Scegliere fra le seguenti equazioni quelle che rappresentano la stessa retta; per ogni retta tracciare il corrispondente grafico.

(*a*) $y=-\frac{7}{5}x+\frac{5}{3}$; (*b*) $3y=-7x+5$; (*c*) $y=-7x+5$; (*d*) $3y+7x-5=0$;
(*e*) $3y-7x+5=0$

47. Ripetere l'esercizio 46 a partire dalle seguenti equazioni:

(*a*) $y=\frac{4}{5}x+\frac{3}{10}$; (*b*) $y=8x+3$; (*c*) $10y=4x+3$; (*d*) $10y-8x-3=0$;
(*e*) $8x-10y+3=0$

48. Ripetere l'esercizio 46 a partire dalle seguenti equazioni:

(*a*) $5x+4y+7=0$; (*b*) $y=\frac{5}{4}x+\frac{7}{4}$; (*c*) $y=-\frac{5}{4}x-\frac{7}{4}$; (*d*) $y=5x+7$;
(*e*) $y=-5x-7$

49. Fra le seguenti equazioni scegliere quelle che rappresentano una retta, motivando la scelta e disegnando il corrispondente grafico.

(*a*) $y=\frac{x}{4}+2$; (*b*) $y=\frac{4}{x}+2$; (*c*) $y=\sqrt{2}x$; (*d*) $y=\sqrt{2x}$; (*e*) $y=2x$;
(*f*) $y=x^2$

50. Ripetere l'esercizio 49 a partire dalle seguenti equazioni:

(*a*) $\frac{y}{x}=-\frac{1}{2}$; (*b*) $yx=-\frac{1}{2}$; (*c*) $y=-\frac{1}{2x}$; (*d*) $y=-\frac{1}{2}x$;
(*e*) $y=x^2+x$; (*f*) $y=x+1$

51. Scegliere fra le seguenti rette quelle che passano per $A(1,-2)$, motivando la scelta:

(*a*) $y=x-3$; *b*) $y=-x+3$; (*c*) $y=-2x$; (*d*) $y=-2$; (*e*) $y=\frac{1}{2}x-2$;

(*f*) $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

52. Ripetere l'esercizio 51 a partire dal punto $B\left(-\frac{1}{2},3\right)$ e dalle seguenti rette:

(*a*) $y=-\frac{3}{2}x-2$; (*b*) $y=2x+4$; (*c*) $y=-x+3$; (*d*) $x=-1$;

(*e*) $y=-6x$; (*f*) $\frac{y}{3}=2x+1$

Modificare il termine noto n delle rette che non passano per B (lasciando inalterata la pendenza m), in modo da ottenere delle rette che passano per B.
Modificare la pendenza m delle rette che non passano per B (lasciando inalterato n), in modo da ottenere delle rette che passano per B.

53. Scegliere fra i seguenti punti quelli che appartengono alla retta d'equazione $y=-3x+2$, motivando la scelta:

$A(2,0)$, $B(0,2)$, $C\left(\frac{2}{3},0\right)$, $D(-1,5)$, $E(2,4)$, $F\left(-\frac{1}{6},3\right)$, $G\left(-\frac{1}{6},\frac{3}{2}\right)$

54. Ripetere l'esercizio 53 a partire dalla retta r d'equazione $y=-\frac{3}{4}x-2$ e dai seguenti punti:

$A(0,2)$, $B(-8,0)$, $C(-4,1)$, $D(1,-5)$ $O(0,0)$, $E\left(\frac{4}{3},3\right)$, $F\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

Modificare l'ascissa dei punti che non appartengono ad r (lasciando inalterata l'ordinata), in modo da ottenere dei punti che appartengono ad r.
Modificare l'ordinata dei punti che non appartengono ad r (lasciando inalterata l'ascissa), in modo da ottenere dei punti che appartengono ad r.

Esercizi vari sulla retta

55. Il punto P ha ascissa 1 ed è allineato con i punti $A(-1,3)$ e $B(-3,2)$; calcolare la sua ordinata. [1]

56. Il punto P ha ordinata -1 ed è allineato con $O(0,0)$ e $A(3,-2)$; calcolare la sua ascissa. $\left[\frac{3}{2}\right]$

57. Un triangolo ABC ha per vertici i seguenti punti

$A(-1,-1)$, $B(1,4)$, $C(3,1)$

scrivere le equazioni dei lati e delle mediane.

58. Ripetere l'esercizio 57, a partire dal triangolo ABC che ha per vertici i punti seguenti:

$A(-1,2)$, $B(4,3)$, $C(1,-3)$

59. Scrivere le equazioni dei lati di un triangolo equilatero con il lato lungo 2, sapendo che due suoi vertici sono i punti $O(0,0)$ ed $A(2,0)$.

60. Ripetere l'esercizio 59, sapendo che il lato del triangolo è lungo 4 e due suoi vertici sono i punti $O(0,0)$ e $B(0,4)$.

Equazione parametrica della retta

61. Considerare un punto materiale che si muove su un piano, a partire dalla posizione $O(0,0)$, ed è animato dai seguenti movimenti simultanei:

– lungo l'asse delle x un moto con velocità costante v, data da $v=2\text{m/s}$;

– lungo l'asse delle y un moto con velocità costante w, data da $w=5$m/s.

Determinare la traiettoria del punto materiale.
(Cominciare con lo scrivere la legge oraria dei moti lungo gli assi; si ha:

$$(1)\qquad \begin{array}{l} x=2t \\ y=5t, \end{array}$$

dove

x *indica lo spostamento lungo l'asse delle x, misurato in metri, a partire da O;*
y *indica lo spostamento lungo l'asse delle y, misurato in metri, a partire da O;*
t *indica il tempo, misurato in secondi.*

Per avere la traiettoria, cioè "la scia" lasciata dal punto durante il movimento, basta eliminare il tempo t dalle equazioni (1). Ricaviamo dunque t dalla prima equazione; si ha:

$$t=\frac{x}{2}$$

Sostituendo poi l'espressione ottenuta nella seconda equazione, si ottiene:

$$y=\frac{5}{2}x$$

È immediato riconoscere che la traiettoria è una retta.
Come è legata la pendenza della traiettoria alla velocità dei due moti componenti?)

62. Ripetere l'esercizio 61 in un caso più generale, indicando con v la velocità del moto lungo l'asse delle x e con w la velocità lungo l'asse delle y.

63. Ripetere l'esercizio 61 in un caso ancora più generale, in cui il punto materiale inizia il movimento dalla posizione $P(a,b)$ e si muove sempre con le velocità v e w, indicate nell'esercizio 62.
Riflettendo sullo svolgimento dell'esercizio 63, si arriva a concludere che se un punto materiale è animato da due moti rettilinei uniformi nella direzione degli assi cartesiani percorre sempre una retta.
L'equazione della retta può essere data nella forma seguente:

$$(2)\qquad \begin{array}{l} x=vt+a \\ y=wt+b \end{array}$$

Le equazioni ora scritte, che prendono il nome di equazioni parametriche della retta, *esprimono per mezzo del parametro t (il tempo) le coordinate x e y di un punto P che percorre la retta.*
A partire dalle (2) è facile ottenere l'equazione cartesiana della retta, ricavando t dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda.

La circonferenza

Dal grafico di una circonferenza alla sua equazione

Gli esercizi dal 64 all'81 chiedono di scrivere l'equazione di circonferenze, di cui sono dati il centro $C(p,q)$ e la lunghezza r del raggio.

In tal caso è opportuno ricordare che l'equazione assume sempre la forma seguente

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

Svolgendo i calcoli indicati, si arriva a scrivere l'equazione nella forma

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

Scrivere le equazioni delle circonferenze, di cui è assegnato il centro C ed il raggio r negli esercizi dal 64 al 74, dopo averne tracciato il grafico.

64. $C(1,4)$ e $r=3$; $C(-1,4)$ e $r=3$; $C(1,-4)$ e $r=3$; $C(-1,-4)$ e $r=3$; $C(4,1)$ e $r=3$

65. $C(5,3)$ e $r=6$; $C(-5,3)$ e $r=6$; $C(5,-3)$ e $r=6$; $C(-5,-3)$ e $r=6$; $C(3,5)$ e $r=6$

66. $C(0,0)$ e $r=1$; $C(0,0)$ e $r=3$; $C(0,0)$ e $r=4$; $C(0,0)$ e $r=\sqrt{2}$; $C(0,0)$ e $r=\sqrt{10}$
Quale forma assume l'equazione di una circonferenza di centro $C(0,0)$?

67. $C(-3,0)$ e $r=1$; $C(2,0)$ e $r=3$; $C(-5,0)$ e $r=4$; $C(1,0)$ e $r=\sqrt{2}$; $C(\sqrt{2},0)$ e $r=1$
Quale forma assume l'equazione di una circonferenza che ha il centro C sull'asse delle x?

68. $C(0,1)$ e $r=6$; $C(0,-4)$ e $r=1$; $C(0,10)$ e $r=3$; $C(0,-7)$ e $r=5$; $C(0,\sqrt{7})$ e $r=5$
Quale forma assume l'equazione di una circonferenza con il centro C sull'asse delle y?

69. $C(1,2)$ e $r=\sqrt{5}$; $C(3,4)$ e $r=5$; $C(1,1)$ e $r=\sqrt{2}$; $C(-2,1)$ e $r=\sqrt{5}$; $C(4,-3)$ e $r=5$
Tutte le circonferenze assegnate passano per l'origine $O(0,0)$; perché?
Quale caratteristica presentano le corrispondenti equazioni?

70. $C(-3,4)$ e $r=3$; $C(3,1)$ e $r=3$; $C(-2,-1)$ e $r=2$; $C(2,3)$ e $r=2$; $C(\sqrt{2},1)$ e $r=\sqrt{2}$
Tutte le circonferenze assegnate sono tangenti all'asse delle y; perché?
Quale caratteristica presentano le corrispondenti equazioni?

71. $C(5,-9)$ e $r=9$; $C(-4,9)$ e $r=9$; $C(-7,1)$ e $r=1$; $C(6,1)$ e $r=1$; $C(2,\sqrt{3})$ e $r=\sqrt{3}$
Tutte le circonferenze assegnate sono tangenti all'asse delle x; perché?
Quale caratteristica presentano le corrispondenti equazioni?

72. $C(-1,0)$ e $r=1$; $C(3,0)$ e $r=3$; $C(-5,0)$ e $r=5$; $C(9,0)$ e $r=9$; $C(-\sqrt{5},0)$ e $r=\sqrt{5}$
Quali caratteristiche presentano tutte le circonferenze assegnate?
Quali caratteristiche presentano le corrispondenti equazioni?

73. $C(0,6)$ e $r=6$; $C(0,-8)$ e $r=8$; $C(0,7)$ e $r=7$; $C(0,-2)$ e $r=2$; $C(0,\sqrt{3})$ e $r=\sqrt{3}$
Quali caratteristiche presentano tutte le circonferenze assegnate?
Quali caratteristiche presentano le corrispondenti equazioni?

74. $C\left(\frac{7}{3},0\right)$ e $r=\frac{8}{3}$; $C\left(0,-\frac{8}{5}\right)$ e $r=\frac{6}{5}$; $C\left(-1,\frac{9}{8}\right)$ e $r=\frac{13}{8}$; $C(-3,-2)$ e $r=\frac{49}{5}$

Scrivere tutte le equazioni ottenute in una forma in cui appaiono solo coefficienti interi, moltiplicandone i due membri per un numero opportuno.
Quale forma assume ora l'equazione di tutte le circonferenze?

75. Scrivere l'equazione generale di una circonferenza con il centro $O(0,0)$, spiegando il ragionamento seguito.

76. Scrivere l'equazione generale di una circonferenza con il centro C sull'asse delle x, spiegando il ragionamento seguito.

77. Scrivere l'equazione generale di una circonferenza con il centro C sull'asse delle y, spiegando il ragionamento seguito.

78. Scrivere l'equazione generale di una circonferenza tangente all'asse delle x, spiegando il ragionamento seguito.

79. Scrivere l'equazione generale di una circonferenza tangente all'asse delle y, spiegando il ragionamento seguito.

80. Scrivere l'equazione generale di una circonferenza tangente agli assi cartesiani, spiegando il ragionamento seguito.

81. Scrivere l'equazione generale di una circonferenza passante per $O(0,0)$, spiegando il ragionamento seguito.

Dall'equazione della circonferenza al grafico

Gli esercizi dall'82 al 91 chiedono di tracciare il grafico di circonferenze, di cui è data l'equazione.

Per svolgere gli esercizi è opportuno ricordare che l'equazione di una circonferenza si presenta *sempre nella forma seguente:*

(1) $x^2+y^2+ax+by+c=0$

Per disegnare la curva occorre determinare le coordinate (p,q) del centro C e la lunghezza r del raggio, che sono date dalle seguenti relazioni

(2) $p=-\frac{a}{2}, \quad q=-\frac{b}{2}, \quad r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$

Disegnare le circonferenze, di cui sono assegnate le equazioni negli esercizi dall'82 all'89.

82. $x^2+y^2-6x-4y+12=0$; $x^2+y^2-4x-6y+12=0$; $x^2+y^2-2x-4y+2=0$; $x^2+y^2-4x-2y+2=0$

83. $x^2+y^2-3x-4y=0$; $x^2+y^2+3x-4y=0$; $x^2+y^2+4x+3y=0$; $x^2+y^2-4x+3y=0$

84. $x^2+y^2-8x+12=0$; $x^2+y^2-10y+16=0$; $x^2+y^2+12x+20=0$; $x^2+y^2-16=0$

85. $x^2+y^2-4x=0$; $x^2+y^2+2x=0$; $x^2+y^2-14y=0$; $x^2+y^2+20y=0$

86. $x^2+y^2-x-3y+1=0$; $x^2+y^2+5x-7y+14=0$; $x^2+y^2-\sqrt{8}x+\sqrt{2}y+2=0$

87. $x^2+y^2-x+3y=0$; $x^2+y^2-12=0$; $x^2+y^2+11y+30=0$; $4x^2+4y^2-24x+16y+27=0$

(Prestare particolare attenzione all'ultima equazione assegnata: per valersi delle relazioni (2), occorre che l'equazione della circonferenza sia scritta nella forma (1), Perciò, prima *di determinare il centro e il raggio dell'ultima circonferenza, occorre dividere i due membri dell'equazione per 4, in modo da ottenerne l'equazione nella forma (1)).*

88. $4x^2+4y^2-4x+8y-11=0$; $3x^2+3y^2+5x-7y-18=0$; $2x^2+2y^2+9x+9y-36=0$

(Tenere presente l'avvertenza esposta nell'esercizio 87).

89. $9x^2+9y^2-1=0$; $5x^2+5y^2+20x-30y+16=0$; $\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}y^2-4x=0$

(Tenere presente l'avvertenza esposta nell'esercizio 87).

90. Fra le seguenti equazioni scegliere quelle che rappresentano una circonferenza, motivando la scelta e disegnando il corrispondente grafico.

$4x^2+y^2-4x+8y=0$; $4x^2+4y^2-11=0$; $x^2-y^2-4x-6y+9=0$; $x^2+y^2-x+9y+2=0$

91. Ripetere l'esercizio 90 a partire dalle seguenti equazioni.

$x^2+y^2-4xy=0$; $x^2+2y^2+6x=0$; $8x^2-8y^2+8y-16=0$; $4x^2+4y^2-36=0$

92. Un'equazione del tipo

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

ha sempre come grafico una circonferenza, qualunque siano i valori delle lettere a, b, c? Se no, indicare quali sono i casi in cui non si riesce a tracciare il grafico corrispondente all'equazione assegnata.

93. Scegliere fra le seguenti circonferenze quelle che passano per $A(0,-2)$, motivando la scelta:

$x^2+y^2+4x-2y-8=0$; $x^2+y^2+2x-4y=0$; $x^2+y^2+2y=0$; $x^2+y^2-4=0$

(Ricordare che l'equazione rappresenta la condizione perché un punto P(x,y) possa muoversi sulla circonferenza; per esempio il punto P che si muove sulla prima circonferenza, può assumere la posizione A, solo se risulta

$0^2+(-2)^2+4\cdot 0-2(-2)-8=0\ldots)$

94. Ripetere l'esercizio 93 a partire dal punto $B(-1,3)$ e dalle seguenti equazioni:

$x^2+y^2+10x=0$; $x^2+y^2-3y-1=0$; $x^2+y^2-9=0$; $x^2+y^2+2x-9=0$

Nel caso delle circonferenze che non passano per il punto B, completare l'esercizio nel modo seguente:

- dire se B cade all'interno o all'esterno della circonferenza;
- modificare il termine noto c dell'equazione (lasciando gli altri inalterati), in modo che la circonferenza passi per il punto;
- modificare il coefficiente a dell'equazione (lasciando gli altri inalterati), in modo che la circonferenza passi per il punto;
- modificare il coefficiente b dell'equazione (lasciando gli altri inalterati), in modo che la circonferenza passi per il punto.

95. Scegliere fra i punti seguenti quelli che appartengono alla circonferenza d'equazione $x^2+y^2+6x-10y+9=0$;

$$A(1,2);\quad B(0,-1);\quad C(8,0);\quad D(0,1);\quad E(-3,2)$$

96. Ripetere l'esercizio 95 a partire dall'equazione $x^2+y^2-4x-5y+4=0$ e dai seguenti punti:

$$A(2,0);\quad B(4,-1);\quad C(0,1);\quad D(3,-5);\quad E\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$$

Nel caso dei punti che non appartengono alla circonferenza, completare l'esercizio nel modo seguente:

- dire se il punto risulta interno o esterno alla circonferenza;
- modificare l'ascissa del punto (lasciando inalterata l'ordinata), in modo da ottenere un punto che appartiene alla circonferenza;
- modificare l'ordinata del punto (lasciando inalterata l'ascissa), in modo da ottenere un punto che appartiene alla circonferenza.

Esercizi vari sulla circonferenza e la sua equazione

Nei seguenti esercizi è richiesta anche la conoscenza della lunghezza della circonferenza e dell'area del cerchio (cap. 5).

97. Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $O(0,0)$ e passante per $A(-3,4)$.
Determinare la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio così determinato.
(Il raggio r è dato dalla distanza $\overline{OA}$ ..)

98. Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C(-5,4)$ e passante per $O(0,0)$.
Determinare la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio così determinato.

99. Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C(3,-5)$ e passante per $A(6,-10)$.
La circonferenza passa per $O(0,0)$?
Determinare la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio così determinato.

100. Scrivere l'equazione delle seguenti circonferenze:

- centro $C(-7,-3)$ e tangente all'asse delle x;
- centro $C(-7,-3)$ e tangente all'asse delle y;

Determinare la lunghezza delle circonferenze e l'area dei cerchi così determinati.

101. Scrivere le equazioni delle seguenti circonferenze:

- centro $C(-4,4)$ e tangente agli assi cartesiani,
- centro $C(6,-6)$ e tangente agli assi cartesiani,
- centro $C(-3,-3)$ e tangente agli assi cartesiani.

Determinare la lunghezza delle circonferenze e l'area dei cerchi così determinati.

102. Scrivere l'equazione della circonferenza che ha per diametro il segmento di estremi $A(0,4)$ e $B(-6,0)$.
(Il centro C sarà il punto medio del segmento e il raggio sarà dato dalla distanza $\overline{AC}=\overline{CB}$, ...).
Determinare la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio così determinato.

103. Ripetere l'esercizio 102 a partire dal segmento di estremi $A(-3,7)$ e $B(1,5)$.

104. Ripetere l'esercizio 102 a partire dal segmento di estremi $A(-1,3)$ e $B(-9,-3)$.
Quali caratteristiche particolari presenta la circonferenza ottenuta?

105. Ripetere l'esercizio 102 a partire dal segmento di estremi $A(1,2)$ e $B(-1,3)$.
Quali caratteristiche particolari presenta la circonferenza ottenuta?

106. Scrivere le equazioni delle circonferenze che sono tangenti all'asse delle x nel punto $P(4,0)$ ed hanno raggio $r=3$.
Quante sono le circonferenze?

107. Scrivere le equazioni delle circonferenze che sono tangenti all'asse delle y nel punto $T(0,-1)$ ed hanno raggio $r=5$.
Quante sono le circonferenze?

108. Scrivere le equazioni delle circonferenze che hanno raggio $r=2$ e sono tangenti agli assi cartesiani. Quante sono le circonferenze?

109. Scrivere l'equazione della circonferenza che ha come diametro il segmento di estremi $A(-1,-3)$ e $B(5,-1)$.
Indicato con C il centro della circonferenza, scrivere l'equazione delle due circonferenze che hanno come diametro AC e CB.
Determinare la lunghezza della circonferenza grande e delle circonferenze piccole. Che cosa si osserva?
Calcolare l'area del cerchio grande e dei due cerchi piccoli.
Quanto vale l'area delle due zone del cerchio grande che "non sono occupate" dai cerchi piccoli?

110. È dato il triangolo ABC, che ha per vertici i seguenti punti:

$$A(3,2),\quad B(2,5),\quad C(-4,3)$$

Scrivere le equazioni delle circonferenze che hanno come diametri AB, AC, BC.
Calcolare l'area dei tre semicerchi che risultano esterni al triangolo; si trova che l'area del semicerchio costruito su AC è uguale alla somma delle aree dei semicerchi costruiti su AB e BC; come si può spiegare questa proprietà?

112. È dato il quadrato $ABCD$, che ha per vertici i seguenti punti:

$$A(-2,-1),\quad B(0,2),\quad C(3,9),\quad D(1,-3)$$

Scrivere le equazioni delle circonferenze che hanno per diametro i lati del quadrato e calcolare la somma delle aree dei quattro semicerchi che risultano esterni al quadrato.

Visualizzare leggi matematiche sul piano cartesiano

Proporzionalità diretta. Legge lineare

113. Se un punto materiale percorre una traiettoria rettilinea con velocità costante, la legge che regola il movimento (legge oraria) è:

$$s=vt,$$

dove:

s è la distanza percorsa, a partire dal punto O,
v è la velocità costante,
t è il tempo che trascorre.

Se si rappresenta questa legge su un piano cartesiano, riportando sull'asse delle ascisse i tempi t e sull'asse delle ordinate le distanze s, si ottiene una retta passante per O.
Quale significato fisico assume la pendenza della retta?

114. A partire dalle nozioni richiamate nell'esercizio precedente, risolvere il seguente problema sulla circolazione di automobili.
In alcune città si trovano lunghi viali, attraversati ad intervalli regolari da strade minori. In ogni incrocio si trovano dei semafori e spesso si pone il problema di regolare i semafori in modo da avere "l'onda verde": si tratta di dare alle auto la possibilità di attraversare tutti gli incroci del viale, trovando sempre il semaforo verde.
Ecco un esempio numerico da esaminare.
Il viale presenta un incrocio ogni 200 metri; si è rilevato che le auto procedono ad una velocità media di 36 km/h e il ciclo dei semafori è il seguente:

- 25 secondi di verde
- 5 secondi di giallo
- 30 secondi di rosso.

Abbiamo rappresentato graficamente la situazione in fig. 1: i grossi tratti orizzontali rappresentano gli intervalli di tempo durante i quali i semafori sono verdi; la retta in colore è il grafico della legge oraria di un'automobile che percorre il viale alla velocità costante di 36 km/h=10 m/s.

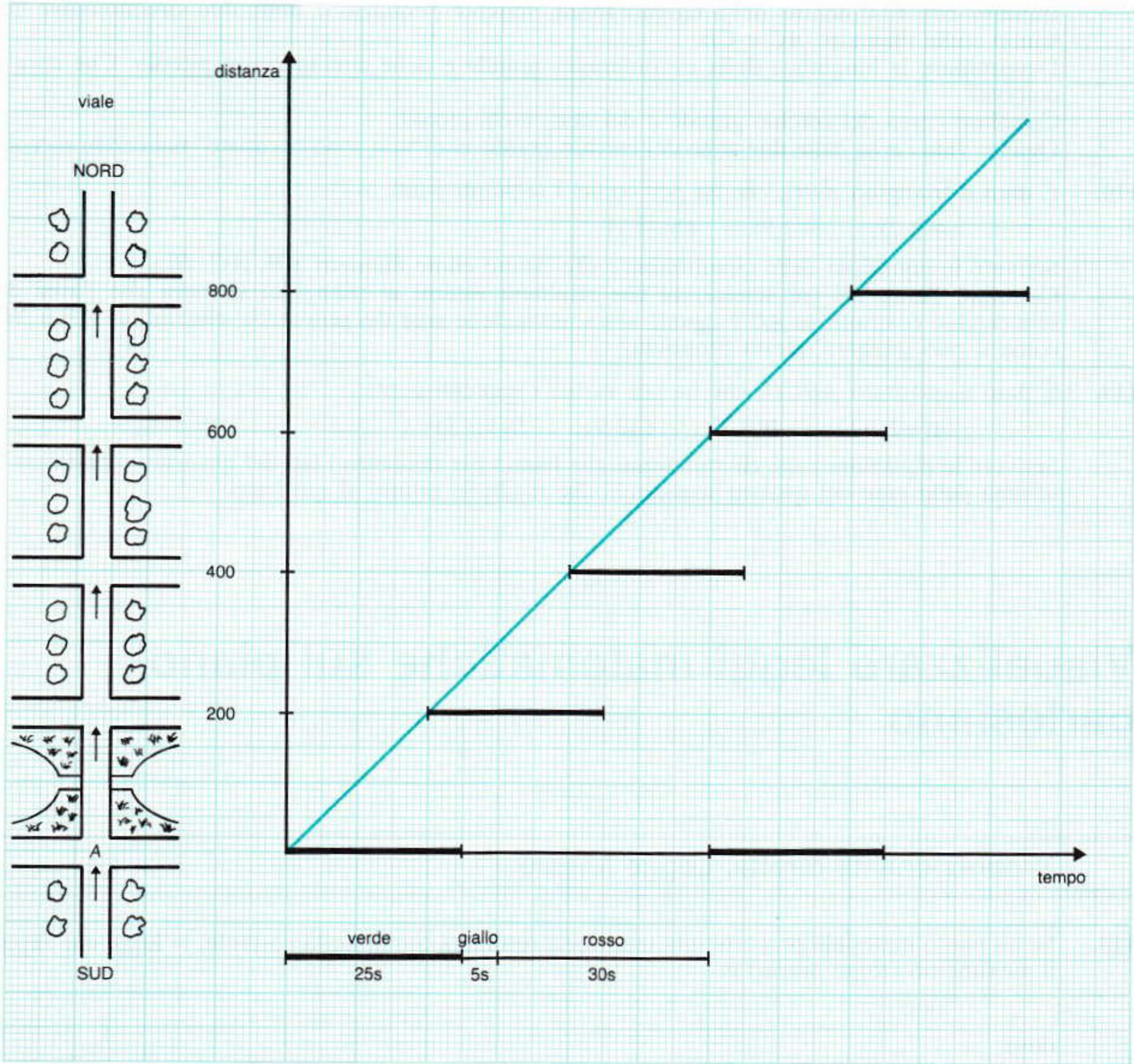


Fig. 1

Un'auto percorre il viale nel senso Sud-Nord, a partire dall'incrocio A; come debbono essere regolati i semafori seguenti perché l'auto trovi "l'onda verde"?
Rappresentare questo modo di regolare i semafori su un grafico, come quello di fig. 1.

115. I semafori del viale di fig. 1 sono regolati come stabilito nell'esercizio 114. A quale velocità debbono procedere i veicoli che percorrono il viale da Nord verso Sud per trovare "l'onda verde"?

116. Se un punto materiale procede con accelerazione costante su una traiettoria rettilinea, la sua velocità varia al variare del tempo t secondo la legge seguente:

(1) $v=at,$

dove

v indica la velocità istantanea del punto materiale,
a indica l'accelerazione costante,
t indica il tempo.

Se si rappresenta questa legge su un piano cartesiano, riportando sull'asse delle ascisse i tempi t e sull'asse delle ordinate le velocità v, si ottiene una retta passante per O.
Quale significato fisico assume la pendenza della retta?

117. Se il punto materiale dell'esercizio precedente procede con velocità v_0, quando cominciamo a misurare il tempo la legge che regola la velocità al variare del tempo diventa

$$v=v_0+at.$$

Se si rappresenta questa legge su un piano cartesiano, riportando sull'asse delle ascisse i tempi t e sull'asse delle ordinate le velocità v, si ottiene una retta passante per $A(0,v_0)$.
In tal caso, v e t sono direttamente proporzionali?
Quale significato fisico assume una pendenza negativa della retta?
Nel caso in cui la retta presenta una pendenza negativa, indicare dopo quanto tempo il corpo si ferma.
Esaminare il seguente caso numerico: $v_0=10$ m/s e $a=-5$ m/s^2.

118. Un treno che viaggia alla velocità di 80 km/h può essere fermato per azione dei freni in 15 secondi. Calcolare l'accelerazione a (negativa) impressa dai freni, supponendo che a si mantenga costante in tutta la fase di rallentamento.

119. In base al *secondo principio della dinamica*, una forza f costante imprime ad un corpo un'accelerazione a, che è direttamente proporzionale all'intensità della forza; risulta dunque

$$f=ma,$$

dove m indica *la massa inerziale* del corpo.
Se si rappresenta questa legge su un piano cartesiano, riportando sull'asse delle ascisse le accelerazioni a e sull'asse delle ordinate le forze f, si ottiene una retta passante per O.
Quale significato assume la pendenza della retta?

120. Ci si vale del secondo principio della dinamica, di cui si parla nell'esercizio precedente, in particolare, nel caso in cui la forza applicata al corpo sia il peso p; in tal caso l'accelerazione indica l'accelerazione di gravità g.
Indicare (in Newton) il peso di un uomo, che ha una massa $m=80$ kg, nelle seguenti situazioni:

- sulla Terra, dove si ha $g=9{,}8$ m/s^2
- sulla Luna, dove si ha $g=1{,}6$ m/s^2;
- su Giove, dove si ha $g=24$ m/s^2.

121. La massa m di un corpo e il volume V che il corpo occupa sono legati dalla legge

$$m=\partial V,$$

dove ∂ indica la densità della sostanza.
Se si rappresenta questa legge su un piano cartesiano, riportando sull'asse delle ascisse i volumi V e sull'asse delle ordinate le masse m, si ottiene una retta passante per O.
Quale significato fisico assume la pendenza della retta?

122. Basarsi sulla legge esposta nell'esercizio precedente. Sapendo che la densità del mercurio è di 13.590 kg/m^3, quale volume occupa 1 kg di mercurio?
E quale volume occupa 1 kg d'acqua (densità 1000 kg/m^3)?

123. La celebre equazione

$$E=mc^2,$$

stabilita da Einstein, permette di prevedere l'energia E che si ricava disintegrando una data massa m; c indica la velocità della luce, data da

$$c\cong 300.000 \text{ km/s}.$$

Quali grandezze sono legate da una legge di proporzionalità diretta?
Rappresentare la legge su un piano cartesiano, riportando sull'asse delle ascisse la massa m e sull'asse delle ordinate l'energia E.
Una stima approssimata conduce a valutare che l'umanità consuma ogni anno un'energia E, data da circa 10^{18} Joule. Quale massa bisognerebbe disintegrare per ottenere quest'energia?

Legge parabolica

124. Nella sua opera *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze...*, Galileo descrive i suoi esperimenti sulla caduta di un grave lungo un piano inclinato ed enuncia così la sua scoperta: "Per esperienze ben cento volte replicate sempre si incontrava gli spazi percorsi esser tra loro come i quadrati dei tempi, e questo in tutte le inclinazioni del piano, ...".
Eseguendo un esperimento analogo, si trova che un oggetto percorre lungo un dato piano inclinato, una distanza di 1 metro durante 1 secondo.
Scrivere la legge che lega la distanza s al tempo t e disegnare il grafico della legge su un piano cartesiano, rappresentando i tempi t sull'asse delle ascisse e le distanze s sull'asse delle ordinate.
Quanto tempo impiegherà il corpo a percorrere lungo il piano una distanza di 3 metri?

125. Riportiamo qualche frase da una lettera di Vincenzo Viviani, amico e discepolo di Galileo: "Trovavasi Galileo in età di venti anni circa, intorno all'anno 1583, nella città di Pisa...; essendo un giorno nel duomo di quella città, ... caddegli in mente d'osservare dal moto di una lampada, che era stata allontanata dal perpendicolo, se per avventura i tempi delle andate e tornate di quella fossero uguali, tanto per archi grandi che per archi minimi...".
Queste osservazioni, fatte misurando il tempo con il battito del polso, mostrarono a Galileo che le oscillazioni di uno stesso pendolo hanno all'incirca la stessa durata.
Studi successivi hanno dimostrato che vale per un pendolo la seguente legge:

$$l=0{,}25\ T^2,$$

dove

l indica la lunghezza del pendolo (misurata in metri),
T indica la durata di un'oscillazione completa (misurata in secondi).

Rappresentare la legge su un piano cartesiano, riportando sull'asse delle ascisse T e sull'asse delle ordinate le lunghezze l.
Quale lunghezza deve avere un pendolo per battere i secondi?

126. L'energia cinetica E_c di un corpo è data da

$$(1) \qquad E_c=\frac{1}{2}mv^2,$$

dove m indica la massa del corpo e v la sua velocità.
Considerare un corpo che ha massa $m=2$ kg e tracciare il grafico della legge (1), rappresentando sull'asse delle ascisse la velocità v e sull'asse delle ordinate l'energia cinetica E_c.
Quale velocità bisogna imprimere al corpo perché abbia un'energia cinetica di 10 Joule?

127. Lo spazio di frenata s di un'automobile è proporzionale al quadrato della velocità v.
Eseguendo una prova di frenata, si trova che un'auto riesce a fermarsi in 8 metri, quando viaggia ad una velocità di 40 km/h.
Qual'è la legge che lega s a v, nel caso dell'auto esaminata?
Rappresentare la legge su un piano cartesiano, riportando sull'asse delle ascisse le velocità v e sull'asse delle ordinate gli spazi di frenata s.
La stessa auto, durante un incidente, riesce a fermarsi in 24,5 m; qual'era la velocità a cui procedeva l'auto?

128. La forza F esercitata dal vento su una pala di un generatore eolico è proporzionale al quadrato della velocità v del vento e all'area A della pala.
Considerando una pala che abbia un'area di 1 m^2, scrivere la legge che lega F a v e rappresentarla su un piano cartesiano, riportando sull'asse delle ascisse la velocità e sull'asse delle ordinate le relative forze.
Quale deve essere la velocità del vento per avere una forza di 20 Newton?

Legge iperbolica e proporzionalità inversa

129. In un recipiente chiuso da uno stantuffo è contenuta dell'aria che occupa un volume di 5 litri, quando si trova alla pressione di 2 atmosfere. Se si comprime il gas, il suo volume V (misurato in litri) e la sua pressione p (misurata in atmosfere) saranno legati dalla legge di Boyle e Mariotte, cioè

pV=costante.

Calcolare il valore della costante nel caso esaminato e rappresentare la legge ottenuta su un piano cartesiano, riportando sull'asse delle ascisse diversi valori della pressione e sull'asse delle ordinate i corrispondenti valori del volume.

130. Una radio ha la scala di sintonia graduata sia in metri che in chilocicli: la misura in metri si riferisce alla lunghezza d'onda λ della trasmissione, mentre la misura in chilocicli si riferisce alla frequenza f della stessa trasmissione.
Su una parte della scala si legge:

λ	300	500	600	1500
f	1000	600	500	200

Si chiede:
λ ed f sono inversamente proporzionali?
Scrivere la legge che lega λ ad f e tracciarne il grafico su un riferimento cartesiano, riportando sull'asse delle ascisse la frequenza f e sull'asse delle ordinate la lunghezza d'onda λ.

131. Nella descrizione ondulatoria della luce, si dice che il colore è determinato dalla lunghezza d'onda λ; d'altra parte la lunghezza d'onda λ e la frequenza f di un'onda periodica sono sempre legate dalla relazione

$$\lambda f = v, \qquad (2)$$

dove v indica la velocità di propagazione dell'onda.
Nel caso della luce, risulta dunque

$$v = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Rappresentare su un piano cartesiano la legge (2), riportando sull'asse delle ascisse le lunghezze d'onda e sull'asse delle ordinate le frequenze.
Indicare le frequenze dei colori, di cui è data la lunghezza d'onda (misurata in metri), nella seguente tabella:

Colore	violetto	azzurro	verde	giallo	arancione	rosso
λ	$4 \cdot 10^{-7}$	$4{,}5 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$5{,}7 \cdot 10^{-7}$	$5{,}9 \cdot 10^{-7}$	$6{,}1 \cdot 10^{-7}$

132. La corrente consumata da una lampadina è regolata dalla seguente legge:
$IV = W$,
dove

I è la corrente consumata (misurata in Ampère),
V è la tensione di rete (misurata in Volt),
W è la potenza della lampadina (misurata in Watt).

Tracciare il grafico della legge, relativa ad una lampadina da $100W$.
Indicare la corrente consumata in corrispondenza ai seguenti valori di V:

$$V = 125 \text{ e } V = 220$$

133. Un classico esperimento relativo ai circuiti elettrici consiste nel collegare un conduttore di resistenza variabile ad una sorgente di tensione costante.
Misurando la corrente che attraversa il conduttore al variare della resistenza, si trova la legge:

$$V = RI,$$

dove

V è la tensione applicata al filo (misurata in Volt),
R è la resistenza del conduttore (misurata in Ohm),
I è l'intensità della corrente (misurata in Ampère).

Rappresentare la legge su un piano cartesiano, riportando sull'asse delle ascisse la resistenza e sull'asse delle ordinate l'intensità di corrente, considerando il caso in cui risulti

$$V = 10 \text{ Volt}$$

134. La legge di gravitazione universale stabilisce che due corpi di massa m e M (misurata in chilogrammi) si attraggono con una forza, che è diretta lungo la congiungente i centri delle due masse ed ha un'intensità F (misurata in Newton) data da

$$F = G \frac{Mm}{d^2}$$

dove

d indica la distanza fra i centri delle due masse (misurata in metri),

$G=6\cdot 10^{-11}\frac{N\ m^2}{kg^2}$

Si chiede:
La forza F è inversamente proporzionale alla distanza d?
Calcolare la forza di attrazione fra la Terra ed il Sole, ricordando che si ha:
M=massa del Sole$=2\cdot 10^{30}$ kg
m=massa della Terra$=6\cdot 10^{24}$ kg
d=raggio dell'orbita terrestre$=1{,}5\cdot 10^{11}$ m

Funzioni e grafici

Tracciare il grafico delle funzioni assegnate negli esercizi dal 135 al 142, dove A indica il dominio e B il codominio della funzione.

135. A: l'insieme dei reali, B: l'insieme dei reali, $y=2x$;
A: l'insieme degli interi, B: l'insieme degli interi, $y=2x$
Sul secondo grafico si può trovare un punto con l'ordinata che vale 1?

136. A: l'insieme dei reali positivi, B: l'insieme dei reali, $y=2x$;
A: l'insieme dei reali negativi, B: l'insieme dei reali, $y=2x$
I due grafici sono crescenti o decrescenti?

137. A: l'insieme dei reali, B: l'insieme dei reali, $y=x^2$;
A: l'insieme dei razionali, B: l'insieme dei razionali, $y=x^2$
Sul secondo grafico si può trovare un punto con l'ordinata che vale 2?

138. A: l'insieme dei reali positivi, B: l'insieme dei reali, $y=x^2$;
A: l'insieme dei reali negativi, B: l'insieme dei reali, $y=x^2$
Quale dei due grafici è crescente e quale decrescente?

139. A: l'insieme dei reali escluso 0, B: l'insieme dei reali, $y=\frac{1}{x}$;
A: l'insieme degli interi escluso 0, B: l'insieme dei razionali, $y=\frac{1}{x}$
Sulla seconda curva si possono trovare punti con l'ordinata più grande di 1?

140. A: l'insieme dei reali positivi, B: l'insieme dei reali, $y=\frac{1}{x}$;
A: l'insieme dei reali negativi, B: l'insieme dei reali, $y=\frac{1}{x}$
Quale delle due curve è crescente e quale decrescente?

141. Scrivere le due funzioni che descrivono la circonferenza di centro $C(1,0)$ e raggio $r=1$

142. Scrivere le due funzioni che descrivono la circonferenza di centro $C(-2,0)$ e raggio $r=3$

1. Parte terza
Esercizi

Trasformazioni affini

Trasformare poligoni

Gli esercizi dall'1 al 20, conducono ad impadronirsi delle trasformazioni affini, operando sulle coordinate dei vertici di poligoni ed esaminando i poligoni trasformati.

Per svolgere gli esercizi è opportuno ricordare che le trasformazioni affini di cui si parla nel testo sono del tipo seguente:

– *stiramenti lungo l'asse delle x, descritti dalle equazioni*

$$x'=mx, \qquad y'=y;$$

si ha una dilatazione se risulta $m>1$, oppure una compressione, se risulta $0<m<1$.

– *stiramenti lungo l'asse delle y, descritti dalle equazioni*

$$x'=x, \qquad y'=ny;$$

si ha una dilatazione se risulta $n>1$, oppure una compressione, se risulta $0<n<1$.

– *stiramenti lungo entrambi gli assi, descritti dalle equazioni*

$$x'=mx, \qquad y'=ny$$

1. Disegnare il triangolo che ha per vertici i punti seguenti:

$$A(-1,2), \qquad B(-2,5), \qquad C\left(-5,\frac{2}{3}\right);$$

verificare che il triangolo è rettangolo.
Operare con un'affinità d'equazioni

$$x'=2x, \qquad y'=y$$

cioè con l'affinità che raddoppia le ascisse, lasciando inalterate le ordinate.
Determinare le coordinate dei punti A', B', C', vertici del triangolo trasformato di ABC.
Il triangolo $A'B'C'$ è rettangolo?

2. Ripetere l'esercizio 1, operando con l'affinità d'equazioni

$$x'=x, \qquad y'=2y$$

cioè con l'affinità che raddoppia le ordinate, lasciando fisse le ascisse.

3. Ripetere l'esercizio 1, operando con la similitudine d'equazioni

$$x'=2x, \qquad y'=2y$$

cioè con l'affinità che raddoppia sia le ascisse che le ordinate.

4. Disegnare il triangolo che ha per vertici i punti seguenti:

$$A(-1,-1), \qquad B(1,1), \qquad C(-\sqrt{3},\sqrt{3})$$

verificare che il triangolo è equilatero.
Operare con l'affinità d'equazioni

$$x'=3x, \qquad y'=y$$

Determinare le coordinate dei punti A', B', C', vertici del triangolo trasformato di ABC.
Il triangolo $A'B'C'$ è anch'esso equilatero?

5. Ripetere l'esercizio 4, operando con l'affinità d'equazioni

$$x'=x, \quad y'=4y$$

6. Ripetere l'esercizio 4, operando con l'affinità d'equazioni

$$x'=3x, \quad y'=4y$$

7. Ripetere l'esercizio 4, operando con la similitudine d'equazioni

$$x'=3x, \quad y'=3y$$

8. Ripetere l'esercizio 4, operando con la similitudine d'equazioni

$$x'=4x, \quad y'=4y$$

9. Disegnare il quadrilatero che ha per vertici i punti seguenti:

$$A(0,6), \quad B(4,3), \quad C(-2,-5), \quad D(-6,-2)$$

verificare che il quadrilatero è un rettangolo.
Operare con l'affinità d'equazioni

$$x'=\frac{1}{3}x, \quad y'=4y$$

Determinare le coordinate dei punti A', B', C', D', vertici del quadrilatero trasformato di $ABCD$.
Il quadrilatero $A'B'C'D'$ è un rettangolo o è un parallelogramma?

10. Ripetere l'esercizio 9, operando con la similitudine d'equazioni

$$x'=\frac{1}{3}x, \quad y'=\frac{1}{3}y$$

11. Ripetere l'esercizio 9, operando con la similitudine d'equazioni

$$x'=4x, \quad y'=4y$$

12. Disegnare il quadrilatero che ha per vertici i punti seguenti:

$$A(-2,-1), \quad B(0,2), \quad C(3,0), \quad D(1,-3);$$

verificare che il quadrilatero è un quadrato.
Operare con l'affinità d'equazioni

$$x'=3x, \quad y'=\frac{1}{2}y$$

Determinare le coordinate dei punti A', B', C', D', vertici del quadrilatero trasformato di $ABCD$.
Il quadrilatero $A'B'C'D'$ è un rettangolo, un rombo o un parallelogramma?

13. Ripetere l'esercizio 12, operando con la similitudine d'equazioni

$$x'=3x, \quad y'=3y$$

14. Ripetere l'esercizio 12, operando con la similitudine d'equazioni

$$x'=\frac{1}{2}x, \quad y'=\frac{1}{2}y$$

Gli esercizi dal 15 al 25 richiedono una più attenta riflessione sugli stiramenti lungo gli assi coordinati e portano anche a ricercare degli invarianti di queste trasformazioni (cioè le grandezze che rimangono inalterate).

Una trattazione più organica ed approfondita delle trasformazioni affini si trova in Matematica nella realtà, *vol. 2, cap. 2.*

15. Studiare "gli effetti dell'affinità sulle aree", operando l'affinità d'equazioni

$$x'=2x, \quad y'=3y$$

ed esaminando le seguenti figure:

- il quadrato che ha per vertici i punti $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(0,1)$,
- il parallelogramma che ha per vertici i punti $O(0,0)$, $A(1,0)$, $D(2,1)$, $B(1,1)$.

Calcolare, in ogni caso, l'area S della figura e l'area S' della figura trasformata; determinare il valore del rapporto $\frac{S'}{S}$.

Visualizzare il rapporto $\frac{S'}{S}$ individuando nella figura trasformata tanti poligoni uguali alla figura di partenza. Che cosa si osserva?

16. Ripetere l'esercizio 15 per studiare come cambiano le aree se si opera un'affinità d'equazioni

$$x'=mx, \qquad y'=ny$$

Quanto vale, in ogni caso, il rapporto $\frac{S'}{S}$?

(Si ritrova una proprietà caratteristica delle trasformazioni affini: il rapporto fra l'area S di una figura e l'area S' della figura trasformata vale mn).

17. Disegnare il triangolo rettangolo che ha per vertici i seguenti punti:

$$A(4,0), \qquad B(1,3), \qquad C(4,6).$$

Disegnare i quadrati sui tre lati e verificare che vale la proprietà pitagorica.
Operare l'affinità d'equazioni

$$x'=2x, \qquad y'=y$$

Il triangolo trasformato non è più rettangolo e i trasformati dei quadrati non saranno più dei quadrati; vale ancora la proprietà pitagorica?

18. Basarsi sui risultati ottenuti nell'esercizio 16 per determinare il valore del rapporto $\frac{S'}{S}$ quando si opera un'affinità d'equazioni

$$x'=mx, \qquad y'=\frac{1}{m}y$$

Con l'affinità ora indicata cambia la forma delle figure?
Cambia l'area delle figure?

19. Basarsi sui risultati nell'esercizio 16 per determinare il valore del rapporto $\frac{S'}{S}$ quando si opera la similitudine d'equazioni

$$x'=mx, \qquad y'=my$$

Con la similitudine cambia la forma delle figure? Cambia l'area?

20. Studiare "gli effetti di un'affinità sulle lunghezze", operando la trasformazione d'equazioni

$$x'=3x, \qquad y'=2y$$

ed esaminando il trapezio che ha per vertici i punti $A(-3,0)$, $B(3,0)$, $C(3,4)$, $D(0,4)$.
Determinare le coordinate dei vertici del quadrilatero $A'B'C'D'$, trasformato di $ABCD$.
Calcolare i seguenti rapporti:

$$\frac{AB}{DC} \text{ e } \frac{A'B'}{D'C'}, \qquad \frac{AD}{BC} \text{ e } \frac{A'D'}{B'C'}$$

Che cosa si osserva?

21. Ripetere l'esercizio 20, esaminando il trapezio, che ha per vertici i seguenti punti:

$$A(-2,0), \qquad B(3,0), \qquad C(4,1), \qquad D(0,2)$$

Quali sono i lati del trapezio che sono paralleli, cioè che hanno uguale pendenza?
In quale caso il rapporto fra i lati non cambia?
(Si ritrova una proprietà caratteristica dell'affinità: si mantengono inalterati solo i rapporti di segmenti che appartengono a rette parallele)

22. Operare con la similitudine d'equazioni

$$x'=2x, \qquad y'=2y$$

esaminando il trapezio proposto nell'esercizio 20; calcolare i rapporti proposti nello stesso esercizio.
Che cosa si osserva in questo caso?

23. Operare con la similitudine d'equazioni

$$x'=3x, \qquad y'=3y$$

esaminando il trapezio proposto nell'esercizio 21; calcolare i rapporti proposti nello stesso esercizio.
(Si ritrova una proprietà caratteristica della similitudine: si mantengono sempre inalterati i rapporti fra segmenti)

24. Rappresentare sul piano cartesiano i seguenti segmenti:

- AB, di estremi $A(0,1)$, $B(6,3)$
- CD, di estremi $C(2,4)$, $D(8,4)$

Determinare il punto medio M del segmento AB e il punto medio N del segmento CD e completare il grafico già tracciato, rappresentando anche M ed N.
Operare l'affinità d'equazioni

$$x'=4x, \qquad y'=3y$$

e determinare le coordinate dei punti A', B', M', C', D', N'.
M' ed N' sono ancora i punti medi dei segmenti $A'B'$ e $C'D'$?

25. Ripetere l'esercizio 24, più in generale, a partire dal segmento AB, di estremi $A(a,b)$ e $B(c,d)$, di cui M è il punto medio ed operando l'affinità d'equazioni

$$x'=mx, \qquad y'=ny$$

(Si ritrova una proprietà caratteristica delle affinità: si conserva il punto medio di un qualunque segmento AB, cioè il punto M', trasformato del punto M, divide il segmento A'B' in due parti uguali)

Trasformare curve

Gli esercizi dal 26 al 63 conducono a trasformare con stiramenti lungo gli assi coordinati le curve introdotte nella Parte seconda.

26. Disegnare sul piano cartesiano le rette r e s che hanno le equazioni seguenti:

$$r)\ \ y=3x, \qquad s)\ \ y=3x-2;$$

le due rette hanno la stessa pendenza, perciò sono parallele.
Operare l'affinità d'equazioni

$$x'=4x, \qquad y'=2y$$

e determinare l'equazione e il grafico delle rette trasformate r' e s'.
La trasformazione ha modificato la pendenza delle rette?
La trasformazione ha modificato il punto di intersezione di ciascuna retta con l'asse delle y?
Le rette r' e s' sono ancora parallele fra loro?

27. Ripetere l'esercizio 26 più in generale a partire dalle rette parallele r ed s che hanno le equazioni seguenti:

$$r)\ \ y=ax+b \quad \text{e} \quad s)\ \ y=ax+c$$

e dall'affinità d'equazioni

$$x'=mx, \qquad y'=ny$$

(Si ritrova una nota proprietà delle affinità: si conserva il parallelismo, cioè rette parallele si trasformano in rette parallele).

28. Determinare l'equazione dell'ellisse trasformata del cerchio d'equazione

$$x^2+y^2=1,$$

mediante l'affinità d'equazioni

$$x'=3x, \qquad y'=2y$$

Quanto sono lunghi i semiassi dell'ellisse?

29. Ripetere l'esercizio 28, operando l'affinità d'equazioni

$$x'=2x, \qquad y'=\frac{1}{2}y$$

30. Determinare l'equazione dell'ellisse trasformata del cerchio d'equazione

$$x^2+y^2=25$$

con l'affinità d'equazioni

$$x'=3x, \quad y'=y$$

Quanto sono lunghi ora i semiassi dell'ellisse?

31. Ripetere l'esercizio 30, operando con l'affinità d'equazioni

$$x'=x, \quad y'=\frac{1}{5}y$$

Per svolgere, in particolare, gli esercizi dal 32 al 36 è opportuno ricordare che un'equazione del tipo

$$(1) \qquad \frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$$

rappresenta un'ellisse con i semiassi lunghi m ed n. Il corrispondente grafico sarà del tipo di quello presentato nel paragrafo 2 del testo.

32. Riconoscere quali fra le seguenti equazioni rappresentano delle ellissi e tracciare il corrispondente grafico:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1, \quad \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1, \quad \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1, \quad 4x^2+25y^2=100, \quad x^2+4y^2=8$$

(Prestare particolare attenzione alle due ultime equazioni, che si possono scrivere nella forma (1), dividendone i due membri per il termine noto)

33. Ripetere l'esercizio 32 a partire dalle seguenti equazioni:

$$\frac{x^2}{16}+y^2=1, \quad x^2+8y=16, \quad 4x^2+16y^2=16, \quad x^2+4y^2=1, \quad 2x^2+3y^2=1$$

(Prestare particolare attenzione alle due ultime equazioni assegnate che sono sempre del tipo (1), dato che, per esempio, risulta

$$4y^2=\frac{y^2}{\frac{1}{4}}\ldots)$$

34. Ripetere l'esercizio 32 a partire dalle seguenti equazioni:

$$x^2+25y^2=25, \quad x^2+25y^2=1, \quad \frac{x^2}{25}-y^2=1, \quad 5x^2+10y^2=1, \quad 5x^2+10y^2=10$$

35. Disegnare le seguenti ellissi:

$$\frac{x^2}{16}+y^2=1 \quad \text{e} \quad x^2+16y^2=1$$

Quale affinità trasforma il cerchio d'equazione $x^2+y^2=1$ nella prima ellisse?
Quale affinità trasforma lo stesso cerchio nella seconda ellisse?
Quale affinità trasforma la prima ellisse nella seconda?

36. Ripetere l'esercizio 35 a partire dalle seguenti ellissi:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1 \quad \text{e} \quad 4x^2+25y^2=1$$

Le considerazioni svolte nell'esercizio 16, insieme alle nozioni relative all'area del cerchio esposte nel cap. 5, permettono di calcolare in modo semplice l'area di un'ellisse di semiassi noti. Ecco come si può ragionare. Il cerchio che ha centro in O(0,0) e raggio 1, ha l'equazione data da

$$x^2+y^2=1$$

e l'area S che vale

$$S=\pi.$$

Se operiamo un'affinità descritta dalle equazioni

$$x'=mx$$
$$y'=ny$$

il cerchio si trasforma nell'ellisse d'equazione

$$(1) \qquad \frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$$

Quest'ellisse avrà ora un'area S', che confrontata con l'area S del cerchio di partenza dà

$$\frac{S'}{S}=mn, \qquad \textit{ossia} \qquad \frac{S'}{\pi}=mn$$

Risulta dunque che l'area S' dell'ellisse che ha i semiassi lunghi m ed n è data da

$$S'=\pi mn.$$

Ci si può valere di questo risultato per determinare l'area delle ellissi assegnate negli esercizi dal 32 al 36.

37. Trasformare la parabola d'equazione

$$y=x^2$$

con le affinità descritte dalle seguenti equazioni

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=2y \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=3y \end{cases} \qquad \text{III)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=4y; \end{cases}$$

rappresentare le tre curve trasformate, nell'ordine indicato. Si ottengono parabole sempre più "strette" o sempre più "larghe"?

38. Ripetere l'esercizio 37, operando le seguenti affinità:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{2}y \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{3}y \end{cases} \qquad \text{III)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{4}y \end{cases}$$

39. Ripetere l'esercizio 37, operando le seguenti affinità:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=2x \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=3x \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{III)}\ \begin{cases} x'=4x \\ y'=y \end{cases}$$

40. Ripetere l'esercizio 37, operando le seguenti affinità:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=\frac{1}{2}x \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=\frac{1}{3}x \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{III)}\ \begin{cases} x'=\frac{1}{4}x \\ y'=y \end{cases}$$

41. Trasformare la parabola d'equazione

$$y=x^2$$

con le affinità descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=4y \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=\frac{1}{2}x \\ y'=y \end{cases}$$

Rappresentare le due curve trasformate. Che cosa si osserva?

42. Ripetere l'esercizio 41, operando le seguenti affinità

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{4}y \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=2x \\ y'=x \end{cases}$$

43. Dopo aver svolto gli esercizi 41 e 42, si intuisce una regola generale: si ottiene la stessa curva, trasformando la parabola d'equazione

$$y=x^2$$

sia con un'affinità d'equazione

$$x'=mx, \qquad y'=y$$

sia con un'affinità d'equazione

$$x'=x, \qquad y'=ny,$$

purché risulti $n=\frac{1}{m^2}$

Dimostrare questa regola generale.

44. Trasformare la parabola d'equazione

$$y=x^2$$

con l'affinità d'equazioni

$$x'=2x, \qquad y'=4y;$$

quale curva si ottiene?

45. Ripetere l'esercizio 44, operando l'affinità d'equazioni

$$x'=3x, \qquad y'=9y$$

46. Dopo aver svolto gli esercizi 44 e 45, si intuisce una regola generale: rimane inalterata la parabola d'equazione

$$y=x^2$$

quando si opera un'affinità d'equazioni

$$x'=mx, \qquad y'=ny$$

purché risulti $n=m^2$.
Dimostrare questa regola generale.

Per svolgere gli esercizi dal 47 al 49 è opportuno ricordare che un'equazione del tipo

(2) $\quad y=ax^2$ *(con* $a>0$*)*

rappresenta sempre una parabola che ha il vertice V in O(0,0) e l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle y.
Il grafico è sempre del tipo di quello rappresentato alla fine del paragrafo 4.

47. Riconoscere quali fra le seguenti equazioni rappresentano parabole con il vertice $V=O(0,0)$ e tracciare i corrispondenti grafici:

$$y=3x^2, \qquad y^2=3x^2, \qquad y=\frac{3}{2}x^2, \qquad y=\frac{3}{2x^2}$$

48. Ripetere l'esercizio 47 a partire dalle seguenti equazioni:

$$y=\frac{1}{3}x, \qquad y=\frac{1}{3}x^2, \qquad y=x^3, \qquad y=\frac{9}{10}x^2$$

49. Ripetere l'esercizio 47 a partire dalle seguenti equazioni:

$$y=\sqrt{3x^2}, \qquad y=\sqrt{3}x^2, \qquad y=\pi x^2, \qquad y=\sqrt{5x^2}$$

50. Trasformare l'iperbole d'equazione

$$y=\frac{1}{x}$$

con le affinità descritte dalle seguenti equazioni

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=2y \end{cases} \qquad \text{II)} \begin{cases} x'=x \\ y'=3y \end{cases} \qquad \text{III)} \begin{cases} x'=x \\ y'=4y; \end{cases}$$

rappresentare le tre curve trasformate, nell'ordine indicato.

51. Ripetere l'esercizio 50, operando le seguenti affinità:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{2}y \end{cases} \qquad \text{II)} \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{3}y \end{cases} \qquad \text{III)} \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{4}y \end{cases}$$

52. Ripetere l'esercizio 50, operando le seguenti affinità:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=2x \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{II)} \begin{cases} x'=3x \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{III)} \begin{cases} x'=4x \\ y'=y \end{cases}$$

53. Ripetere l'esercizio 50, operando le seguenti affinità:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=\frac{1}{2}x \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{II)} \begin{cases} x'=\frac{1}{3}x \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{III)} \begin{cases} x'=\frac{1}{4}x \\ y'=y \end{cases}$$

54. Trasformare l'iperbole d'equazione

$$y=\frac{1}{x}$$

con le affinità descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=2y \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=2x \\ y'=y \end{cases}$$

Rappresentare le due curve trasformate. Che cosa si osserva?

55. Ripetere l'esercizio 54, operando le seguenti affinità

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{2}y \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=\frac{1}{2}x \\ y'=y \end{cases}$$

56. Dopo aver svolto gli esercizi 54 e 55, si intuisce una regola generale: si ottiene la stessa curva, trasformando l'iperbole d'equazione

$$y=\frac{1}{x}$$

sia con un'affinità d'equazione

$$x'=mx, \qquad y'=y$$

sia con un'affinità d'equazione

$$x'=x, \qquad y'=ny$$

purché risulti $n=m$.
Dimostrare questa regola generale.

57. Trasformare l'iperbole d'equazione

$$y=\frac{1}{x}$$

con le affinità descritte dalle seguenti equazioni

$$x'=2x, \qquad y'=\frac{1}{2}y$$

quale curva si ottiene?

58. Ripetere l'esercizio 57, operando l'affinità d'equazioni

$$x'=\frac{1}{3}x, \qquad y'=3y$$

59. Dopo aver svolto gli esercizi 57 e 58, si intuisce una regola generale: rimane inalterata l'iperbole d'equazione

$$y=\frac{1}{x}$$

quando si opera un'affinità d'equazioni

$$x'=mx, \qquad y'=ny$$

purché risulti $n=\frac{1}{m}$.
Dimostrare questa regola generale.

Lo svolgimento degli esercizi dal 50 al 59 conduce a concludere che un'equazione del tipo

(3) $$y=\frac{k}{x}$$

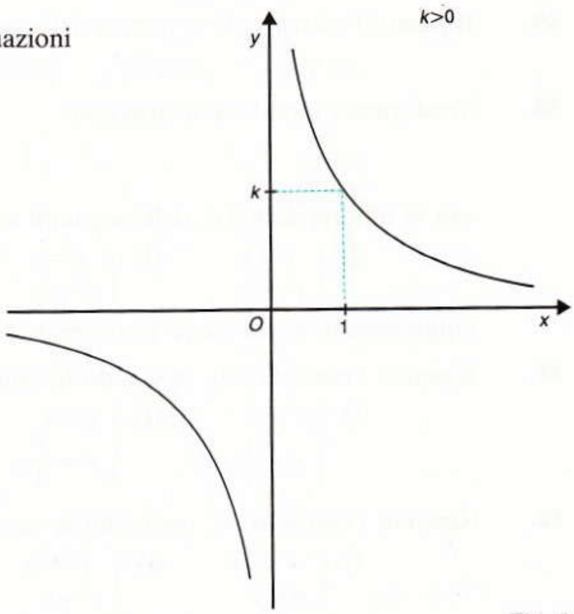


Fig. 1

rappresenta sempre un'iperbole, che ha un grafico del tipo di quello rappresentato in fig. 1. È opportuno ricordare questa conclusione per svolgere gli esercizi dal 60 al 63.

60. Riconoscere quali fra le seguenti equazioni rappresentano iperboli e tracciare il corrispondente grafico:

$$y=\frac{1}{x}, \qquad y=\frac{1}{x^2}, \qquad y=\frac{3}{x}, \qquad y=\frac{1}{3x}$$

61. Ripetere l'esercizio 60 a partire dalle seguenti equazioni:

$$y=\frac{2}{3x}, \quad y=\frac{3}{2x}, \quad y^2=\frac{1}{x}, \quad xy=4$$

(Particolare attenzione all'ultima equazione, che rappresenta ancora un'iperbole, dato che si può esprimere nella forma (3), dividendone i due membri per x).

62. Ripetere l'esercizio 60 a partire dalle seguenti equazioni:

$$xy=\sqrt{3}, \quad y=\frac{\sqrt{2}}{x}, \quad y=\frac{1}{\sqrt{2}x}, \quad y=\frac{1}{\sqrt{2x}}$$

63. Ripetere l'esercizio 60 a partire dalle seguenti equazioni:

$$xy=\frac{1}{x}, \quad y=\frac{\pi}{x}, \quad y=\frac{1}{\pi x}, \quad xy=\sqrt{10}$$

Simmetrie

Trasformare poligoni

Gli esercizi dal 64 al 72 conducono ad impadronirsi delle simmetrie, operando sulle coordinate dei vertici di semplici poligoni ed esaminando i poligoni trasformati.

Per svolgere gli esercizi è opportuno ricordare le seguenti simmetrie, presentate nel testo:

- *simmetria rispetto all'asse delle x, descritta dalle equazioni*

$$x'=x, \quad y'=-y$$

- *simmetria rispetto all'asse delle y, descritta dalle equazioni*

$$x'=-x, \quad y'=y$$

- *simmetria rispetto alla bisettrice b del I e III quadrante, descritta dalle equazioni*

$$x'=y, \quad y'=x$$

64. Operare la simmetria rispetto all'asse delle x e determinare le figure trasformate dei seguenti poligoni:

a) il rettangolo di vertici $A(3,1)$, $B(6,1)$, $C(6,2)$, $D(3,2)$,
b) il triangolo di vertici $A(-5,-1)$, $B(-4,-2)$, $C(-5,-3)$
c) il rombo di vertici $A(-3,2)$, $B(-1,3)$, $C(-3,4)$, $D(-5,3)$.

65. Ripetere l'esercizio 64, operando la simmetria rispetto all'asse delle y.

66. Ripetere l'esercizio 64, operando la simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante.

67. Disegnare il rettangolo di vertici $A(-3,-1)$, $B(3,-1)$, $C(3,1)$, $D(-3,1)$ ed operare le seguenti simmetrie assiali:

- rispetto all'asse delle x
- rispetto all'asse delle y
- rispetto alla retta b, bisettrice del I e III quadrante.

In quali casi il rettangolo si trasforma in se stesso?

68. Ripetere l'esercizio 67 a partire dal rombo di vertici $A(0,-4)$, $B(2,0)$, $C(0,4)$, $D(-2,0)$

69. Disegnare il triangolo di vertici $A(-3,1)$, $B(-1,2)$, $C(-2,4)$ ed operare la simmetria rispetto alla retta b, bisettrice del I e III quadrante; si ottiene il triangolo $A'B'C'$.
Verificare che valgono le seguenti due proprietà:

- le rette AA', BB', CC' hanno la stessa pendenza $m=-1$,
- il punto medio dei segmenti AA', BB', CC' appartiene alla retta b.

70. Verificare che le due proprietà enunciate nell'esercizio precedente valgono in generale, a partire da un punto $A(a,b)$ e dal suo trasformato $A'(b,a)$.
Osservare che -1 è la pendenza della bisettrice b' del II e IV quadrante, perciò le rette con pendenza $m=-1$ sono perpendicolari alla retta b.
Lo svolgimento dell'esercizio conduce dunque a verificare le due proprietà caratteristiche di una simmetria assiale, rispetto alla retta b:
I) la retta AA', che congiunge due punti corrispondenti è perpendicolare all'asse di simmetria b,
II) il punto medio del segmento AA' appartiene all'asse di simmetria.

71. Verificare le due proprietà enunciate nell'esercizio 70, relativamente alla simmetria rispetto all'asse delle x.

72. Verificare le due proprietà enunciate nell'esercizio 70, relativamente alla simmetria rispetto all'asse delle y.

Trasformare curve

Gli esercizi dal 73 all'89 conducono a trasformare con simmetrie le curve introdotte nella Parte seconda.

73. Operare la simmetria rispetto all'asse delle y e determinare le rette trasformate delle seguenti rette:

$$a)\ y=-2x+3, \qquad b)\ y=-2x-4, \qquad c)\ y=\frac{1}{2}x-1$$

Rappresentare le rette assegnate e le loro trasformate.
La simmetria cambia la pendenza di una retta?
La simmetria cambia il punto in cui una retta incontra l'asse delle y?
Le due rette a e b hanno uguale pendenza; le due rette trasformate hanno ancora uguale pendenza?

74. Operare ancora la simmetria rispetto all'asse delle y e determinare le rette trasformate delle seguenti rette:

$$r)\ x=-3, \qquad s)\ y=4$$

Rappresentare le rette assegnate e le loro trasformate.
È immediato osservare che la retta s si trasforma in se stessa; i punti della retta s restano fissi durante la trasformazione?

75. Operare la simmetria rispetto all'asse delle x e determinare le rette trasformate delle seguenti rette:

$$a)\ y=3x+1, \qquad b)\ y=3x-2, \qquad c)\ y=-\frac{2}{3}x-4$$

Rappresentare le rette assegnate e le loro trasformate.
La simmetria cambia la pendenza di una retta?
La simmetria cambia il punto in cui una retta incontra l'asse delle y?
Quale punto di una retta "resta fermo" durante la trasformazione?
Le due rette a e b hanno uguale pendenza; le due rette trasformate hanno ancora uguale pendenza?

76. Operare ancora la simmetria rispetto all'asse delle x e determinare le rette trasformate delle seguenti rette:

$$r)\ x=2, \qquad s)\ y=-5$$

Rappresentare le rette assegnate e le loro trasformate.
È immediato osservare che la retta r si trasforma in se stessa; i punti della retta r restano fissi durante la trasformazione?

77. Operare la simmetria rispetto alla bisettrice b del I e III quadrante e determinare le trasformate delle seguenti rette:

$$a)\ y=2x-3, \qquad b)\ y=2x, \qquad c)\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$$

Rappresentare le rette assegnate e le loro trasformate.

La simmetria cambia la pendenza di una retta?
La simmetria cambia il punto in cui una retta incontra l'asse delle y?
Quale punto di una retta resta fisso durante la trasformazione?
Le due rette a e b hanno uguale pendenza; le due rette trasformate hanno ancora uguale pendenza?

78. Operare ancora la simmetria rispetto alla bisettrice b del I e III quadrante e determinare le rette trasformate delle seguenti rette:

$r)$ $y=x-1$, $s)$ $y=-x+2$

Rappresentare le rette assegnate e le loro trasformate.
Si osserva che la retta s si trasforma in se stessa; i punti della retta s restano fissi durante la trasformazione?

79. Operare la simmetria rispetto all'asse delle y e determinare le curve trasformate delle seguenti circonferenze:

a) con centro $C(4,3)$ e raggio $r=2$,
b) con centro $C(2,2)$ e raggio $r=1$,
c) con centro $C(-3,0)$ e raggio $r=1$,
d) con centro $C(0,4)$ e raggio $r=1$,
e) con centro $O(0,0)$ e raggio $r=3$.

Rappresentare le curve assegnate e le loro trasformate.
Quali circonferenze si trasformano in se stesse?
I punti di quest'ultime circonferenze rimangono fissi durante la trasformazione?

80. Ripetere l'esercizio 79, operando la simmetria rispetto all'asse delle x.

81. Ripetere l'esercizio 79, operando la simmetria rispetto alla retta b, bisettrice del I e III quadrante.

82. Operare la simmetria rispetto all'asse delle x e determinare le curve trasformate delle seguenti parabole:

$a)$ $y=x^2$, $b)$ $y=2x^2$, $c)$ $y=\frac{1}{2}x^2$

Rappresentare le curve assegnate e le loro trasformate.
Operando la simmetria rispetto all'asse delle y, le parabole assegnate si trasformano in se stesse. I punti disposti sulle curve rimangono fissi durante la trasformazione?
Lo svolgimento di quest'ultimo esercizio conduce a ritrovare che un'equazione del tipo $y=ax^2$ rappresenta sempre una parabola, che ha l'asse delle y come asse di simmetria; il corrispondente grafico è presentato alla fine del paragrafo 4.

83. Ripetere l'esercizio 82, operando la simmetria rispetto alla bisettrice b del I e III quadrante.

84. Lo svolgimento dell'esercizio 83 conduce a tracciare il grafico delle seguenti parabole:

$a)$ $x=y^2$, $b)$ $x=2y^2$, $c)$ $x=\frac{1}{2}y^2$

Operare la simmetria rispetto all'asse delle y e determinare le equazioni e il grafico delle curve trasformate.

Lo svolgimento degli esercizi 83 e 84 conduce a concludere che un'equazione del tipo $x=ay^2$ rappresenta sempre una parabola, che ha l'asse delle x come asse di simmetria; il corrispondente grafico è una delle curve presentate in fig. 2, a seconda che risulti $a>0$ oppure $a<0$.

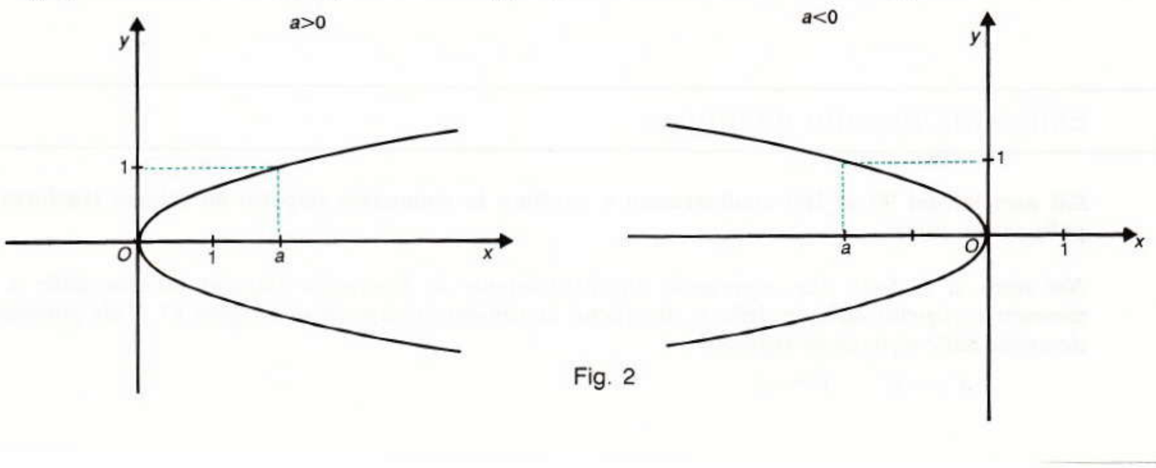


Fig. 2

85. Operare la simmetria rispetto alla bisettrice b del I e III quadrante e determinare le curve trasformate delle seguenti iperboli:

$$a)\ y=\frac{1}{x}, \qquad b)\ y=\frac{3}{x}, \qquad c)\ y=\frac{1}{3x}$$

Rappresentare le curve assegnate e le loro trasformate.
Che cosa si osserva?

86. Ripetere l'esercizio 85, operando la simmetria rispetto all'asse delle x.

87. Ripetere l'esercizio 85, operando la simmetria rispetto all'asse delle y; confrontare le curve trasformate ora ottenute con quelle ottenute nell'esercizio precedente.

Lo svolgimento degli esercizi 86 e 87 conduce a completare le conclusioni esposte a pag. 424, osservando che un'equazione del tipo

$$y=\frac{k}{x}$$

rappresenta sempre un'iperbole che avrà come grafico uno di quelli presentati in fig. 3, a seconda che risulti $k>0$, oppure $k<0$.

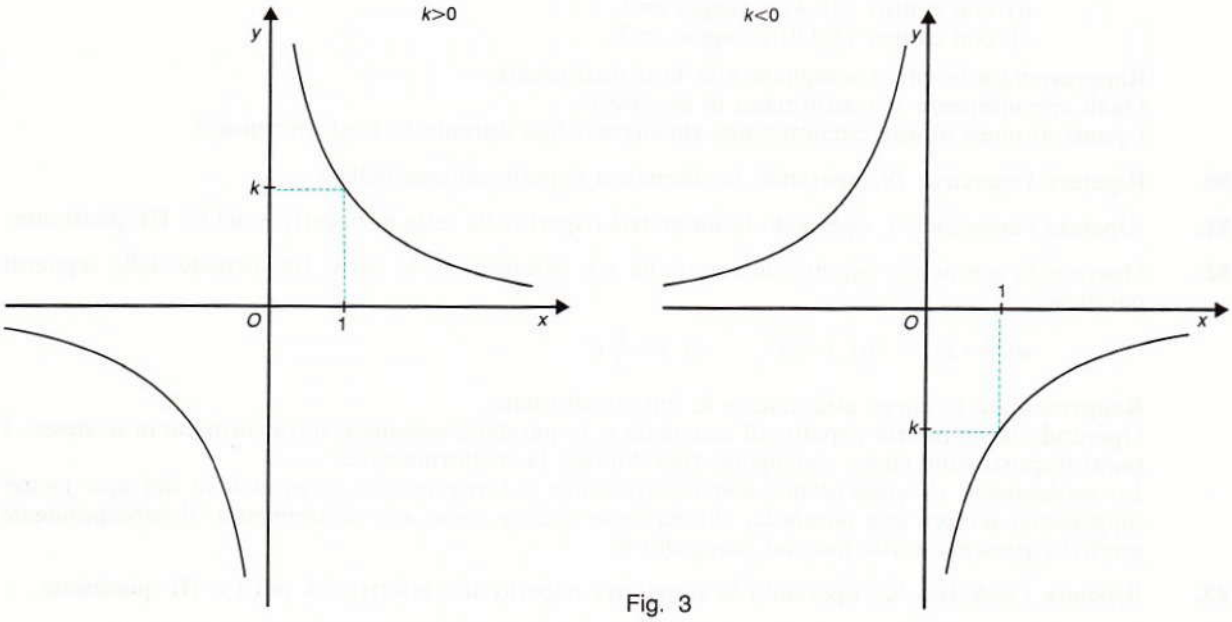


Fig. 3

88. Riconoscere quali fra le seguenti equazioni rappresentano parabole o iperboli e tracciare i corrispondenti grafici.

$$y=-\frac{1}{2}x^2, \qquad x=-\frac{1}{2}y^2, \qquad x^2=-\frac{1}{2}y^2, \qquad y=-\frac{2}{x}, \qquad y=-\frac{1}{2x}, \qquad y^2=-\frac{2}{x}$$

89. Ripetere l'esercizio 88 a partire dalle seguenti equazioni:

$$y=4x^2, \qquad x=4y^2, \qquad x=-4y^2, \qquad xy=-\sqrt{2}. \qquad y=-\frac{1}{\sqrt{3}x}$$

Simmetria rispetto all'origine

Gli esercizi dal 90 al 100 condurranno a studiare la simmetria rispetto all'origine trasformando poligoni in curve.

Nel testo si è detto che, operando successivamente la simmetria rispetto all'asse delle x e la simmetria rispetto all'asse delle y, si ottiene la simmetria rispetto all'origine O. Tale simmetria è descritta dalle equazioni seguenti

$$x'=-x, \qquad y'=-y$$

90. È dato il triangolo che ha per vertici i punti seguenti:

$A(0,-2)$, $B(-3,0)$, $C(-4,-5)$

operare la simmetria rispetto all'origine O e determinare le coordinate dei punti A', B', C', vertici del triangolo trasformato di ABC.
Determinare l'equazione delle rette AA', BB', CC'.
Determinare le distanze $\overline{OA}$ e $\overline{OA'}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OB'}$, $\overline{OC}$ e $\overline{OC'}$.
Che cosa si osserva?

91. Ripetere l'esercizio 90 a partire dal quadrilatero che ha per vertici i punti seguenti:

$A(-3,0)$, $B(0,-1)$, $C(-2,-4)$, $D(-5,-2)$

92. Lo svolgimento degli esercizi 90 e 91 fa intuire due proprietà generali che caratterizzano la simmetria centrale rispetto al punto O:

- passano per O tutte le rette che congiungono un punto $A(a,b)$ ed il suo simmetrico A'.
- O è il punto medio del segmento AA', che congiunge un punto A col suo simmetrico.

Dimostrare queste proprietà.

93. Sono date le rette seguenti:

$r)$ $y=-3x+1$, $s)$ $y=4x-3$, $t)$ $y=-x-5$

Operare la simmetria rispetto ad O; determinare l'equazione ed il grafico delle rette trasformate delle rette assegnate.
La simmetria ha cambiato la pendenza delle rette?
La simmetria ha cambiato il punto di intersezione delle rette con l'asse delle y?

94. Ripetere l'esercizio 93 a partire dalle seguenti rette:

$r)$ $y=\frac{1}{2}x-1$, $s)$ $y=-\frac{3}{4}x+\frac{2}{3}$, $t)$ $y=\frac{4}{5}x+\frac{1}{3}$

95. Lo svolgimento degli esercizi 93 e 94 suggerisce una proprietà generale: la simmetria rispetto ad O trasforma una retta d'equazione

$y=mx+n$

in una retta di uguale pendenza.
Dimostrare questa proprietà.

96. Sono date le seguenti rette:

$a)$ $y=-4x$, $b)$ $y=2x$, $c)$ $y=-\frac{3}{2}x$, $d)$ $y=\frac{5}{4}x$

si opera la simmetria rispetto ad O.
Determinare le rette trasformate.
Che cosa si osserva?

97. Lo svolgimento dell'esercizio 96 suggerisce una proprietà generale: la simmetria centrale rispetto ad O trasforma in se stesse tutte le rette passanti per O.
Dimostrare questa proprietà.

98. Sono date le curve che hanno le equazioni seguenti:

$a)$ $y=2x^2$, $b)$ $y=2x^2$, $c)$ $x=2y^2$,

operare la simmetria rispetto all'origine O.
Qualcuna delle curve si trasforma in se stessa?

99. Ripetere l'esercizio 98 a partire dalle seguenti equazioni:

$a)$ $x^2+y^2=4$, $b)$ $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, $c)$ $x^2+y^2-4x+8y-5=0$

100. Ripetere l'esercizio 98 a partire dalle seguenti equazioni:

$a)$ $y=\frac{2}{x}$, $b)$ $y=\frac{1}{2x}$, $c)$ $y=-\frac{2}{x}$

Traslazioni

Trasformare poligoni

Gli esercizi dal 101 al 106 conducono ad impadronirsi delle traslazioni, operando sulle coordinate dei vertici di semplici poligoni ed esaminando i poligoni trasformati.

Per svolgere gli esercizi è opportuno ricordare le seguenti traslazioni, presentate nel testo:

– *traslazione nella direzione dell'asse delle x, descritta dalle equazioni*

$$x'=x+p, \qquad y'=y$$

la traslazione avviene verso destra, se risulta $p>0$ e verso sinistra se risulta $p<0$

– *traslazione nella direzione dell'asse delle y, descritta dalle equazioni*

$$x'=x, \qquad y'=y+q$$

la traslazione avviene verso l'alto, se risulta $q>0$ e verso il basso, se risulta $q<0$

– *traslazione lungo entrambi gli assi, descritta dalle equazioni*

$$x'=x+p, \qquad y'=y+q$$

101. È dato il rombo che ha per vertici i punti $O(0,0)$, $A(2,3)$, $B(0,6)$, $C(-2,3)$; operare la traslazione descritta dalle equazioni seguenti:

$$x'=x+4, \qquad y'=y+1$$

Determinare le coordinate dei punti O', A', B', C', vertici del quadrilatero traslato. Scrivere le equazioni delle rette OO', AA', BB', CC'; che cosa si osserva?

102. Ripetere l'esercizio 101 a partire dalla traslazione d'equazioni

$$x'=x-3, \qquad y'=y-2$$

103. Lo svolgimento degli esercizi 101 e 102 porta ad intuire una proprietà caratteristica delle traslazioni: hanno sempre la stessa pendenza le rette che congiungono un punto A con il corrispondente punto A'.
Dimostrare questa proprietà in generale: considerare due punti $A(a,b)$ e $B(c,d)$, i loro corrispondenti $A'(a+p,b+q)$ e $B(c+p,d+q)$; esaminare la pendenza delle rette AA' e BB'.

104. È dato il triangolo equilatero di vertici $A(-1,-1)$, $B(1,1)$, $C(-\sqrt{3},\sqrt{3})$; quali traslazioni portano uno dei vertici del triangolo a coincidere con $O(0,0)$? Indicare, in ogni caso, le coordinate dei vertici del triangolo e rappresentare la figura sul piano cartesiano.

105. Ripetere l'esercizio 104 a partire dal rombo che ha per vertici i seguenti punti:

$$A(1,-3), \qquad B(1,2), \qquad C(5,5), \qquad D(5,0)$$

106. Ripetere l'esercizio 104 a partire dal quadrato che ha per vertici i seguenti punti:

$$A(2,3), \qquad B(-1,1), \qquad C(1,-2), \qquad D(4,0)$$

Trasformare curve

Gli esercizi dal 107 al 125 conducono ad operare delle traslazioni, prendendo in considerazione le curve introdotte nella Parte seconda.

107. È data la retta r d'equazione

$$y=2x;$$

si operano le traslazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=y+1 \end{cases} \qquad \text{II)} \begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y \end{cases}$$

Determinare l'equazione ed il grafico della retta r', trasformata di r; che cosa si osserva?

108. Ripetere l'esercizio 107 a partire dalla retta d'equazione

$$y=2x-3$$

e dalle traslazioni descritte dalle equazioni seguenti:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y-2 \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y \end{cases}$$

109. Ripetere l'esercizio 107 a partire dalla retta d'equazione

$$y=-\frac{1}{2}x+4$$

e dalle traslazioni descritte dalle equazioni seguenti:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y+3 \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x-3 \\ y'=y \end{cases}$$

110. Lo svolgimento degli esercizi 107, 108, 109 conduce a ricercare una regola generale: data la retta r d'equazione

$$y=mx+n,$$

si operano le trasformazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y+q \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x+p \\ y'=y \end{cases}$$

In quali casi le due traslazioni trasformano la retta r nella stessa retta r'?

111. È data la retta r d'equazione

$$y=4x;$$

si operano le traslazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y+4 \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y-8 \end{cases}$$

Qual'è, in ogni caso, la trasformata della retta r?

112. Ripetere l'esercizio 111 a partire dalla retta d'equazione

$$y=4x-3$$

e dalle trasformazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y-4 \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x+\frac{1}{2} \\ y'=y+2 \end{cases}$$

113. Ripetere l'esercizio 111 a partire dalla retta d'equazione

$$y=-3x+1$$

e dalle trasformazioni descritte dalle equazioni seguenti:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y-3 \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x-\frac{1}{3} \\ y'=y+1 \end{cases}$$

114. Lo svolgimento degli esercizi 111, 112, 113 conduce a ricercare una regola generale: data la retta r d'equazione

$$y=mx+n,$$

si opera la traslazione descritta dalle equazioni seguenti

$$x'=x+p, \quad , \ y'=y+q.$$

In quali casi la retta r viene trasformata in se stessa?
In questi ultimi casi i punti della retta rimangono fissi durante la traslazione?

115. È data la retta r d'equazione

$$y=-2x+4$$

Descrivere le seguenti trasformazioni:

- le traslazioni che trasformano r in una retta r', che incontra l'asse delle y in $O(0,0)$;
- le traslazioni che trasformano la retta r in se stessa.

116. Ripetere l'esercizio 115 a partire dalla retta r d'equazione

$$y=\frac{3}{2}x-1$$

117. Ripetere l'esercizio 115 a partire dalla retta r d'equazione

$$y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{2}$$

118. Ripetere l'esercizio 115 in generale, a partire dalla retta r d'equazione

$$y=mx+n$$

119. Dopo aver disegnato la parabola d'equazione

$$y=x^2$$

effettuare le seguenti traslazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y+2 \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{III)}\ \begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y+2 \end{cases}$$

Determinare, in ogni caso, l'equazione ed il grafico della parabola trasformata, indicando, in particolare, le coordinate del vertice e l'equazione dell'asse di simmetria.

120. Ripetere l'esercizio 119 a partire dalla parabola d'equazione

$$y=3x^2$$

121. Ripetere l'esercizio 119 a partire dalla parabola d'equazione

$$y=-3x^2$$

122. Ripetere l'esercizio 119, effettuando le seguenti traslazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y=y-1 \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{III)}\ \begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y-1 \end{cases}$$

123. Ripetere l'esercizio 119 a partire dalla parabola d'equazione

$$y=\frac{1}{2}x^2$$

effettuando le seguenti traslazioni:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y+3 \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x-\frac{1}{2} \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{III)}\ \begin{cases} x'=x-\frac{1}{2} \\ y'=y+3 \end{cases}$$

124. Ripetere l'esercizio 119 a partire dalla parabola d'equazione

$$y=-\frac{1}{4}x^2$$

effettuando le traslazioni seguenti:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'=x \\ y'=y-\frac{3}{4} \end{cases} \qquad \text{II)}\ \begin{cases} x'=x+\frac{1}{4} \\ y'=y \end{cases} \qquad \text{III)}\ \begin{cases} x'=x+\frac{1}{4} \\ y'=y-\frac{3}{4} \end{cases}$$

125. Indicare quali traslazioni si effettuano per passare dalla parabola d'equazione

$$y=x^2$$

alle parabole che hanno le equazioni seguenti:

a) $y=x^2-1$, *b*) $y=(x-1)^2$, $y=(x-1)^2+2$

Determinare, in ogni caso, vertice ed asse di simmetria di ciascuna parabola.

126. Ripetere l'esercizio 125, passando dalla parabola d'equazione

$$y=4x^2$$

alle parabole che hanno le equazioni seguenti:

a) $y=4x^2+3$, *b*) $y=4(x+2)^2$, *c*) $y=4(x+2)^2-3$

127. Ripetere l'esercizio 125, passando dalla parabola d'equazione

$$y=-\frac{1}{2}x^2$$

alle parabole che hanno le equazioni seguenti:

$a)$ $y=-\frac{1}{2}x^2$, $b)$ $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$, $c)$ $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1$

Per svolgere gli esercizi dal 128 al 132, è opportuno ricordare le conclusioni esposte nel paragrafo 7: un'equazione del tipo

$$y=ax^2+bx+c$$

rappresenta una parabola che ha l'asse di simmetria s d'equazione

$$x=-\frac{b}{2a}.$$

Per disegnare la parabola, basta determinare

- *il vertice V, che ha le coordinate p e q, date da*

$$p=-\frac{b}{2a} \quad e \quad q=ap^2+bp+c$$

- *qualche punto, ottenuto assegnando alla x valori opportuni e ricavando i corrispondenti valori di y.*

Si otterrà un grafico del tipo di quello presentato in fig. 4, dove abbiamo rappresentato la parabola d'equazione

$$y=2x^2-4x+1$$

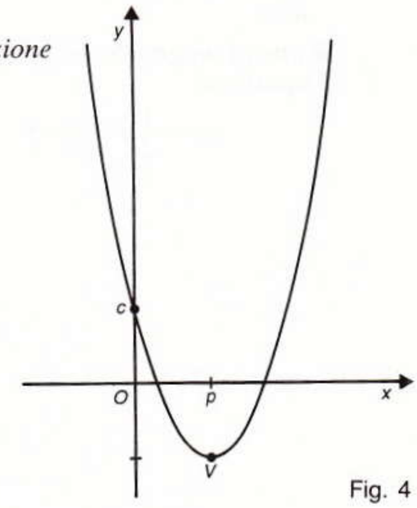


Fig. 4

128. Riconoscere quali fra le seguenti equazioni rappresentano parabole con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y e tracciare i corrispondenti grafici:

$a)$ $y=x^2-2$, $b)$ $y=-x^2+2$, $c)$ $y=-x^2-2$, $d)$ $y=x-2$

129. Ripetere l'esercizio 128 a partire dalle seguenti equazioni

$a)$ $y=x^2-2x$, $b)$ $y=x^2+2x$, $c)$ $y^2=x^2-2x$, $d)$ $y=-x^2-2x$

130. Ripetere l'esercizio 128 a partire dalle seguenti equazioni:

$a)$ $y=x^2-4x+3$, $b)$ $xy=x^2+3x-2$, $c)$ $y=-x^2+2x+1$, $d)$ $y=x^2-x+6$

131. Ripetere l'esercizio 128 a partire dalle seguenti equazioni:

$a)$ $y=-\frac{x^2}{4}+x-2$, $b)$ $y=x^3-6x+8$, $c)$ $y=2x^2-x$, $d)$ $y=4x^2-12x+8$

132. Ripetere l'esercizio 128 a partire dalle seguenti equazioni:

$a)$ $y=-\frac{3}{2}x^2+3x-2$, $b)$ $y=\frac{3}{2}x-2$, $c)$ $y=3x^2-\frac{3}{2}x+1$, $d)$ $y=-\frac{1}{2}x^2+x$

133. Dopo aver disegnato le parabole che hanno le equazioni seguenti

$y=2x^2$, $y=2x^2-3$, $y=2x^2-8x+1$

effettuare la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.
Determinare, in ogni caso, l'equazione ed il grafico della parabola trasformata, indicando, in particolare, le coordinate del vertice e l'equazione dell'asse di simmetria.

134. Ripetere l'esercizio 133 a partire dalle parabole d'equazione

$y=-\frac{1}{2}x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2+1$, $y=-\frac{1}{2}x^2+2x-5$

Lo svolgimento degli esercizi 133 e 134 conduce a trarre delle conclusioni generali: un'equazione del tipo

$$(5) \qquad x=ay^2+by+c$$

rappresenta una parabola, che ha l'asse di simmetria s d'equazione

$$y=-\frac{b}{2a}.$$

Per disegnare la parabola, basta determinare

– *il vertice $V(p,q)$, che ha le coordinate date da*

$$q=-\frac{b}{2a} \quad e \quad p=aq^2+bq+c$$

– *qualche punto, ottenuto assegnando alla y valori opportuni e ricavando i corrispondenti valori di x.*

Si otterrà un grafico del tipo di quello presentato in fig. 5, dove abbiamo rappresentato la parabola d'equazione

$$x=-\frac{1}{2}y^2+2y-5$$

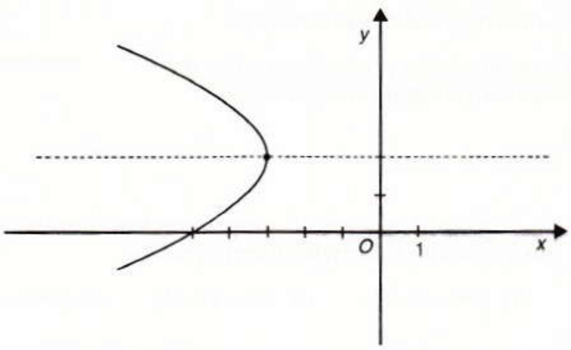


Fig. 5

135. Riconoscere quali fra le seguenti equazioni rappresentano parabole con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle x e tracciare i corrispondenti grafici:

a) $x=y^2-2$, *b*) $x=-y^2+2$, *c*) $x=-y^2-2$, *d*) $x=y-2$

136. Ripetere l'esercizio 135 a partire dalle seguenti equazioni:

a) $x=-\frac{y^2}{4}+y-2$, *b*) $x=y^3-8$, *c*) $x=2y^2-y$, *d*) $x=4y^2-12y+8$

137. È data la circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2=1$$

operare traslazioni descritte dalle seguenti equazioni:

I) $\begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y \end{cases}$ II) $\begin{cases} x'=x \\ y'=y+1 \end{cases}$ III) $\begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y+1 \end{cases}$

Qual'è il centro della circonferenza traslata? Qual'è la sua equazione?

138. Ripetere l'esercizio 137 a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2=4$$

e dalle traslazioni descritte dalle seguenti equazioni:

I) $\begin{cases} x'=x-3 \\ y'=y \end{cases}$ II) $\begin{cases} x'=x \\ y'=y-2 \end{cases}$ III) $\begin{cases} x'=x-3 \\ y'=y-2 \end{cases}$

139. Gli esercizi 137 e 138 conducono a ricercare un risultato generale: data la circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2=r^2$$

si effettua la traslazione descritta dalle seguenti equazioni:

$$x'=x+p, \qquad y'=y+q$$

come si modifica l'equazione della curva? Come si modificano le coordinate del centro?

140. Sono date le circonferenze che hanno le equazioni seguenti:

a) $x^2+y^2-2x=0$, *b*) $x^2+y^2+4y=0$, *c*) $x^2+y^2-2x+4y=0$, *d*) $x^2+y^2-x+4y+4=0$

indicare le traslazioni che portano il centro delle circonferenze nell'origine $O(0,0)$, scrivendo l'equazione che si ottiene in tal caso.

141. Ripetere l'esercizio 140, a partire dalle equazioni seguenti:

a) $x^2+y^2+x=0$, *b*) $x^2+y^2-3y=0$, *c*) $x^2+y^2+x-3y=0$, *d*) $x^2+y^2+x-3y+1=0$

142. Disegnare l'iperbole d'equazione

$$y=\frac{1}{x}$$

Si osserva che la curva si avvicina sempre di più all'asse delle x, quando si attribuiscono alla x valori sempre più grandi in valore assoluto; quando, invece, si attribuiscono alla x valori sempre più vicini a zero, la curva si avvicina sempre di più all'asse delle y. Gli assi cartesiani sono due *asintoti* della curva, cioè sono due rette, a cui la curva si avvicina sempre di più, senza raggiungerle. Effettuare le seguenti traslazioni:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=y+3 \end{cases} \quad \text{II)} \begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y \end{cases} \quad \text{III)} \begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y+3 \end{cases}$$

Determinare, in ogni caso, il dominio della funzione ottenuta; determinare l'equazione ed il grafico dell'iperbole trasformata, indicando, in particolare le equazioni degli asintoti.

143. Ripetere l'esercizio 142 a partire dall'iperbole d'equazione

$$y=\frac{2}{x}$$

144. Ripetere l'esercizio 142 a partire dall'iperbole d'equazione

$$y=\frac{1}{2x}$$

effettuando le seguenti traslazioni:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=x \\ y'=y-3 \end{cases} \quad \text{II)} \begin{cases} x'=x+\frac{1}{2} \\ y'=y \end{cases} \quad \text{III)} \begin{cases} x'=x+\frac{1}{2} \\ y'=y-3 \end{cases}$$

145. Ripetere l'esercizio 144 a partire dall'iperbole d'equazione

$$y=-\frac{1}{2x}$$

Lo svolgimento degli esercizi dal 142 al 145 conduce a trarre delle conclusioni generali: dopo aver disegnato un'iperbole, grafico della funzione

$$y=\frac{k}{x}$$

che ha per dominio l'insieme dei numeri reali diversi da zero, si può effettuare una traslazione descritta dalle equazioni

$$x'=x+p$$
$$y'=y+q.$$

Si ottiene un'iperbole, grafico della funzione

$$y'=\frac{k}{x'-p}+q \tag{6}$$

che ha per dominio l'insieme dei numeri reali diversi da p. La curva ottenuta (fig. 6) ha come asintoti le rette d'equazione

$$x'=p \quad e \quad y'=q$$

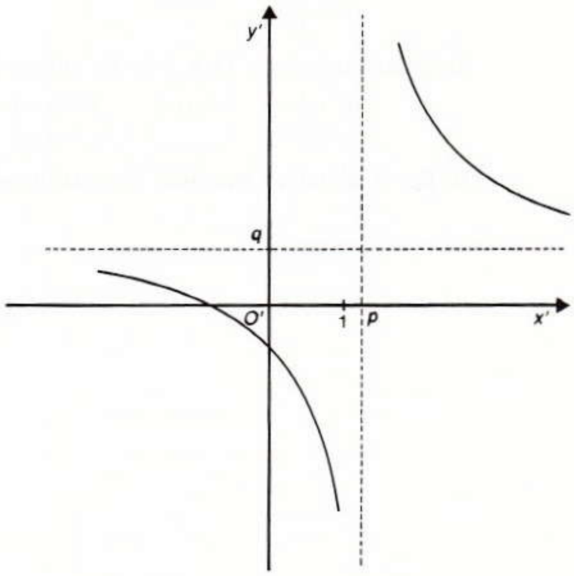


Fig. 6

D'altra parte l'equazione (6) si può anche scrivere nella forma seguente:

(7) $$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

dove abbiamo eseguito l'addizione indicata nella (6) ed abbiamo chiamato le coordinate con x ed y. Ora, risulta interessante valersi del risultato ottenuto per arrivare alla seguente conclusione: un'equazione del tipo (7) rappresenta sempre un'iperbole, di cui è semplice eseguire il grafico se riusciamo a risalire dalla forma (7) all'equazione (6).
Ecco un esempio.
È data l'equazione

$$y=\frac{-3x+10}{3x-6}$$

È immediato riconoscere che si tratta di un'equazione del tipo (7); dunque si tratta di un'iperbole, di cui possiamo tracciare il grafico se riusciamo ad esprimere l'equazione assegnata nella forma (6). Il metodo più rapido e sicuro consiste nel valersi della divisione dei polinomi; eseguendo la divisione del binomio

$$-3x+10$$

per il binomio

$$3x-6$$

si ottiene:

$$-3x+10=-1(3x-6)+4$$

Perciò si può scrivere:

$$\frac{-3x+10}{3x-6}=-1+\frac{4}{3x-6}$$

o anche

$$\frac{-3x+10}{3x-6}=\frac{4}{3(x-2)}-1$$

Così si arriva a scrivere l'equazione assegnata nella forma seguente:

$$y=\frac{4}{3(x-2)}-1$$

Per analizzare in modo più immediato l'equazione, si possono indicare le coordinate con x' ed y' e scrivere l'equazione così:

$$y'+1=\frac{4}{3(x'-2)}$$

Ora è immediato capire che si tratta dell'iperbole d'equazione

$$y=\frac{4}{3x}$$

disegnata sul piano Oxy, che ha subito le seguenti traslazioni:

$$y'+1=y \quad \text{ossia} \quad y'=y-1$$
$$x'-2=x \quad\quad\quad\quad x'=x+2$$

In fig. 7 abbiamo tracciato il corrispondente grafico.

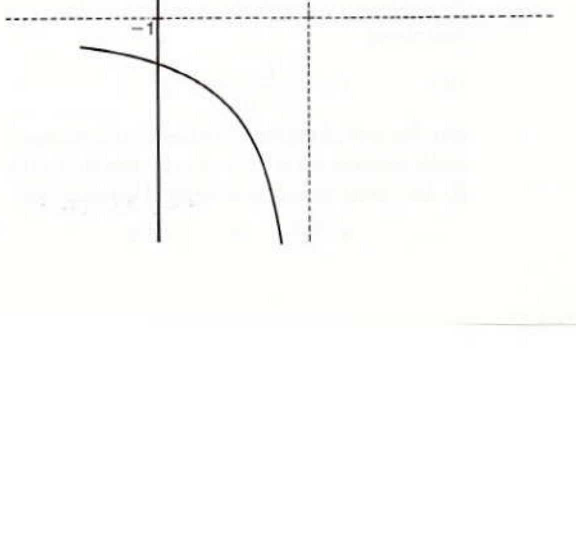


Fig. 7

146. Tracciare il grafico delle seguenti iperboli, indicando, in particolare le equazioni degli asintoti.

$a)\ y=\dfrac{2x-5}{x-3},\quad b)\ y=\dfrac{3x+1}{x+1},\quad c)\ y=\dfrac{1-x}{2x},\quad d)\ y=\dfrac{x}{2x+3}$

147. Ripetere l'esercizio 146 a partire dalle seguenti equazioni:

$a)\ y=\dfrac{2x+1}{1-x},\quad b)\ y=\dfrac{2x+1}{4x+1},\quad c)\ y=\dfrac{-2x+7}{2x-6},\quad d)\ y=\dfrac{12x+10}{3x+3}$

148. Riconoscere quali fra le seguenti equazioni rappresentano parabole con asse di simmetria parallelo ad uno degli assi cartesiani o iperboli con gli asintoti paralleli agli assi cartesiani e tracciare i corrispondenti grafici.

$a)\ y=3+2x-x^2,\quad b)\ y=3+2x,\quad c)\ y=\dfrac{3x}{x+1},\quad d)\ y=\dfrac{1-x^2}{2x}$

149. Ripetere l'esercizio 148 a partire dalle seguenti equazioni:

$a)\ x^2=2y^2-4,\quad c)\ x=2y^2-4,\quad c)\ y=\dfrac{4+3x}{x^2},\quad d)\ y=\dfrac{x+2}{1-x}$

Due modi di considerare le traslazioni: trasformazioni del piano e cambiamenti di riferimento

Le traslazioni possono essere considerate da due punti di vista, che ora presentiamo brevemente.

A) Un punto di vista dinamico.

È il punto di vista seguito nel testo: si pensa ad un piano cartesiano Oxy, che trasla nella direzione dei due assi, mentre un riferimento O'x'y', disegnato su un piano fisso, permette di confrontare le situazioni che si presentano (fig. 8).

Si ha così che, se il piano Oxy subisce le seguenti traslazioni:

p unità in direzione dell'asse delle x,
q unità in direzione dell'asse delle y,

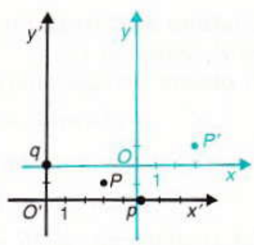


Fig. 8

un punto P(x,y) si porta nel punto P' che ha, nel riferimento O'x'y', le coordinate seguenti

$$x'=x+p,\qquad y'=y+q$$

B) Un punto di vista statico.

È disegnato sul piano un riferimento Oxy; successivamente si disegna un altro riferimento O'x'y' con gli assi paralleli ai precedenti, ma l'origine nel punto O'(−p,−q) (fig. 9).

In questo modo ogni punto del piano può essere individuato in due modi:

- *con le coordinate (x,y), se riferito al "vecchio" riferimento,*
- *con le coordinate (x',y'), se riferito al "nuovo" riferimento.*

È immediato constatare che le coordinate sono legate dalle relazioni seguenti:

$$(1)\quad \begin{cases} x'=x+p \\ y'=y+q, \end{cases}\qquad (2)\quad \begin{cases} x=x'-p \\ y=y'-q \end{cases}$$

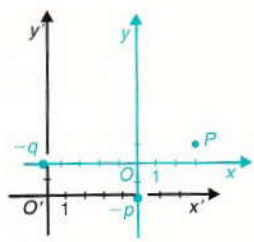


Fig. 9

Le (1) esprimono le "nuove" coordinate a partire dalle "vecchie", mentre le (2) risolvono il problema inverso.

Composizione di trasformazioni

Gli esercizi dal 150 al 155 conducono ad impadronirsi della composizione di trasformazioni.

150. È data la retta d'equazione

$$y=x;$$

operare le trasformazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=4x \\ y'=2y \end{cases} \quad \text{II)} \begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y-1 \end{cases} \quad \text{III)} \begin{cases} x'=4x+3 \\ y'=2y-1 \end{cases}$$

In ogni caso disegnare la retta trasformata e indicarne l'equazione.

151. Ripetere l'esercizio 150 eseguendo le trasformazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\text{I)} \begin{cases} x'=mx \\ y'=ny \end{cases} \quad \text{II)} \begin{cases} x'=x+p \\ y'=y+q \end{cases} \quad \text{III)} \begin{cases} x'=mx+p \\ y'=ny+q \end{cases}$$

152. Ripetere gli esercizi 150 e 151 a partire dalla parabola d'equazione

$$y=x^2$$

153. Ripetere gli esercizi 150 e 151 a partire dalla parabola d'equazione

$$x=y^2$$

154. Ripetere gli esercizi 150 e 151 a partire dall'equazione

$$y=\frac{1}{x}$$

155. Ripetere gli esercizi 150 e 151 a partire dall'equazione

$$x^2+y^2=1$$

L'ultima trasformazione conduce ad un'ellisse che ha gli assi paralleli agli assi cartesiani, ma non ha il centro in O.
Si ottiene un'equazione del tipo

$$n^2x^2+m^2y^2+ax+by+c=0$$

dove abbiamo indicato

$$a=2n^2p, \qquad b=2m^2q, \qquad c=n^2p^2+m^2q^2+m^2n^2.$$

Lo svolgimento degli esercizi dal 151 al 155 permette di concludere che l'equazione delle curve studiate si può presentare in una forma molto semplice, che diventa più complicata in seguito a successive trasformazioni.
La fig. 10 riassume graficamente queste conclusioni.

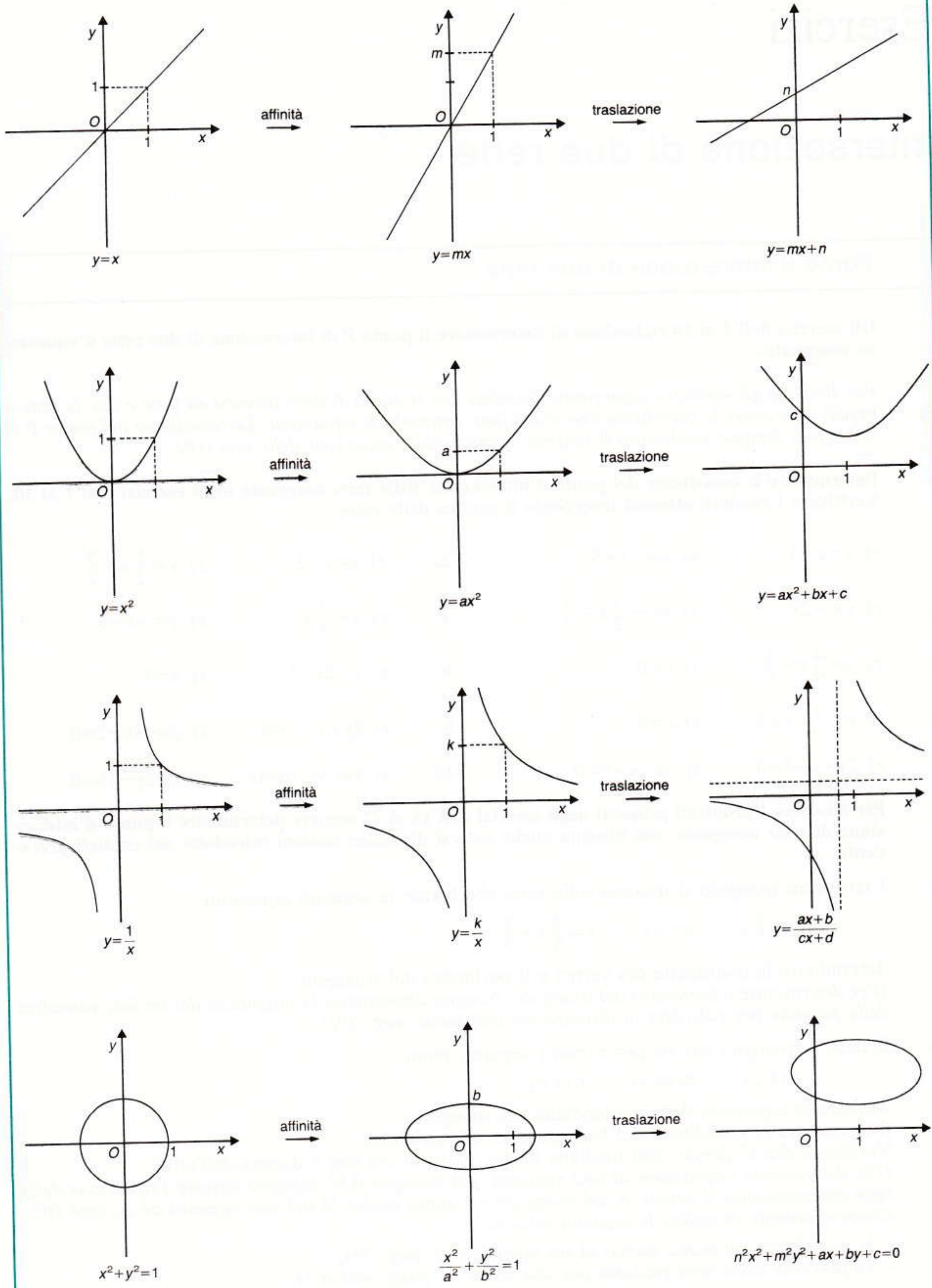

y
1
O
1
x
affinità
y
m
O
1
x
traslazione
y
n
O
1
x
y=x
y=mx
y=mx+n
y
1
O
1
x
affinità
y
a
O
1
x
traslazione
y
c
O
1
x
y=x²
y=ax²
y=ax²+bx+c
y
1
O
1
x
affinità
y
k
O
1
x
traslazione
y
O
1
x
y=1/x
y=k/x
y=(ax+b)/(cx+d)
y
O
1
x
affinità
y
b
O
1
x
traslazione
y
O
1
x
x²+y²=1
x²/a²+y²/b²=1
n²x²+m²y²+ax+by+c=0

Fig. 10

1. Parte quarta
Esercizi

Intersezione di due rette

Punto d'intersezione di due rette

Gli esercizi dall'1 al 10 richiedono di determinare il punto P di intersezione di due rette d'equazione assegnata.

Per svolgere gli esercizi è opportuno ricordare che il punto P deve trovarsi su tutte e due le rette e perciò deve avere le coordinate che soddisfano entrambe le equazioni. Le coordinate del punto P si ottengono dunque risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle due rette.

Determinare le coordinate del punto d'intersezione delle rette assegnate negli esercizi dall'1 al 10. Verificare i risultati ottenuti tracciando il grafico delle rette.

1. $r)\ y=x-3,\quad s)\ y=-x+5$

2. $r)\ y=x+2,\quad s)\ y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

3. $r)\ y=-2x,\quad s)\ y=-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}$

4. $r)\ y=\frac{2}{3}x,\quad s)\ y=-x-5$

5. $r)\ y=\frac{4}{5}x-\frac{1}{5},\quad s)\ y=0$

6. $r)\ y=2x-5,\quad s)\ x=3$

7. $r)\ y=-\frac{11}{9}x+5,\quad s)\ x=0$

8. $r)\ 2y+x-2=0,\quad s)\ 2y-3x+2=0$

9. $r)\ 2x+y-4=0,\quad s)\ 3x-y+9=0$

10. $r)\ 4x-y-16=0,\quad s)\ x+2y-13=0$

Per risolvere i problemi proposti negli esercizi dall'11 al 22 occorre determinare il punto d'intersezione di rette assegnate, ma bisogna anche valersi di alcune nozioni introdotte nei capitoli precedenti.

11. I lati di un triangolo si trovano sulle rette che hanno le seguenti equazioni:

$$y=\frac{1}{2}x,\qquad y=-x,\qquad y=\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}$$

determinare le coordinate dei vertici e il perimetro del triangolo.
(Per determinare il perimetro del triangolo, bisogna determinare la lunghezza dei tre lati, valendosi della formula per calcolare la distanza fra due punti, pag. 391).

12. È dato il triangolo che ha per vertici i seguenti punti:

$$A(4,2),\qquad B(10,4),\qquad C(1,9)$$

Scrivere le equazioni delle tre mediane del triangolo.
Determinare le coordinate del baricentro G del triangolo.
Verificare che G divide ogni mediana in due parti, di cui una è doppia dell'altra.
(Per determinare l'equazione di una mediana, per esempio AM, bisogna scrivere l'equazione della retta che congiunge il vertice A del triangolo col punto medio M del lato opposto ad A, cioè BC. Occorre dunque ricordare le seguenti nozioni:

- *le coordinate del punto medio di un segmento (v. pag. 395)*
- *l'equazione della retta passante per due punti (v. pagg. 402-403).*

Per determinare le coordinate del punto G, bisogna ricordare che il baricentro è il punto d'incontro delle mediane di un triangolo; basta dunque determinare il punto d'intersezione di due mediane,

verificando che il punto trovato appartenga anche alla terza mediana.
Per risolvere l'ultima parte dell'esercizio, basta determinare, per esempio relativamente alla mediana AM, le lunghezze dei segmenti AG e GM e calcolare il rapporto fra queste lunghezze. Occorre dunque la formula per calcolare la distanza fra due punti, esposta a pag. 391).

13. Ripetere l'esercizio 12 a partire dal triangolo che ha per vertici i seguenti punti:

$$A(-6,1), \quad B(1,2), \quad C(-1,-6)$$

14. I lati di un triangolo si trovano sulle rette che hanno le seguenti equazioni:

$$y=-3x+8, \quad y=x, \quad y=-\frac{5}{7}x+\frac{8}{7}$$

Determinare i vertici e il baricentro del triangolo.
(Vedi le osservazioni a proposito dell'esercizio 12).

15. I lati di un quadrilatero si trovano sulle rette che hanno le seguenti equazioni:

$$x-2y-5=0, \quad 3x-y-10=0, \quad x-6y+8=0, \quad 4x+y+7=0$$

Determinare i vertici del quadrilatero.
Scrivere le equazioni delle diagonali, determinando il loro punto di incontro.

16. Un triangolo ha i lati che appartengono alle rette che hanno le seguenti equazioni:

$$y=-x+4, \quad y=2x-2, \quad y=-10x-14$$

Determinare i seguenti punti:
- i vertici A, B, C del triangolo,
- i punti A', B', C' in cui l'asse delle x incontra i lati del triangolo.
- i punti A'', B'', C'' in cui l'asse delle y incontra i lati del triangolo.

Verificare che risultano vere le seguenti uguaglianze:

$$\text{I)} \quad \frac{BA'}{CA'}\,\frac{CB'}{AB'}\,\frac{AC'}{BC'}=1$$

$$\text{II)} \quad \frac{BA''}{CA''}\,\frac{CB''}{AB''}\,\frac{AC''}{BC''}=1$$

Si è così verificato, in due casi particolari, il teorema di Menelao *(I secolo d.C.): «una retta interseca i tre lati di un triangolo ABC in tre punti A', B', C' tali che risulta sempre verificata la seguente relazione*

$$\frac{BA'}{CA'}\,\frac{CB'}{AB'}\,\frac{AC'}{BC'}=1»\text{.}$$

17. Un triangolo ha per vertici i punti seguenti:

$$A(-4,0), \quad B(1,2), \quad C(3,-2)$$

Scrivere le equazioni delle seguenti rette:

r) congiungente A con O,
s) congiungente B con O,
t) congiungente C con O.

Determinare i seguenti punti:

A' d'intersezione di r con la retta BC,
B' d'intersezione di s con la retta AC,
C' d'intersezione di t con la retta AB.

Verificare che risulta

$$\frac{BA'}{CA'}\,\frac{CB'}{AB'}\,\frac{AC'}{BC'}=-1$$

18. Ripetere l'esercizio 17 a partire dallo stesso triangolo, ma considerando come rette r, s, t le congiungenti ciascun vertice del triangolo col punto $D(3,0)$.

Svolgendo gli esercizi 17 e 18, si è verificato, in due casi particolari, il teorema di Ceva *(1648-1734): «le rette congiungenti i vertici A, B, C di un triangolo con un punto qualunque del piano segano i lati opposti in tre punti A', B', C' tali che risulta sempre verificata la relazione seguente*

$$\frac{BA'}{CA'}\,\frac{CB'}{AB'}\,\frac{AC'}{BC'}=-1»\text{.}$$

19. Sono dati i due triangoli ABC e $A'B'C'$, che hanno per vertici i seguenti punti:

$A(2,8)$, $B(12,0)$, $C(2,0)$
$A'(15,8)$, $B'(15,4)$, $C'(12,5)$.

Determinare i seguenti punti:

D, d'intersezione delle rette AB e $A'B'$,
E, d'intersezione delle rette BC e $B'C'$,
F, d'intersezione delle rette AC e $A'C'$.

Verificare le seguenti proprietà:

- i tre punti D, E, F sono allineati,
- le rette AA', BB', CC' si incontrano in uno stesso punto P.

20. Ripetere l'esercizio 19 a partire dai due triangoli ABC e $A'B'C'$, che hanno per vertici i seguenti punti:

$A(4,1)$, $B(0,6)$, $C(0,1)$,
$A'(4,2)$, $B'(8,12)$, $C'(3,7)$

Svolgendo gli esercizi 19 e 20, si è verificato, in due casi particolari, il teorema di Desargues *(1591-1661): «se due triangoli ABC e $A'B'C'$ sono tali che le tre coppie di lati corrispondenti (AB e $A'B'$, AC e $A'C'$, BC e $B'C'$) si incontrano in tre punti D, E, F allineati su una retta r, allora le rette AA', BB', CC' si incontrano in uno stesso punto P e viceversa»*

21. È dato un esagono intrecciato $ABOCDE$, che ha per vertici i seguenti punti:

$A(-2,0)$, $B(2,1)$, $O(0,0)$, $C(-3,6)$, $D(3,0)$, $E(0,3)$

Verificare che i vertici E, B, C sono allineati su una stessa retta e che i punti A, O, D sono allineati su uno degli assi coordinati.
Scrivere le equazioni dei lati dell'esagono.
Determinare le coordinate dei seguenti punti:

M d'intersezione delle rette AE ed OC,
N d'intersezione delle rette AB e CD,
P d'intersezione delle rette ED e OB.

Verificare che i punti M, N, P sono allineati su una retta.

22. Ripetere l'esercizio 21 a partire dall'esagono che ha per vertici i seguenti punti:

$A(0,2)$, $B(-1,-2)$, $O(0,0)$, $C(-6,3)$, $D(0,-3)$, $E(-3,0)$

Svolgendo gli esercizi 21 e 22 si è verificato, in due casi particolari, il teorema di Pappo *(IV secolo d.C.): «se un esagono ha i vertici di posto dispari su una retta ed i vertici di posto pari su una seconda retta, i tre punti d'incontro delle coppie di lati opposti stanno su una terza retta».*

Rette parallele o perpendicolari

Gli esercizi dal 23 al 32 chiedono di riconoscere se alcune rette, di cui è assegnata l'equazione, sono parallele o perpendicolari fra loro.

Per svolgere questi esercizi è opportuno ricordare che due equazioni del tipo

$$y=mx+n \qquad e \qquad y=m'x+n'$$

- rappresentano rette parallele, se risulta

$$m=m';$$

- rappresentano rette perpendicolari se risulta

$$mm'=-1.$$

23. Scegliere fra le seguenti rette le coppie di rette parallele:

a) $y=3x-1$, *b)* $y=-3x+1$, *c)* $y=3x+4$, *d)* $y=-3x$, *e)* $y=x$

24. Ripetere l'esercizio 23 a partire dalle seguenti rette:

a) $y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$, *b)* $y=-2x+4$, *c)* $y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$, *d)* $y=-2x$, *e)* $y=\frac{2}{3}x-5$

25. Ripetere l'esercizio 23 a partire dalle rette seguenti:

a) $y=\frac{8}{5}x+\frac{1}{5}$, *b*) $y=8x+1$, *c*) $y=-8x-1$, *d*) $y=\frac{8}{5}x$, *e*) $y=8x-4$

26. Scegliere fra le seguenti rette le coppie di rette perpendicolari

a) $y=\frac{4}{3}x+1$, *b*) $y=\frac{3}{4}x-1$, *c*) $y=-\frac{3}{4}x$, *d*) $y=-\frac{4}{3}x$, *e*) $y=x+\frac{3}{4}$

27. Ripetere l'esercizio 26 a partire dalle seguenti rette:

a) $y=\frac{1}{4}x$, *b*) $y=-4x+3$, *c*) $y=4x-\frac{1}{3}$, *d*) $y=3x$, *e*) $y=-\frac{1}{4}x+2$

28. Ripertere l'esercizio 26 a partire dalle seguenti rette:

a) $y=\sqrt{2}x$, *b*) $y=x-\sqrt{2}$, *c*) $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-2$, *d*) $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+1$, *e*) $y=-\sqrt{2}x$

29. Scegliere fra le seguenti equazioni quelle che rappresentano rette parallele o rette perpendicolari:

a) $y=\frac{4}{5}x$, *b*) $y=\frac{5}{4}x$, *c*) $y=\frac{4}{5}x+6$, *d*) $y=-\frac{4}{5}x+1$, *e*) $y=-\frac{5}{4}x-1$

30. Ripetere l'esercizio 29 a partire dalle seguenti equazioni:

a) $y=8x-4$, *b*) $\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}$, *c*) $y=-8x+4$, *d*) $y=-\frac{1}{8}x$, *e*) $y=-4x$

31. Ripetere l'esercizio 29 a partire dalle seguenti equazioni:

a) $y=x-\pi$, *b*) $y=\pi x$, *c*) $y=-x$, *d*) $y=-\pi x+3$, *e*) $y=-\frac{1}{\pi}x-4$

32. Ripetere l'esercizio 29 a partire dalle seguenti equazioni:

a) $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-1$, *b*) $y=2x-\sqrt{3}$, *c*) $y=-\frac{1}{2}x$, *d*) $y=-\frac{2}{\sqrt{3}}x+2$, *e*) $y=2x$

Per risolvere i problemi proposti negli esercizi dal 33 al 40 occorre valersi sia delle condizioni di parallelismo o perpendicolarità di due rette che di alcune nozioni introdotte nei capitolo precedenti.

33. È dato il triangolo che ha per vertici i punti seguenti:

$A(1.-2)$, $B(3,2)$, $C(-1,6)$

Verificare che il segmento che unisce i punti medi di due lati è parallelo al terzo lato ed ha lunghezza metà del terzo lato.
(Per le coordinate dei punti medi v. pag. 395, per l'equazione della retta che congiunge due punti dati v. pag. 402)

34. Sono date le rette r ed s che hanno le seguenti equazioni:

r) $y=2x+4$, *s*) $y=2x-2$

Si considera il trapezio $ABCD$, costruito congiungendo i seguenti punti:

A, d'intersezione della retta r con l'asse delle y,
B, » » » » » » » x,
C, » » » s » » » y,
D, » » » » » » » x.

Verificare che i punti medi dei due lati non paralleli e i punti medi delle due diagonali si trovano su una stessa retta parallela alle due basi.

35. Sono date le rette r ed s che hanno le seguenti equazioni:

r) $y=\frac{1}{2}x+1$, *s*) $y=2x-2$

Si considera il quadrilatero $ABCD$, costruito congiungendo i seguenti punti:

A, d'intersezione della retta r con l'asse delle x,
B, » » » » » » » y,
C, » » » s » » » x,
D, » » » » » » » y.

Verificare che il quadrilatero è un trapezio isoscele e calcolarne il perimetro.

36. Riconoscere che è un trapezio rettangolo il quadrilatero che ha i lati sulle rette descritte dalle equazioni seguenti;

$$y=2x-6, \quad y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}, \quad y=2x+4, \quad y=-\frac{1}{2}x+9$$

Calcolare l'area ed il perimetro del quadrilatero.

37. È dato il quadrilatero $ABCD$, che ha per vertici i seguenti punti:

$$A(-4,4), \quad B(-3,-5), \quad C(1,-1), \quad D(2,2)$$

Considerare il quadrilatero che si ottiene congiungendo i punti M, N, P, Q, medi dei lati del quadrilatero assegnato.
Verificare le seguenti proprietà relative al quadrilatero $MNPQ$:

- i lati opposti sono paralleli,
- i lati opposti sono uguali a due a due,
- le diagonali si incontrano nel loro punto medio.

Quali delle proprietà verificate sono sufficienti per poter affermare che il quadrilatero $MNPQ$ è un parallelogramma?

38. Sono dati i quattro punti

$$A(0,5), \quad B(4,2), \quad C(-2,-6), \quad D(-6,-3)$$

Verificare le seguenti proprietà relative al quadrilatero $ABCD$:

- i lati sono uguali a due a due,
- i lati opposti sono paralleli a due a due,
- le diagonali sono uguali,
- le diagonali si incontrano nel loro punto medio,
- i lati consecutivi sono perpendicolari.

Quali fra le proprietà verificate sono sufficienti per poter affermare che il quadrilatero è un parallelogramma?
Quali proprietà sono sufficienti per dire che il quadrilatero è un rettangolo?

39. Sono dati i quattro punti:

$$A(-6,-4), \quad B(-1,-2), \quad C(1,3), \quad D(-4,1)$$

Verificare le seguenti proprietà relative al quadrilatero $ABCD$:

- i quattro lati sono uguali,
- i lati opposti sono paralleli,
- le diagonali sono perpendicolari,
- le diagonali si incontrano nel loro punto medio.

Quali delle proprietà verificate sono sufficienti per poter affermare che il quadrilatero è un parallelogramma?
Quali proprietà sono sufficienti per dire che il quadrilatero è un rombo?

40. Sono dati i quattro punti:

$$A(-3,1), \quad B(-1,-2), \quad C(2,0), \quad D(0,3)$$

Verificare le seguenti proprietà relative al quadrilatero $ABCD$:

- i quattro lati sono uguali,
- i lati opposti sono paralleli,
- le diagonali sono uguali,
- le diagonali sono perpendicolari,
- le diagonali si incontrano nel loro punto medio,
- i lati consecutivi sono perpendicolari.

Quali delle proprietà verificate sono sufficienti per poter affermare che il quadrilatero è un parallelogramma?
Quali proprietà sono sufficienti per dire che il quadrilatero è un rombo?
Quali proprietà sono sufficienti per dire che il quadrilatero è un rettangolo?
Quali proprietà sono sufficienti per dire che il quadrilatero è un quadrato?

Gli esercizi dal 41 al 46 e le considerazioni seguenti conducono a riflettere in modo più approfondito sulle condizioni di parallelismo o perpendicolarità di due rette.

41. Le equazioni di due rette r ed s sono scritte in forma segmentaria (v. esercizio 30, pag. 403), cioè le equazioni sono le seguenti:

$$r)\ \frac{x}{p}+\frac{y}{n}=1, \qquad s)\ \frac{x}{p'}+\frac{y}{n'}=1;$$

come si può riconoscere se le due rette sono parallele?
(Riscrivendo le due equazioni nella forma $y=mx+n$, si può ricavare la pendenza di ciascuna retta...
Si ottiene la condizione $\frac{n}{p}=\frac{n'}{p'}$, ossia $np'=n'p$).

42. Come si può riconoscere se due rette sono perpendicolari, quando ne è data l'equazione segmentaria?
(Ripetendo le considerazioni svolte nell'esercizio precedente, si arriva alla condizione $\frac{n}{p}=\frac{p'}{n'}$, ossia $nn'=-p'p$).

43. Scegliere fra le seguenti equazioni quelle che rappresentano rette parallele o rette perpendicolari:

$$a)\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1, \quad b)\ \frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1, \quad c)\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1, \quad d)\ x-\frac{y}{5}=1, \quad e)\ \frac{x}{5}+y=1,$$
$$f)\ \frac{x}{10}+\frac{y}{2}=1$$

44. Le equazioni di due rette r ed s sono date in forma implicita (v. esercizio 35, pag. 404), cioè le equazioni sono le seguenti:

$$r)\ ax+by+c=0, \qquad s)\ a'x+b'y+c'=0$$

Come si può riconoscere se le due rette sono parallele?
(È opportuno distinguere due casi:
A) nell'equazione di r risulta $b=0$ (cioè r è parallela all'asse delle y);
è chiaro che s è parallela ad r, se risulta anche $b'=0$.
B) risulta $b\neq 0$ e $b'\neq 0$;
si possono scrivere le due equazioni nella forma $y=mx+n$ e ricavare la pendenza di ciascuna retta...
Si arriva alla condizione $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$, o meglio $ab'=a'b$, che vale anche nel caso A).

45. Come si può riconoscere se due rette sono perpendicolari, quando ne è data l'equazione in forma implicita?
(È opportuno distinguere due casi:
A) nell'equazione di r risulta $b=0$ (cioè r è parallela all'asse delle y);
è chiaro che s è perpendicolare ad r se risulta $a'=0$ (cioè s è parallela all'asse delle x); analogamente, se risulta $b'=0$, si ha $r\perp s$, se risulta $a=0$.
B) risulta $b\neq 0$ e $b'\neq 0$.
Si arriva alla condizione $\frac{a}{b}=-\frac{b'}{a'}$, o meglio $aa'=-bb'$, che vale anche nel caso A).

46. Scegliere fra le seguenti equazioni quelle che rappresentano rette parallele o rette perpendicolari:

$a)$ $3x-4y+2=0$, $b)$ $6x-8y-3=0$, $c)$ $6x+8y-2=0$, $d)$ $4x+3y+1=0$,
$e)$ $4x-3y-5=0$

Riflessioni su condizioni necessarie e sufficienti

Alla fine dei paragrafi 2 e 3 relativamente a due rette r ed s, descritte da equazioni del tipo

$$r)\ y=mx+n, \quad s)\ y=m'x+n',$$

troviamo le seguenti conclusioni:

- *"condizione necessaria e sufficiente perché le due rette siano parallele è che risulti $m=m'$";*
- *"condizione necessaria e sufficiente perché le due rette siano perpendicolari è che risulti $mm'=-1$".*

Vogliamo ora approfondire meglio il significato di queste due affermazioni, soffermandoci in particolare sui seguenti argomenti:

A) condizioni necessarie e condizioni sufficienti,
B) l'idea di "implicazione" in matematica.

A) Le situazioni esaminate nei paragrafi 2 e 3 non mettono in rilievo la differenza fra necessità e sufficienza di una condizione.
Questa differenza si coglie più facilmente se si esamina qualche condizione solo necessaria o solo sufficiente.
Ecco qualche esempio preso dal "mondo della matematica":

I) Dal fatto che un quadrilatero è un rettangolo segue necessariamente che il quadrilatero ha i lati opposti uguali.
Ma non basta sapere che un quadrilatero ha i lati opposti uguali per essere certi che il quadrilatero è un rettangolo (potrebbe essere un parallelogramma).
Dunque per un quadrilatero l'avere i lati opposti uguali è condizione necessaria, ma non sufficiente per essere rettangolo (v. anche esercizio 38 a pag. 444).

II) Dal fatto che due grandezze sono direttamente proporzionali segue necessariamente che al crescere di una grandezza cresce anche l'altra.
Ma non basta sapere che al crescere di una grandezza cresce anche l'altra per essere certi che due grandezze siano direttamente proporzionali (v. Parte seconda, paragrafo 7).
Dunque per due grandezze variabili la condizione "al crescere dell'una cresce anche l'altra" è necessaria, ma non sufficiente per indicare grandezze direttamente proporzionali.

III) Per risolvere un'equazione di 2° grado del tipo

(1) $$ax^2+bx=0$$

basta applicare la formula risolutiva

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Ma non è necessario usare la formula per risolvere l'equazione. Infatti la (1) si può anche scrivere nel modo seguente

$$x(ax+b)=0;$$

perciò deve risultare

$$x_1=0 \qquad \text{oppure} \qquad x_2=-\frac{b}{a}.$$

Si conclude che la conoscenza della formula risolutiva è condizione sufficiente, ma non necessaria per risolvere l'equazione (1).

IV) Per trovare la distanza fra due punti di uguale ascissa

$$A(a,b) \qquad e \qquad B(a,d)$$

basta valersi della formula esposta a pag. 391, cioè

(2) $$\overline{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}.$$

Tuttavia non è necessario valersi di quest'ultima formula, si può anche scrivere direttamente

$$AB=|d-b|.$$

Dunque la conoscenza della formula (2) è una condizione sufficiente, ma non necessaria per calcolare la distanza fra due punti di uguale ascissa.

Ed ora qualche esempio preso dalla "vita di tutti i giorni", su cui discutere:

V) Non fumare è condizione necessaria o sufficiente per evitare il tumore al polmone?
VI) Avere appoggi influenti è condizione necessaria o sufficiente per ottenere un lavoro?
VII) Studiare molto a casa è una condizione necessaria o sufficiente per avere una buona valutazione scolastica?
VIII) Conoscere bene la materia da insegnare è condizione necessaria o sufficiente perché un insegnante sia valido?

B) In matematica la dimostrazione di teoremi e la scoperta di proprietà sono basate sull'idea di "implicazione" che può essere espressa in tanti modi diversi.
La parola "implicazione" ed il corrispondente verbo "implicare" provengono dal latino "in -

plicare", cioè "piegare dentro"; perciò il significato immediato di "implicare" è "racchiudere in sé, contenere, ...", anche se oggi è più conosciuto l'altro significato: "coinvolgere, rendere corresponsabile, ...".
In matematica, invece, si trova il verbo "implicare" proprio nel suo significato più proprio. Vediamo meglio di che cosa si tratta, a partire dal primo esempio esaminato nella parte A.
La proposizione «dal fatto che un quadrilatero è un rettangolo segue necessariamente che il quadrilatero ha i lati opposti uguali» è composta da due proposizioni più semplici, che per brevità indicheremo con P e Q:

P: *"il quadrilatero è un rettangolo",*
Q: *"il quadrilatero ha i lati opposti uguali".*

La proposizione composta afferma: "dal fatto che P è vera segue che Q è vera".
Perciò se possiamo verificare che P è vera (cioè che il quadrilatero è un rettangolo), siamo certi che anche Q è vera (cioè che il quadrilatero ha i lati opposti uguali); viceversa se troviamo che Q è falsa (cioè che un quadrilatero non ha i lati opposti uguali), siamo certi che anche P è falsa (cioè che il quadrilatero non è un rettangolo).
Ma può succedere che Q sia vero e P sia falso (il quadrilatero può avere i lati opposti uguali e non essere un rettangolo, ma solo un parallelogramma).
Tutte queste considerazioni si esprimono più brevemente dicendo che P implica Q (cioè la condizione P racchiude in sé la condizione Q) e si scrive così:

$$P \Rightarrow Q,$$

cioè

quadrilatero è un rettangolo$\Rightarrow$quadrilatero ha i lati opposti uguali.

Questo breve simbolo, che ha il significato specificato prima, può essere "tradotto" da frasi diverse, ma di uguale significato. Ecco qualche esempio:

- *l'ipotesi "un quadrilatero è un rettangolo" implica la tesi "il quadrilatero ha i lati opposti uguali",*
- *se un quadrilatero è un rettangolo, allora ha i lati opposti uguali,*
- *basta che un quadrilatero sia un rettangolo per sapere che ha i lati opposti uguali,*
- *bisogna che un quadrilatero abbia i lati opposti uguali perché sia un rettangolo...*

Nel caso della condizione di parallelismo fra due rette, si hanno invece le due proposizioni seguenti:

P: *"le due rette d'equazione $y=mx+n$ e $y=m'x+n'$ sono parallele",*
Q: *"risulta $m=m'$";*

e accade che

$$P \Rightarrow Q \quad e \quad Q \Rightarrow P,$$

ossia

(3) $\quad P \Leftrightarrow Q.$

Anche in questo caso il simbolo (3) può essere "tradotto" da tante frasi diverse. Ecco qualche esempio:

- *due rette d'equazione $y=mx+n$ e $y=m'x+n'$ sono parallele se e solo se risulta $m=m'$,*
- *dal fatto che due rette d'equazione $y=mx+n$ e $y=m'x+n'$ sono parallele segue che risulta $m=m'$ e viceversa.*
- *la condizione $m=m'$ è necessaria e sufficiente perché due rette d'equazione $y=mx+n$ e $y=m'x+n'$ siano parallele...*

È chiaro che considerazioni del tutto analoghe valgono per la condizione di perpendicolarità.

Intersezioni di una retta con una conica

Rette secanti, tangenti o esterne ad una conica

Gli esercizi dal 47 al 76 conducono a determinare i punti di intersezione di una retta con una conica e a riconoscere i casi in cui la retta risulta secante, tangente o esterna alla conica.

Per svolgere questi esercizi è opportuno ricordare che i punti d'intersezione debbono trovarsi sia sulla retta che sulla conica, perciò le loro coordinate debbono soddisfare sia l'equazione della retta che quella della conica. Le coordinate dei punti d'intersezione sono dunque le soluzioni del sistema formato dall'equazione della retta e dall'equazione della conica.
Risolvendo il sistema si possono presentare le seguenti situazioni:

- *si trovano come soluzioni due coppie di numeri reali; in tal caso la retta incontra la conica in due punti distinti, cioè la retta è secante.*
- *si trovano due soluzioni coincidenti; in tal caso la retta incontra la conica in due punti coincidenti, cioè la retta è tangente.*
- *non si trovano soluzioni reali; in tal caso la retta non incontra la conica, cioè è esterna.*

47. Calcolare le coordinate degli eventuali punti d'intersezione della circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-4x+6y+9=0$$

con le rette che hanno le seguenti equazioni:

$a)\ x=-1, \quad b)\ x=0, \quad c)\ x=2$

Indicare quale delle rette è secante, quale tangente e quale esterna alla circonferenza. Completare lo svolgimento dell'esercizio, tracciando i relativi grafici.

48. Ripetere l'esercizio 47 a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-6x-4y+9=0$$

e dalle rette seguenti:

$a)\ y=6, \quad b)\ y=2, \quad c)\ y=0$

49. Ripetere l'esercizio 47 a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-8x+8=0$$

e dalle rette seguenti:

$a)\ y=x, \quad b)\ x=0, \quad c)\ y=0$

50. Ripetere l'esercizio 47 a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2+10y+16=0$$

e dalle rette seguenti:

$a)\ x=0, \quad b)\ y=0, \quad c)\ y=-\frac{4}{3}x$

51. Ripetere l'esercizio 47 a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2+2x+2y-18=0$$

e dalle rette seguenti:

$a)\ y=-2x-7, \quad b)\ y=-2x+3, \quad c)\ y=-2x+14$

52. Ripetere l'esercizio 47 a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-6x=0$$

e dalle rette seguenti:

$a)\ y=-\frac{4}{3}x+9, \quad b)\ y=-3x+9, \quad c)\ y=x+9$

53. Ripetere l'esercizio 47 a partire dalla parabola d'equazione

$$y=-x^2+4$$

e dalle rette seguenti:

$a)\ y=0, \quad b)\ y=4, \quad c)\ y=5$

54. Ripetere l'esercizio 47 a partire dalla parabola d'equazione

$$y=\frac{1}{2}x^2-3x+4$$

e dalle rette seguenti:

a) $y=-2x+\frac{7}{2}$, *b*) $y=-2x$, *c*) $y=-2x+4$

55. Ripetere l'esercizio 47 a partire dalla parabola d'equazione

$$y=3x^2-2x$$

e dalle rette seguenti:

a) $y=\frac{9}{2}x-3$, *b*) $y=4x-3$, *c*) $y=-x-3$

56. Ripetere l'esercizio 47 a partire dalla parabola d'equazione

$$y=-x^2+4x-4$$

e dalle rette seguenti:

a) $y=x$, *b*) $y=0$, *c*) $y=-x$

57. Ripetere l'esercizio 47 a partire dalla parabola d'equazione

$$x=y^2-1$$

e dalle rette seguenti:

a) $x=-2$, *b*) $x=-1$, *c*) $x=2$

58. Ripetere l'esercizio 47 a partire dalla parabola d'equazione

$$x=-y^2+4y$$

e dalle rette seguenti:

a) $y=\frac{1}{2}x$, *b*) $y=\frac{1}{4}x$, *c*) $y=0$

59. Ripetere l'esercizio 47 a partire dalla parabola d'equazione

$$x=y^2+2y$$

e dalle rette seguenti:

a) $y=x$, *b*) $y=\frac{1}{2}x$, *c*) $y=0$

60. Ripetere l'esercizio 47 a partire dalla parabola d'equazione

$$x=\frac{1}{2}y^2-y-\frac{3}{2}$$

e dalle rette seguenti:

a) $y=-x-1$, *b*) $y=-\frac{1}{2}x-1$, *c*) $y=-1$

61. Ripetere l'esercizio 47 a partire dall'iperbole d'equazione

$$y=\frac{2}{x}$$

e dalle rette seguenti:

a) $y=-\frac{1}{2}x-2$, *b*) $y=-\frac{1}{2}x$, *c*) $y=-\frac{1}{2}x+3$

62. Ripetere l'esercizio 47 a partire dall'iperbole d'equazione

$$y=-\frac{1}{x}$$

e dalle rette seguenti:

a) $y=\frac{1}{4}x+1$, *b*) $y=\frac{1}{4}x$, *c*) $y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}$

63. Ripetere l'esercizio 47 a partire dall'iperbole d'equazione

$$y=-\frac{1}{6x}$$

e dalle rette seguenti:

a) $y=\frac{3}{2}x+1$, *b)* $y=x+1$, *c)* $y=1$

64. Ripetere l'esercizio 47 a partire dall'iperbole d'equazione

$$y=\frac{4}{x}$$

e dalle rette seguenti:

a) $y=-x+4$, *b)* $y=-\frac{1}{2}x+4$, *c)* $y=4$

65. Ripetere l'esercizio 47 a partire dall'iperbole d'equazione

$$y=\frac{x}{x-2}$$

e dalle rette seguenti:

a) $y=-\frac{1}{2}x$, *b)* $y=0$, *c)* $y=1$

(Per tracciare il grafico dell'iperbole assegnata v. esercizi pag. 436)

66. Ripetere l'esercizio 47 a partire dall'iperbole d'equazione

$$y=\frac{4-2x}{x}$$

e dalle rette seguenti:

a) $y=-\frac{1}{2}x+2$, *b)* $y=-x+2$, *c)* $y=2$

(Per tracciare il grafico dell'iperbole assegnata v. esercizi pag. 436)

67. Ripetere l'esercizio 47 a partire dall'ellisse d'equazione

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

e dalle rette seguenti:

a) $y=0$, *b)* $y=2$, *c)* $y=3$

68. Ripetere l'esercizio 47 a partire dall'ellisse d'equazione

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$$

e dalle rette seguenti:

a) $y=-\frac{1}{2}x+2$, *b)* $y=-\frac{1}{2}x+3$, *c)* $y=-\frac{1}{2}x$

69. Ripetere l'esercizio 47 a partire dall'ellisse d'equazione

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$$

e dalle rette seguenti:

a) $y=x+4$, *b)* $y=2x+4$, *c)* $y=\frac{1}{2}x+4$

70. Calcolare le coordinate degli eventuali punti d'intersezione della retta d'equazione

$$y=4x-4$$

con le coniche che hanno le seguenti equazioni:

a) $y=x^2$, *b)* $y=\frac{1}{2}x^2$, *c)* $y=2x^2$

Indicare quale delle coniche è secante, quale tangente e quale esterna alla retta.
Completare lo svolgimento dell'esercizio, tracciando i relativi grafici.

71. Ripetere lo svolgimento dell'esercizio 70 a partire dalla retta d'equazione

$$y=-4x+8$$

e dalle coniche seguenti:

a) $y=-x^2+2$, *b*) $y=-x^2+4$, *c*) $y=-x^2+5$

72. Ripetere lo svolgimento dell'esercizio 70 a partire dalla retta d'equazione

$$y=-x+5$$

e dalle coniche seguenti:

a) $x^2+y^2-4=0$, *b*) $x^2+y^2-9=0$, *c*) $x^2+y^2-5=0$

73. Ripetere lo svolgimento dell'esercizio 70 a partire dalla retta d'equazione

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$

e dalle coniche seguenti:

a) $x^2+y^2-10=0$, *b*) $x^2+y^2-8y+6=0$, *c*) $x^2+y^2+8y+6=0$

74. Ripetere lo svolgimento dell'esercizio 70 a partire dalla retta d'equazione

$$y=-3x+2$$

e dalle coniche seguenti:

a) $x^2+y^2-8x+6=0$, *b*) $x^2+y^2+8x+6=0$, *c*) $x^2+y^2-10=0$

75. Ripetere lo svolgimento dell'esercizio 70 a partire dalla retta d'equazione

$$y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$$

e dalle coniche seguenti:

a) $x^2+4y^2=8$, *b*) $x^2+4y^2=16$, *c*) $x^2+4y^2=4$

76. Ripetere lo svolgimento dell'esercizio 70 a partire dalla retta d'equazione

$$y=2x-1$$

e dalle coniche seguenti:

a) $y=-\frac{1}{8x}$, *b*) $y=-\frac{1}{x}$, *c*) $y=-\frac{1}{10x}$

Intersezioni di due coniche

Punti di intersezione di due coniche

Gli esercizi dal 77 al 112 conducono a determinare i punti di intersezione di due coniche e a riconoscere le reciproche posizioni delle due curve.

Per svolgere questi esercizi è opportuno ricordare che i punti d'intersezione debbono trovarsi su ambedue le curve, perciò le loro coordinate debbono soddisfare le equazioni delle due coniche. Le coordinate dei punti d'intersezione sono dunque le soluzioni del sistema formato dalle equazioni delle due coniche.
Si è così condotti a risolvere un sistema di 4° grado, che, al massimo, avrà quattro soluzioni; troveremo dunque al massimo quattro punti d'intersezione fra due coniche.
Anche in questi casi una coppia di soluzioni coincidenti caratterizza la situazione di tangenza.

77. Calcolare le coordinate degli eventuali punti d'intersezione della circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-8x-6y=0$$

con le circonferenze che hanno le seguenti equazioni:

$$a)\ x^2+y^2+8x-6y=0, \quad b)\ x^2+y^2+12x+6y+20=0, \quad c)\ x^2+y^2+14x-6y+33=0$$

Indicare in quale caso le circonferenze sono secanti, in quale sono tangenti e in quale non hanno punti in comune.
In ciascun caso determinare l'equazione dell'asse radicale r e verificare che la retta r è perpendicolare alla retta congiungente i centri delle due circonferenze.
Completare lo svolgimento dell'esercizio, tracciando i relativi grafici.
(In tutti i casi si risolve il sistema valendosi del metodo di sottrazione esposto nel testo, paragrafo 7).

78. Ripetere l'esercizio 77, a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-8x+6y=0$$

e dalle circonferenze che hanno le seguenti equazioni:

$$a)\ x^2+y^2+8x-6y=0, \quad b)\ x^2+y^2+8x-6y+9=0, \quad c)\ x^2+y^2+8x-6y-4=0$$

79. Ripetere l'esercizio 77, a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-4x-4y=0$$

e dalle circonferenze che hanno le seguenti equazioni:

$$a)\ x^2+y^2-2x-2y=0, \quad b)\ x^2+y^2+2x+2y=0, \quad c)\ x^2+y^2-4=0$$

80. Ripetere l'esercizio 77, a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-4x+2y=0$$

e dalle circonferenze che hanno le seguenti equazioni:

$$a)\ x^2+y^2-4x+2y+1=0, \quad b)\ x^2+y^2+4x-2y+1=0, \quad c)\ x^2+y^2-4x=0$$

81. Ripetere l'esercizio 77, a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-2x=0$$

e dalle circonferenze che hanno le seguenti equazioni:

$$a)\ x^2+y^2-10x-8y+16=0, \quad b)\ x^2+y^2-10x=0, \quad c)\ x^2+y^2-10x+8y+36=0$$

82. Dimostrare che l'asse radicale r di due circonferenze è sempre perpendicolare alla retta s che congiunge i centri delle due circonferenze.
(Nel testo, paragrafo 7, si trova che due circonferenze hanno, in generale, le seguenti equazioni:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0, \qquad x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$$

e l'equazione dell'asse radicale r è:

$$r)\ (a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0;$$

la retta r ha dunque la pendenza m, data da...
Scriviamo ora l'equazione della retta s, che congiunge i centri C e C' delle due circonferenze: i punti C e C' hanno le coordinate

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right), \qquad C'\left(-\frac{a'}{2}, -\frac{b'}{2}\right)$$

perciò l'equazione della retta s che passa per C e C' è...
Si ottiene che s ha una pendenza m' data da...
Si conclude che, per qualunque coppia di circonferenze, le rette r ed s hanno i coefficienti m ed m' legati dalla relazione

$$mm'=-1;$$

perciò le due rette sono sempre perpendicolari).

83. Calcolare le coordinate degli eventuali punti d'intersezione della circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-5=0$$

con le coniche che hanno le seguenti equazioni:

$$a)\ y=x^2-3, \qquad b)\ y=\frac{1}{2}x^2-3$$

Descrivere, in ciascuno dei casi, la reciproca posizione delle due curve e completare lo svolgimen-

to dell'esercizio tracciando i relativi grafici.
(I due sistemi di 4° grado si risolvono facilmente, valendosi del metodo di sostituzione. Si può procedere in due modi:

- *ricavare y dall'equazione della parabola e sostituirla nell'equazione della circonferenza;*
- *ricavare x^2 dall'equazione della parabola e sostituirla nell'equazione della circonferenza.*

Quale procedimento risulta più breve ed agevole?)

84. Ripetere l'esercizio 83 a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-4y=0$$

e dalle coniche che hanno le equazioni seguenti:

$$a)\ y=-x^2+4, \qquad b)\ y=-x^2+\frac{9}{4}$$

85. Ripetere l'esercizio 83 a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-2y=0$$

e dalle coniche che hanno le equazioni seguenti:

$$a)\ y=\frac{1}{2}x^2, \qquad b)\ y=x^2-\frac{1}{4}$$

Nel caso (a) quanti punti di intersezione sono "riuniti" nel punto O?

86. Ripetere l'esercizio 83 a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-4x=0$$

e dalle coniche che hanno le equazioni seguenti:

$$a)\ x=\frac{1}{4}y^2, \qquad b)\ x=\frac{1}{4}y^2-1$$

Nel caso (a) quanti punti di intersezione sono "riuniti" nel punto O?
(Si risolvono i due sistemi di 4° grado, valendosi ancora del metodo di sostituzione. Si possono seguire anche in questi casi due procedimenti:

- *ricavare x dall'equazione della parabola e sostituirla nell'equazione della circonferenza;*
- *ricavare y^2 dall'equazione della parabola e sostituirla nell'equazione della circonferenza.*

Quale procedimento risulta più breve ed agevole?)

87. Ripetere l'esercizio 83 a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2+4x=0$$

e dalle coniche che hanno le equazioni seguenti:

$$a)\ x=-\frac{1}{4}y^2-1, \qquad b)\ x=-\frac{1}{4}y^2-4$$

Nel caso (b) quanti punti di intersezione "sono riuniti" in O?

88. Calcolare le coordinate degli eventuali punti d'intersezione della circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-4=0$$

con le coniche che hanno le seguenti equazioni:

$$a)\ x^2+4y^2=4, \qquad b)\ x^2+4y^2=16$$

Descrivere, in ogni caso, la reciproca posizione delle due curve e completare lo svolgimento dell'esercizio tracciando i relativi grafici.

89. Ripetere l'esercizio 83 a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-9=0$$

e dalle coniche che hanno le equazioni seguenti:

$$a)\ x^2+4y^2=4, \qquad b)\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

(Si risolvono i due sistemi di 4° grado, valendosi ancora del metodo di sostituzione. Ci sono ora vari procedimenti:

- *ricavare x^2 dall'equazione della circonferenza e sostituirla nell'equazione dell'ellisse,*
- *ricavare y^2 dall'equazione della circonferenza e sostituirla nell'equazione dell'ellisse,*

– ricavare x^2 dall'equazione dell'ellisse e sostituirla nell'equazione della circonferenza,
– ricavare y^2 dall'equazione dell'ellisse e sostituirla nell'equazione della circonferenza.

Fra questi c'è un procedimento che risulta più breve o agevole?)

90. Ripetere l'esercizio 83 a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-4y+3=0$$

e dalle coniche che hanno le equazioni seguenti:

a) $x^2+4y^2=16$, *b)* $x^2+16y^2=16$

(Quali sono ora i procedimenti possibili per risolvere i due sistemi di 4° grado?)

91. Ripetere l'esercizio 83 a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-8x=0$$

e dalle coniche che hanno le equazioni seguenti:

a) $x^2+4y^2=64$, *b)* $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{6}=1$

(Quali sono ora i procedimenti possibili per risolvere i due sistemi di 4° grado?)

92. Ripetere l'esercizio 83 a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-4=0$$

e dalle coniche che hanno le equazioni seguenti:

a) $xy=2$, *b)* $xy=-1$

(Per risolvere i due sistemi di 4° grado, conviene valersi del metodo di sostituzione. I procedimenti a disposizione sono ora i seguenti:

– ricavare x dall'equazione dell'iperbole e sostituirla nell'equazione della circonferenza,
– ricavare y dall'equazione dell'iperbole e sostituirla nell'equazione della circonferenza.

Si arriva comunque a scrivere un'equazione di 4° grado biquadratica, cioè del tipo

$$ax^4+bx^2+c=0$$

Ricordiamo che equazioni di questo tipo si possono considerare come equazioni di 2° grado, purché si consideri x^2 come incognita; ci si può dunque valere della formula risolutiva dell'equazione di 2° grado, ottenendo due soluzioni x_1 e x_2. Si concluderà quindi il procedimento risolvendo le due equazioni

$$x^2=x_1 \quad e \quad x^2=x_2$$

Per una trattazione più sistematica ed esauriente sulla risoluzione delle equazioni di grado superiore al 2°, v. "Matematica nella realtà" vol. 2°, pagg. 114-118)

93. Ripetere l'esercizio 92 a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-1=0$$

e dalle coniche d'equazione

a) $xy=-4$, *b)* $xy=2$

94. Ripetere l'esercizio 92 a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-2x-2y=0$$

e dalle coniche d'equazione

a) $xy=4$, *b)* $xy=1$.

(Risolvendo il sistema relativo all'iperbole (a), si arriva all'equazione

$$x^4-2x^3-8x+16=0$$

che si riesce a risolvere perché risulta

$$x^4-2x^3-8x+16=(x-2)^2(x^2+2x+4)$$

Invece, risolvendo il sistema relativo all'iperbole (b), si arriva all'equazione

$$x^4-2x^3-2x+1=0$$

che non ha soluzioni razionali facili da scoprire per tentativi. In questo caso è il grafico che illustra la situazione e permette di valutare, approssimativamente, le coordinate dei punti di intersezione).

95. Calcolare le coordinate degli eventuali punti d'intersezione della parabola d'equazione

$$y=x^2-1$$

con le coniche che hanno le seguenti equazioni:

$$a)\ x=y^2-1, \qquad b)\ y=-x^2+1$$

Completare lo svolgimento dell'esercizio con i relativi grafici.
(Risolvendo con il metodo di sostituzione il sistema relativo alla parabola (a), si arriva all'equazione:

$$y^4-2y^2-y=0,$$

che si riesce a risolvere, dato che ha le due soluzioni razionali

$$y_1=0 \quad e \quad y_2=-1$$

Molto più semplice risulta, invece, il procedimento per risolvere, sempre con il metodo di sostituzione, il sistema relativo alla parabola b).

96. Ripetere l'esercizio 95 a partire dalla parabola d'equazione

$$y=x^2-2x$$

e dalle coniche che hanno le seguenti equazioni:

$$a)\ y=-x^2+4x, \qquad b)\ y=-x^2+6x-8$$

97. Ripetere l'esercizio 95 a partire dalla parabola d'equazione

$$x=2y^2+1$$

e dalle coniche che hanno le seguenti equazioni:

$$(a)\ x=-2y^2+1, \qquad (b)\ x=-2y^2$$

98. Ripetere l'esercizio 95 a partire dalla parabola d'equazione

$$y=4x^2-2$$

e dalle coniche che hanno le seguenti equazioni:

$$(a)\ x^2+2y^2=8, \qquad (b)\ x^2+6y^2=3$$

(Per risolvere i due sistemi ci si vale del metodo di sostituzione; si può procedere in più modi:

- *ricavare y dall'equazione della parabola e sostituirla nell'equazione dell'ellisse,*
- *ricavare x^2 dall'equazione della parabola e sostituirla nell'equazione dell'ellisse,*
- *ricavare x^2 dall'equazione dell'ellisse e sostituirla nell'equazione della parabola.*

Quale metodo risulta più rapido ed agevole?)

99. Ripetere l'esercizio 95 a partire dalla parabola d'equazione

$$x=y^2-4$$

e dalle coniche che hanno le seguenti equazioni:

$$(a)\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1, \qquad (b)\ x^2+4y^2=16$$

100. Ripetere l'esercizio 95 a partire dalla parabola d'equazione

$$y=-x^2-1$$

e dalle coniche che hanno le seguenti equazioni:

$$(a)\ x^2+3y^2=3, \qquad (b)\ x^2+2y^2=4$$

101. Ripetere l'esercizio 95 a partire dalla parabola d'equazione

$$x=y^2-4$$

e dalle coniche che hanno le seguenti equazioni:

$$(a)\ xy=3, \qquad (b)\ xy=15$$

(Per risolvere i sistemi conviene sempre valersi del metodo di sostituzione; i procedimenti possibili sono i seguenti:

- *ricavare x dall'equazione della parabola e sostituirla in quella dell'iperbole,*
- *ricavare x dall'equazione dell'iperbole e sostituirla in quella della parabola,*
- *ricavare y dall'equazione dell'iperbole e sostituirla in quella della parabola.*

C'è uno dei procedimenti che risulta più rapido o più agevole?)

102. Ripetere l'esercizio 95 a partire dalla parabola d'equazione

$$y=-\frac{1}{4}x^2+x$$

e dalle coniche che hanno le seguenti equazioni:

(a) $xy=2$, (b) $xy=-18$

103. Ripetere l'esercizio 95 a partire dalla parabola d'equazione

$$y=-x^2+12$$

e dalle coniche che hanno le seguenti equazioni:

a) $xy=16$, b) $xy=-50$

104. Calcolare le coordinate degli eventuali punti d'intersezione dell'ellisse d'equazione

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

con le coniche che hanno le seguenti equazioni:

a) $x^2+18y^2=18$, b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

Completare lo svolgimento dell'esercizio con i relativi grafici.
(Per risolvere i sistemi valendosi del metodo di sostituzione, i procedimenti possibili sono i seguenti:

- *ricavare x^2 dall'equazione della prima ellisse e sostituirla nell'equazione della seconda ellisse,*
- *ricavare y^2 dall'equazione della prima ellisse e sostituirla nell'equazione della seconda ellisse,*
- *ricavare x^2 dall'equazione della seconda ellisse e sostituirla nell'equazione della prima ellisse,*
- *ricavare y^2 dall'equazione della seconda ellisse e sostituirla nell'equazione della prima ellisse.*

Si riesce ad individuare uno dei procedimenti come il più rapido o il più semplice?)

105. Ripetere l'esercizio 104 a partire dall'ellisse d'equazione

$$x^2+9y^2=9$$

e dalle coniche che hanno le seguenti equazioni:

a) $x^2+4y^2=4$, b) $x^2+4y^2=16$

106. Ripetere l'esercizio 104 a partire dall'ellisse d'equazione

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

e dalle coniche che hanno le seguenti equazioni:

a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$

107. Ripetere l'esercizio 104 a partire dall'ellisse d'equazione

$$x^2+4y^2=4$$

e dalle coniche che hanno le seguenti equazioni:

a) $xy=1$, b) $xy=2$

(Anche in questi casi si risolveranno i sistemi con il metodo di sostituzione. Si può ricavare la x (o la y) dall'equazione dell'iperbole e sostituirla nell'equazione dell'ellisse; in ogni caso si arriva ad un'equazione di 4° grado biquadratica).

108. Ripetere l'esercizio 104 a partire dall'ellisse d'equazione

$$x^2+25y^2=25$$

e dalle coniche che hanno le seguenti equazioni:

a) $xy=-2$, b) $xy=-3$

109. Ripetere l'esercizio 104 a partire dall'ellisse d'equazione

$$x^2+16y^2=16$$

e dalle coniche che hanno le seguenti equazioni:

a) $xy=2$, b) $xy=-2$

110. Calcolare le coordinate degli eventuali punti d'intersezione dell'iperbole d'equazione

$$y=\frac{x}{x-1}$$

con le coniche che hanno le seguenti equazioni:

$$a)\ y=\frac{4}{x},\qquad b)\ y=-\frac{1}{2x}$$

Completare lo svolgimento dell'esercizio con i relativi grafici.
(In questi casi i sistemi si possono risolvere agevolmente con uno dei seguenti metodi:

- *di sottrazione,*
- *di sostituzione, ricavando y da una delle equazioni e sostituendola nell'altra,*
- *di sostituzione ricavando y da una delle equazioni e sostituendola nell'altra.*

Quale metodo risulta più rapido ed agevole?
Per tracciare il grafico della prima iperbole, vedi esercizi pag. 436)

111. Ripetere l'esercizio 110 a partire dall'iperbole d'equazione

$$y=\frac{x+1}{x}$$

e dalle coniche che hanno le equazioni seguenti:

$$a)\ y=-\frac{1}{x},\qquad b)\ y=\frac{1}{x-1}$$

112. Ripetere l'esercizio 110 a partire dall'iperbole d'equazione

$$y=\frac{2-x}{x-1}$$

e dalle coniche che hanno le equazioni seguenti:

$$a)\ y=\frac{2-x}{x-3},\qquad b)\ y=\frac{x-4}{2-x}$$

Problemi vari

Gli esercizi dal 113 al 122 richiedono di determinare i punti di intersezione fra due curve, ma conducono anche a valersi di nozioni introdotte nei capitoli precedenti.

113. Calcolare l'area S del rettangolo che ha per vertici i punti di intersezione dell'ellisse

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

con le rette a e b che hanno le equazioni seguenti:

$a)\ y=x,\qquad b)\ y=-x$ [$S=27{,}4$]

114. Scrivere l'equazione della circonferenza che ha come diametro la corda comune alle due seguenti circonferenze:

$x^2+y^2-2x+4y-32=0,\qquad x^2+y^2+4x-2y-20=0$ [$x^2+y^2-3x-7y-10=0$]

115. Scrivere l'equazione della circonferenza che passa per $O(0{,}0)$ ed ha il centro nel punto d'intersezione delle due rette seguenti:

$y=-\frac{x}{3}+\frac{7}{3},\qquad y=\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}$ [$x^2+y^2-8x-2y=0$]

116. Calcolare la lunghezza l della corda intercettata dalla parabola d'equazione

$$y=-2x^2+3x-1$$

sulla retta d'equazione

$y=-5x-5$ [$l=2\sqrt{26}$]

117. Determinare l'area S del trapezio $AA'B'B$ che ha per vertici i seguenti punti:

- A e B di intersezione fra la parabola d'equazione $y=-x^2+9x-8$ e la retta d'equazione $y=x$,
- A' e B' proiezioni ortogonali di A e B sull'asse delle x.

[$S=16\sqrt{2}$]

118. Un punto P di ordinata positiva percorre metà della circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-4x=0$$

Si considerano i seguenti punti:

- H, proiezione di P sull'asse delle y,
- K ed O, intersezioni della circonferenza con l'asse delle x.

Per quale posizione di P il triangolo PHK è isoscele?
(Il punto P ha le coordinate (x,y) variabili che debbono rispettare due condizioni:

- *soddisfare l'equazione della circonferenza, dato che il punto deve muoversi sulla semicirconferenza,*
- *inoltre rendere uguali le distanze $\overline{PH}=\overline{PK}$, dato che PHK deve essere isoscele.*

Si arriva a risolvere un sistema di 4° grado di due equazioni in due incognite).

[$P(6+\sqrt{13},\sqrt{32-6\sqrt{13}})$]

119. Sono date le rette r ed s che hanno le seguenti equazioni:

$$r)\ y=\frac{1}{5}x-3, \qquad s)\ y=-\frac{3}{10}x-\frac{1}{2}$$

Determinare le coordinate dei seguenti punti:

- P d'intersezione fra le due rette,
- Q » di r con l'asse delle y,
- R » di s » » » ».

Scrivere le equazioni delle seguenti circonferenze:

- C_1, che ha centro in P e passa per Q,
- C_2, » » » » » » » » R.

C_1 incontra l'asse delle y in un punto S (oltre che in Q), mentre C_2 incontra l'asse delle y in un punto T (oltre che in R).
Determinare il valore del rapporto $\frac{ST}{RQ}$.

$\left[\frac{ST}{RQ}=1\right]$

120. È data la parabola d'equazione

$$x=y^2-2y+4$$

Scrivere l'equazione della circonferenza che ha centro nel vertice della parabola ed il raggio lungo $\sqrt{2}$ e determinare le coordinate dei punti A e B di intersezione della circonferenza con la parabola.

[$A(4,0)$, $B(4,2)$]

121. È data la parabola d'equazione

$$y=-x^2+4$$

Considerare l'esagono $ABCDEF$, che ha per vertici i seguenti punti:

- B ed F d'intersezione della parabola con l'asse delle x,
- D d'intersezione della parabola con l'asse delle y,
- A ed E d'intersezione della parabola con la retta d'equazione $y=3x$,
- C d'intersezione della parabola con la retta d'equazione $x=-1$.

Determinare i tre punti d'intersezione delle tre coppie di lati opposti.
Verificare che questi tre punti d'intersezione si trovano su una stessa retta.

122. Ripetere l'esercizio 121 considerando dall'esagono $ABCDEF$, costruito a partire dall'ellisse d'equazione

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

congiungendo i seguenti punti:

- A e D d'intersezione dell'ellisse con l'asse delle x,
- B ed F d'intersezione dell'ellisse con l'asse delle y,
- C ed E d'intersezione dell'ellisse con la retta d'equazione $x=4$.

Svolgendo gli esercizi 121 e 122 si è verificato in due casi particolari il teorema di Pascal *(1640): se un esagono è inscritto in una conica, le intersezioni delle tre coppie di lati opposti stanno sopra una stessa retta.*

Gli esercizi dal 123 al 135 conducono a determinare i punti di intersezione fra curve per risolvere problemi tratti da vari campi scientifici.

123. Un missile M viene lanciato dalla città B verso la città C (fig. 1) e procede su una traiettoria rettilinea (BC) con una velocità, approssimativamente costante, di 800 km/h.

Il missile M viene intercettato e dalla base A viene lanciato un missile M', che insegue M, procedendo con una velocità, approssimativamente costante, di 1000 km/h.
Sapendo che la distanza AB è di 50 km, dove e quando M' raggiunge M?
Le leggi che descrivono il movimento dei due missili si possono rappresentare su un piano cartesiano, riportando il tempo t sull'asse delle ascisse e le distanze d sull'asse delle ordinate; si ottengono due rette; quale significato ha il punto P d'intersezione fra le due rette?
(Scegliendo A come punto da cui misurare le distanze d e d', percorse da M ed M', al variare del tempo t, si può descrivere il movimento dei due missili con le leggi seguenti:

(a) $d=800t+400$, *(b)* $d'=1000t$.

È chiaro che i due missili si incontrano quando risulta $d=d'$...)

Fig. 1

124. Un grosso meteorite M sta cadendo sulla Terra e, quando viene rilevato, si trova in una posizione A, ad un'altezza di 4000 m da Terra, e procede lungo la verticale con una velocità $v_1=100$ m/s. Immediatamente viene lanciato in direzione verticale un proiettile P con velocità $v_2=250$ m/s.
Il proiettile riesce a raggiungere il meteorite prima che raggiunga la Terra?
Le leggi che descrivono il movimento del meteorite e del proiettile, trascurando la resistenza dell'aria, si possono rappresentare su un piano cartesiano, riportando il tempo t sull'asse delle ascisse e le distanze d sull'asse delle ordinate; si ottengono due parabole; quale significato ha il punto B d'intersezione fra le due parabole?
(Si può scegliere A come punto da cui misurare le distanze d e d', percorse da M e da P, considerando positivi spostamenti, velocità o accelerazioni orientati verso la Terra.
In tal caso i movimenti di M e di P sono descritti dalle seguenti leggi:

$$d=100t+4{,}9t^2, \qquad d'=4000-250t+4{,}9t^2$$

È chiaro che i due corpi si incontrano quando risulta $d=d'$).

Svolgendo gli esercizi 123 e 124 si intuisce un risultato più generale; se si rappresentano sullo stesso piano cartesiano le leggi orarie di due corpi che si muovono sulla stessa traiettoria rettilinea si ottengono due curve; sono i punti d'intersezione di queste due curve a individuare le situazioni in cui i due corpi si incontrano.

125. Un proiettile viene lanciato da un cannone, che imprime una velocità $v_0=500$ m/s, inclinata in modo tale da avere le seguenti componenti lungo gli assi:

$$v_{0x}=300 \text{ m/s} \qquad \text{e} \qquad v_{0y}=400 \text{ m/s}$$

Qual'è la traiettoria del proiettile?
Qual'è la gittata del proiettile?
Trattare il problema senza considerare la resistenza dell'aria.
(Per risolvere il problema, basta esaminare separatamente il movimento nella direzione dei due assi cartesiani scelti come in fig. 2. Si ha che:

– lungo l'asse delle x la velocità è costante, perciò risulta

(1) $x=300t$

– *lungo l'asse delle y agisce l'accelerazione di gravità ($g=9,8\ m/s^2$) in verso opposto alla velocità iniziale. Risulta dunque:*

(2) $\qquad y=400t-4,9t^2$

Per avere la traiettoria del proiettile, basta eliminare il tempo t dalle due equazioni (1) e (2). Si ottiene come equazione della traiettoria

(3) $\qquad y=\dfrac{-5}{300^2}x^2+\dfrac{4}{3}x$

La gittata è la distanza fra il punto di lancio O ed il punto A, in cui il proiettile ricade a Terra.
Per determinare i punti O ed A si debbono calcolare le intersezioni della parabola (3) con l'asse delle x).

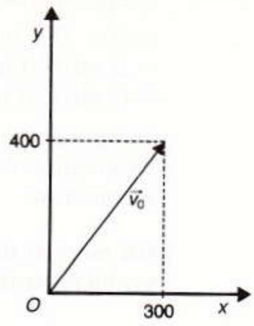


Fig. 2

126. Ripetere il problema 125, considerando il caso in cui risulta sempre

$$v_0=500\ \text{m/s}$$

ma si ha

$$v_{0x}=400\ \text{m/s} \quad \text{e} \quad v_{0y}=300\ \text{m/s}$$

Cambia la traiettoria del proiettile rispetto all'esercizio 125?
Cambia la gittata?

127. Ripetere il problema 125 in generale, indicando con v_{0x} e v_{0y} le componenti della velocità iniziale.
Si riesce a spiegare perché la gittata è la stessa negli esercizi 125 e 126?
(Per una trattazione più esauriente del movimento dei proiettili, v. Complementi I, pag. 508).

128. Sui punti di intersezione di due coniche, ecco che cosa riferisce una leggenda riportata dallo scienziato greco Eratostene (III secolo a. C.): mentre infuriava ad Atene una terribile epidemia di pestilenza, venne interrogato a Delo l'oracolo di Apollo per sapere come si poteva allontanare la pestilenza; l'oracolo disse che bisognava raddoppiare l'altare cubico di Apollo. Furono subito raddoppiate le dimensioni del cubo, ... ma l'epidemia continuò.
C'era un errore nella risoluzione del problema: se si raddoppiano le dimensioni di un cubo, il volume diventa ben 8 volte maggiore. Bisognava invece determinare il lato di un cubo che avesse volume doppio di quello di un cubo dato.
Immaginando che il cubo abbia volume 1, si è condotti a determinare il lato x di un cubo, in modo che risulti

$$x^3=2$$

Ma questo problema, che ci appare semplice esposto con il linguaggio moderno, presentava difficoltà insormontabili per gli antichi greci e il problema della "duplicazione del cubo" si tramandò con il nome di "problema di Delo".
Fu Menecmo, matematico greco del IV secolo, che riuscì a risolvere il problema a partire dal punto comune alle tre seguenti coniche:

$$y=x^2, \qquad xy=2, \qquad x=\frac{1}{2}y^2.$$

Verificare che il punto comune alle tre coniche ha proprio l'ascissa x, data da

$$x=\sqrt[3]{2}$$

e completare lo svolgimento dell'esercizio tracciando sullo stesso piano cartesiano il grafico delle tre curve.

Lo svolgimento dell'esercizio 128 fa capire che i punti d'intersezione fra due curve permettono di individuare approssimativamente le soluzioni di equazioni o di visualizzare efficacemente queste soluzioni.

Risolvere equazioni con metodi grafici

Gli esercizi dal 129 al 135 conducono a risolvere equazioni con metodi grafici.

129. Risolvere per via grafica e per via algebrica la seguente equazione

(1) $x=\sqrt{x+1}$

Le soluzioni dell'equazione data sono anche soluzioni dell'equazione

(2) $x^2=x+1$

è vero il viceversa?

(Per risolvere graficamente l'equazione (1), bisogna disegnare sullo stesso piano cartesiano le due funzioni

a) $y=x$ *e* *b)* $y=\sqrt{x+1}$

ed individuare il punto comune alle due curve.
Tenere presente che il grafico della curva (b) è un ramo della parabola d'equazione $y^2=x+1$, *cioè* $x=y^2-1$.
Per risolvere graficamente l'equazione (2), si disegnano sullo stesso riferimento le due curve d'equazione

$y=x^2$ *e* $y=x+1$*)*

130. Risolvere algebricamente e graficamente la seguente equazione

$3\sqrt{4-x}+x-6=0$

(L'equazione si può scrivere nella forma

$\sqrt{4-x}=\ldots$

e dunque occorre determinare i punti d'intersezione fra le curve d'equazione

$y=\sqrt{4-x}$ *e...)*

131. Risolvere algebricamente e graficamente la seguente equazione

$y=\sqrt{2x-x^2}$

(Per rappresentare la funzione $y=\sqrt{2x-x^2}$, *tenere presente che si tratta di una delle semicirconferenze d'equazione*

$y^2=2x-x^2$, *cioè* $x^2+y^2-2x=0$*)*

132. Risolvere per via grafica l'equazione

$x^3+2x-1=0$

(Tenere presente che l'equazione si può scrivere nella forma

$x^3=-2x+1$

perciò, per individuare le soluzioni, basta indicare sul piano cartesiano gli eventuali punti comuni alle due curve seguenti:

a) $y=x^3$ *e* *b)* $y=-2x+1$

La curva (b) è una retta, mentre la curva (a) ha il grafico di fig. 3, di cui si è parlato nel testo.

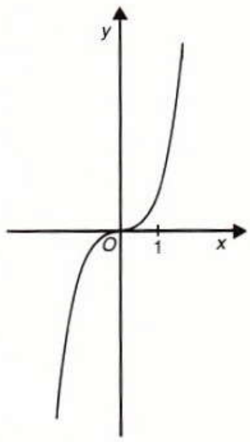


Fig. 3

133. Risolvere per via grafica l'equazione

$x^3-x^2+2=0$

(Ora, scrivendo l'equazione nella forma

$x^3=x^2-2$

si è condotti a determinare gli eventuali punti d'intersezione fra la curva d'equazione

$y=x^3$

e la parabola d'equazione

$y=x^2-2$*)*

134. Risolvere per via grafica l'equazione

$$x^4-3x^2+1=0$$

(Scrivendo l'equazione nella forma

$$x^4=3x^2-1$$

si è condotti a determinare gli eventuali punti d'intersezione della parabola d'equazione

$$y=3x^2-1$$

con la curva d'equazione

$$y=x^4$$

Che abbiamo rappresentato in fig. 4)

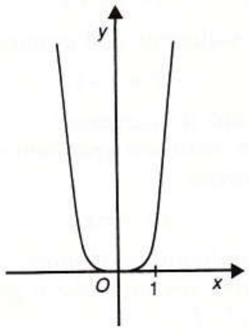


Fig. 4

135.

Risolvere per via grafica l'equazione

$$x^4+3x-2=0$$

1. Parte quinta
Esercizi

Fasci di rette

Equazione di un fascio di rette

Gli esercizi dall'1 al 10 richiedono di scrivere l'equazione di un fascio di rette improprio, cioè di un insieme rette parallele.

Per risolvere gli esercizi, basta valersi delle considerazioni svolte nel paragrafo 1, ricordando, in particolare, che l'equazione del fascio sarà del tipo:

(1) $y=ax+k,$

dove

a *indica la pendenza comune a tutte le rette del fascio,*
k *è un parametro che può assumere qualunque valore reale.*

L'equazione (1) non comprende il fascio di rette parallele all'asse delle y, che ha equazione

$x=k$

1. Scrivere l'equazione del fascio di rette parallele alla retta r d'equazione

$y=x+3$

Completare lo svolgimento dell'esercizio determinando l'equazione ed il grafico delle seguenti rette del fascio:

a, passante per $O(0,0)$, b, passante per $A(0,-1)$, c, passante per $B(0,1)$

2. Ripetere l'esercizio 1 a partire dal fascio di rette parallele alla retta r d'equazione

$y=-2x+5$

3. Ripetere l'esercizio 1 a partire dal fascio di rette parallele alla retta r d'equazione

$y=\frac{1}{2}x-4$

4. Ripetere l'esercizio 1 a partire dal fascio di rette parallele alla retta r d'equazione

$y=-x+2$

5. Ripetere l'esercizio 1 a partire dal fascio di rette parallele alla retta r d'equazione

$y=4x+8$

6. Ripetere l'esercizio 1 a partire dal fascio di rette perpendicolari alla retta r d'equazione

$y=3x-5$

(Tenere presente che tutte le rette perpendicolari ad una retta data sono parallele fra loro).

7. Ripetere l'esercizio 6 a partire dal fascio di rette perpendicolari alla retta r d'equazione

$y=-\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}$

8. Ripetere l'esercizio 6 a partire dal fascio di rette perpendicolari alla retta r d'equazione

$y=\frac{7}{2}x-\frac{4}{5}$

9. Ripetere l'esercizio 6 a partire dal fascio di rette perpendicolari alla retta r d'equazione

$$y=-4x-\frac{5}{4}$$

10. Ripetere l'esercizio 6 a partire dal fascio di rette perpendicolari alla retta r d'equazione

$$y=\frac{8}{3}x+\frac{9}{4}$$

Gli esercizi dall'11 al 19 conducono a riconoscere fasci di rette impropri e a tracciare il grafico di alcune rette di un fascio.

Per svolgere gli esercizi, è necessario ricordare che un fascio di rette improprio si presenta sempre nella forma

$$y=ax+k,$$

oppure

$$x=k,$$

dove,

a è un numero dato, mentre k è un parametro che può assumere qualunque valore reale.

È chiaro che il parametro può essere anche indicato con un'altra lettera.

11. Riconoscere fra le seguenti equazioni quelle che rappresentano fasci di rette impropri. Relativamente ad ogni fascio di rette improprio, tracciare il grafico della retta passante per $O(0,0)$.

(a) $y=-3x+k$, (b) $y=\frac{2}{3}x+n$, (c) $y=\frac{1}{x}+k$, (d) $y=h$

12. Ripetere l'esercizio 11 a partire dalle seguenti equazioni:

(a) $y=x^2+k$, (b) $x=t$, (c) $y=-\frac{3}{4}x+h$, (d) $2x+3y-6k=0$

(Esaminare con attenzione l'equazione (d), che rappresenta ancora un fascio di rette improprio: basta esplicitare la y per ottenere...)

13. Ripetere l'esercizio 11 a partire dalle seguenti equazioni:

(a) $y=\sqrt{2}x+h$, (b) $y=\sqrt{2x}+k$, (c) $x+y=s$, (d) $2x-y=b$

14. Ripetere l'esercizio 11 a partire dalle seguenti equazioni:

(a) $y=h+4x$, (b) $k-2x=y$, (c) $y-k=\frac{1}{4}x$, (d) $3x+4h-8k=0$

15. Ripetere l'esercizio 11 a partire dalle seguenti equazioni:

(a) $3xy+6k=0$, (b) $3x+y+6k=0$, (c) $h=2x$, (d) $n=4y$

16. Verificare che le seguenti equazioni descrivono sempre lo stesso fascio di rette.

(a) $y=-3x+k$, (b) $y+3x=h$, (c) $2y+6x-k=0$, (d) $s-3x=y$

Determinare l'equazione ed il grafico delle seguenti rette del fascio:

r, passante per $A(0,-1)$, s, passante per $B(-1,0)$, t, passante per $C(1,3)$

(È necessario ricordare che una retta passa per un punto solo se le coordinate del punto soddisfano l'equazione della retta).

17. Verificare che le seguenti equazioni descrivono sempre lo stesso fascio di rette.

(a) $y=\frac{4}{3}x+k$, (b) $3y-4x=3h$, (c) $16x-12y+12k=0$, (d) $\frac{3s+4x}{3}=y$

Determinare l'equazione ed il grafico delle seguenti rette del fascio:

r, passante per $A(0,3)$, s, passante per $B(3,0)$, t, passante per $C(2,-1)$

18. È data l'equazione del seguente fascio di rette:

$$y=\frac{5}{6}x+k.$$

Scrivere almeno altre due equazioni che rappresentino lo stesso fascio di rette.

Determinare l'equazione ed il grafico delle seguenti rette del fascio:

r, passante per $A(0,2)$, s, passante per $B(-2,0)$, t, passante per $C(-1,4)$

19. È data l'equazione del seguente fascio di rette:

$$y=-\frac{4}{3}x+k.$$

Scrivere altre due equazioni che rappresentino lo stesso fascio di rette.
Determinare l'equazione ed il grafico delle seguenti rette del fascio:

r, passante per $A(0,-4)$, s, passante per $B(4,0)$, t, passante per $C\left(1,-\frac{3}{2}\right)$

Gli esercizi dal 20 al 25 richiedono di scrivere l'equazione di un fascio di rette proprio, cioè di un insieme di rette che passano per uno stesso punto P, il centro del fascio.

Per risolvere gli esercizi, basta valersi delle considerazioni svolte nel paragrafo 1, ricordando, in particolare, che l'equazione del fascio sarà del tipo:

(2) $(y-b)=h(x-a)$,

dove

a e b indicano le coordinate del punto $P(a,b)$, comune a tutte le rette del fascio,
h è un parametro che può assumere qualunque valore reale.

20. Scrivere l'equazione del fascio di rette che ha per centro il punto $O(0,0)$.
Completare lo svolgimento dell'esercizio, determinando l'equazione ed il grafico delle seguenti rette del fascio:

a, parallela alla retta r d'equazione $y=2x-3$,
b, perpendicolare alla stessa retta r,
c, passante per $B(3,1)$

21. Scrivere l'equazione del fascio di rette che ha per centro il punto $A(0,2)$.
Completare lo svolgimento dell'esercizio, determinando l'equazione ed il grafico delle seguenti rette del fascio:

a, parallela alla retta r d'equazione $y=-\frac{5}{3}x+1$,
b, perpendicolare alla stessa retta r,
c, passante per $B(-3,-4)$.

22. Scrivere l'equazione del fascio di rette che ha per centro il punto $A(2,0)$.
Completare lo svolgimento dell'esercizio, determinando l'equazione ed il grafico delle seguenti rette del fascio:

a, parallela alla retta r d'equazione $y=3x-\frac{8}{5}$,
b, perpendicolare alla stessa retta r,
c, passante per $B\left(0,-\frac{3}{4}\right)$

23. Scrivere l'equazione del fascio di rette che ha per centro il punto $A(-1,3)$.
Completare lo svolgimento dell'esercizio, determinando l'equazione ed il grafico delle seguenti rette del fascio:

a, parallela alla retta r d'equazione $y=-\frac{4}{7}x+\frac{8}{7}$,
b, perpendicolare alla stessa retta r,
c, passante per $B(0,-3)$

24. Scrivere l'equazione del fascio di rette che ha per centro il punto $A(4,-3)$.
Completare lo svolgimento dell'esercizio, determinando l'equazione ed il grafico delle seguenti rette del fascio:

a, parallela alla retta r d'equazione $y=-x+1$,
b, perpendicolare alla stessa retta r,
c, passante per $B(-3,5)$

25. Scrivere l'equazione del fascio di rette che ha per centro il punto $A(-5,-3)$.
Completare lo svolgimento dell'esercizio, determinando l'equazione ed il grafico delle seguenti rette del fascio:

a, parallela alla retta r d'equazione $y=x-3$,
b, perpendicolare alla stessa retta r,
c, passante per $O(0,0)$,

Gli esercizi dal 26 al 34 conducono a riconoscere fasci di rette propri, a determinarne il centro e a tracciare il grafico di alcune rette del fascio.

Per svolgere gli esercizi, è opportuno tenere presente che l'equazione del fascio di rette di centro $P(a,b)$ è

(2) $\quad y-b=h(x-a)$

svolgendo i calcoli indicati e ricavando la y, l'equazione assume la forma:

$$y=hx+b-ha$$

dove a e b sono due numeri dati, mentre h è il parametro, che può essere anche indicato con un'altra lettera.
Per determinare il centro P di un fascio di rette proprio si può procedere in due modi:
I) scrivere l'equazione assegnata nella forma (2), che mette in evidenza le coordinate a e b del punto P;
II) assegnare due valori al parametro, in modo da determinare due rette del fascio e determinare il punto P comune alle due rette.

26. Riconoscere fra le seguenti equazioni quelle che rappresentano fasci di rette propri.

(a) $y=hx$, $\quad (b)$ $y=hx+1$, $\quad (c)$ $y=h(x+1)$, $\quad (d)$ $y=hx-h$

Relativamente ad ogni fascio di rette proprio, determinare il centro del fascio; determinare l'equazione ed il grafico della retta che ha pendenza 2.

27. Riconoscere fra le seguenti equazioni quelle che rappresentano fasci di rette propri.

(a) $y=hx-2$, $\quad (b)$ $y=hx-2h$, $\quad (c)$ $y=hx-2h+3$, $\quad (d)$ $y=hx+k$

Relativamente ad ogni fascio di rette proprio, determinare il centro del fascio e tracciare il grafico della retta che ha pendenza -1.

28. Riconoscere fra le seguenti equazioni quelle che rappresentano fasci di rette propri.

(a) $y=x^2+hx$, $\quad (b)$ $y=1+hx$, $\quad (c)$ $y-mx=3-m$, $\quad (d)$ $y+t=tx-2$

Relativamente ad ogni fascio di rette proprio, determinare il centro del fascio e tracciare il grafico della retta perpendicolare alla retta r d'equazione $y=3x+4$.

29. Riconoscere fra le seguenti equazioni quelle che rappresentano fasci di rette propri.

(a) $y=hx+h-\frac{3}{2}$, $\quad (b)$ $(h-3)x+y-2=0$, $\quad (c)$ $3y-3mx+2m+12=0$

Relativamente ad ogni fascio di rette proprio, determinare il centro del fascio e tracciare il grafico della retta che passa per $O(0,0)$.
(Particolare attenzione all'ultima equazione che rappresenta ancora un fascio proprio di rette: basta esplicitare la y per scrivere l'equazione nella forma...)

30. Riconoscere fra le seguenti equazioni quelle che rappresentano fasci di rette propri.

(a) $y=mx-m\sqrt{3}$, $\quad (b)$ $y=mx+2m+1$, $\quad (c)$ $2mx-2y+2m+3=0$

Relativamente ad ogni fascio di rette proprio, determinare il centro del fascio e tracciare il grafico della retta che passa per $A(0,1)$.

31. Verificare che le seguenti equazioni descrivono sempre lo stesso fascio di rette.

(a) $y+2=h\left(x-\frac{3}{4}\right)$, $\quad (b)$ $y=mx-\frac{3}{4}m-2$, $\quad (c)$ $4mx-4y-3m-8=0$

Determinare l'equazione ed il grafico delle seguenti rette del fascio:

r, passante per $A(-1,3)$,
s, parallela alla retta v d'equazione $y=\sqrt{2}x-1$,
t, perpendicolare alla stessa retta v.

32. Verificare che le seguenti equazioni descrivono sempre lo stesso fascio di rette.

$(a)\ y=\frac{4}{3}x+k,\qquad (b)\ 3y-4x=3h,\qquad (c)\ 16x-12y+12k=0,\qquad (d)\ \frac{3s+4x}{3}=y$

Determinare l'equazione ed il grafico delle seguenti rette del fascio:

r, passante per $A(3,2)$,
s, parallela alla retta vd'equazione $y=-0{,}4x+0{,}1$,
t, perpendicolare alla stessa retta v.

33. È data l'equazione del seguente fascio di rette:

$$y-\frac{4}{3}=h\left(x-\frac{5}{6}\right)$$

Scrivere almeno altre due equazioni che rappresentino lo stesso fascio di rette.
Determinare l'equazione ed il grafico delle seguenti rette del fascio:

r, passante per $O(0,0)$,
s, parallela alla bisettrice del I e III quadrante.

34. È data l'equazione del seguente fascio di rette:

$$y+\frac{3}{5}=h\left(x+\frac{9}{4}\right)$$

Scrivere almeno altre due equazioni che rappresentino lo stesso fascio di rette.
Determinare l'equazione ed il grafico delle seguenti rette del fascio:

r, parallela all'asse delle x,
s, passante per $A(-1,0)$,
t, perpendicolare alla bisettrice del I e III quadrante.

Gli esercizi dal 35 al 41 conducono a riflettere in modo più approfondito sulla nozione di fascio di rette proprio o improprio.

35. Riconoscere quali fra le seguenti equazioni rappresentano fasci di rette propri e quali rappresentano fasci di rette impropri.
Relativamente ai fasci di rette propri, determinare il centro P del fascio; relativamente ai fasci impropri disegnare la retta del fascio passante per $O(0,0)$.

$(a)\ y=(x+1)h,\qquad (b)\ y=x+h,\qquad (c)\ y=hx+1,\qquad (d)\ xy=h$

36. Ripetere l'esercizio 35 a partire dalle seguenti equazioni:

$(a)\ kx-4y-2k+3=0,\qquad (b)\ 4kx-4y+3k-2=0,\qquad (c)\ 4x-4y-4k=0$

37. Ripetere l'esercizio 35 a partire dalle seguenti equazioni:

$(a)\ 2x-3y+3k=0,\qquad (b)\ 3kx-3y+2k=0,\qquad (c)\ 3kx-3y+2=0$

38. Ripetere l'esercizio 35 a partire dalle seguenti equazioni:

$(a)\ 6tx-6y+4+5t=0,\qquad (b)\ 6nx-6y-4-5t=0,\qquad (c)\ 6x-6y-6h=0$

39. Se si parte dall'equazione della retta scritta in forma implicita (v. esercizio 35 a pag. 404), cioè

$$ax+by+c=0.$$

come si scrive l'equazione del fascio di rette per un punto $P(x_A, y_A)$?
(Seguendo un ragionamento analogo a quello esposto nel paragrafo 2, si può scrivere l'equazione di una retta "libera di muoversi nel piano" nella forma

$$hx+ky+p=0.$$

*dove h, k, p sono tre parametri, che possono variare indipendentemente l'uno dall'altro.
Se si "obbliga" la retta a passare per il punto $P(x_A, y_A)$, deve risultare*

$$hx_A+ky_A+p=0,\qquad \text{ossia}\qquad p=\dots$$

In definitiva si ottiene l'equazione del fascio di rette per P nella forma

$$(3)\qquad h(x-x_A)+k(y-y_A)=0.$$

È interessante osservare che nell'equazione (3) è compresa anche la retta parallela all'asse delle y, che si ottiene per $k=0$ ed $h\neq 0$)

40. Riconoscere quali fra le seguenti equazioni rappresentano fasci di rette propri; relativamente ad ogni fascio di rette proprio, determinare il centro P del fascio.

(a) $hx+ky+2h+3k=0$, (b) $hx+ky=0$, (c) $2hx+2ky-h-3k=0$

41. Ripetere l'esercizio 40 a partire dalle seguenti equazioni:

(a) $4hx+10k=3h-4ky$, (b) $hx+ky=k$, (c) $hx+ky=h$

Problemi che si risolvono con i fasci di rette

Gli esercizi dal 42 al 65 si risolvono basandosi su fasci di rette propri o impropri, ma richiedono anche di valersi di nozioni esposte precedentemente nel testo.

42. È data la retta r d'equazione

$$y=-5x+3$$

ed il punto $A(2,1)$.
Dopo aver verificato che il punto A non si trova sulla retta r, determinare l'equazione ed il grafico delle seguenti rette:

a, parallela ad r e passante per A;
b, perpendicolare ad r e passante per A.

In quanti modi si può svolgere l'esercizio?
(Basarsi sul procedimento esposto nel paragrafo 2).

43. Ripetere l'esercizio 42 a partire dalla retta r d'equazione

$$y=\frac{2}{3}x+4$$

e dal punto $O(0,0)$.

44. Ripetere l'esercizio 42 a partire dalla retta r d'equazione

$$y=-\frac{7}{4}x$$

e dal punto $A(0,-3)$.

45. Ripetere l'esercizio 42 a partire dalla retta r d'equazione

$$y=-\sqrt{3}x+1$$

e dal punto $A(-2,0)$.

46. Ripetere l'esercizio 42 a partire dalla retta r d'equazione

$$y=-\frac{\sqrt{2}}{3}x$$

e dal punto $A(-3,-4)$.

47. Il punto $P(3,2)$ è il piede della perpendicolare condotta dall'origine ad una retta r. Qual'è l'equazione della retta r?
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.
(Si ottiene $y=-\frac{3}{2}x+\frac{13}{2}$*)*

48. Un triangolo ABC ha i lati che appartengono alle rette che hanno le equazioni seguenti:

$AB)$ $y=-2x-5$, $BC)$ $y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$, $AC)$ $y=-x-7$

Scrivere l'equazione della retta su cui si trova l'altezza del triangolo relativa al lato AC.
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.
(Si ottiene $y=x+\frac{17}{5}$*)*

49. È data la retta r d'equazione

$$y=x-3$$

ed il punto $P(3,2)$; determinare la distanza d del punto P dalla retta r.
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.
(La fig. 1 permette di individuare rapidamente il procedimento da eseguire:

I) si scrive l'equazione della retta s, che passa per P ed è perpendicolare ad r,
II) si determina il punto H di intersezione fra r ed s,
III) si calcola la distanza $d=\overline{PH}$.

Si ottiene $d=\sqrt{2}$)

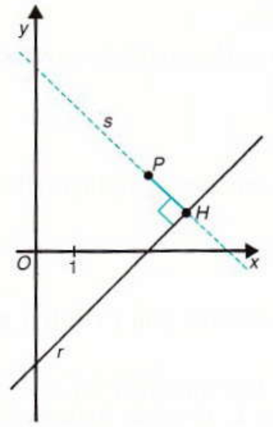


Fig. 1

50. Ripetere l'esercizio 49 per calcolare la distanza d del punto $P(1,-2)$ dalla retta r d'equazione

$$y=3x+5.$$

(Si ottiene $d=\sqrt{10}$)

51. Ripetere l'esercizio 49 per calcolare la distanza d del punto $P(1,-2)$ dalla retta r d'equazione

$$y=-x+5.$$

(Si ottiene $d=5\sqrt{2}$)

52. Trovare la formula generale, che fornisce la distanza d di un punto $A(x_A, y_A)$ da una retta r d'equazione

$$y=mx+n.$$

(Ripetendo il procedimento suggerito nell'esercizio 49, si arriva alla formula

$$d=\frac{|y_A-(mx_A+n)|}{\sqrt{1+m^2}}\Bigg)$$

53. Determinare le equazioni delle rette che passano per $A(0,2)$ e distano 1 dal punto $O(0,0)$.
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.
(Si può procedere così:

I) si scrive l'equazione del fascio di rette per A,
II) si determina la pendenza m delle rette cercate, tenendo presente la formula ottenuta nell'esercizio precedente.

Si ottengono le due rette che hanno le equazioni seguenti:

$$y=\sqrt{3}x+2, \qquad y=-\sqrt{3}x+2)$$

54. Fra i punti di ascissa 2 indicare quelli che sono equidistanti dalle due rette r ed s che hanno le equazioni seguenti:

$$r)\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}, \qquad s)\ y=3x+\frac{1}{2}$$

Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.
(È opportuno tenere presente la formula esposta nell'esercizio 52; si ottengono i due punti seguenti:

$$A\left(2, \frac{11}{8}\right) \quad e \quad B\left(2, -\frac{15}{4}\right)$$

55. Determinare la distanza d fra le due rette parallele r ed s, che hanno le seguenti equazioni:

$$r)\ y=3x+1, \qquad s)\ y=3x+5$$

Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.
(Basta calcolare la distanza del punto $P(0,1)$ della retta r dalla retta s, oppure la distanza del punto $Q(0,5)$ della retta s dalla retta r. In ogni caso si ottiene $d=\frac{1}{\sqrt{10}}$)

56. Trovare una formula generale che fornisce la distanza d fra due rette parallele r ed s, che hanno equazione

$$r)\ y=mx+n, \qquad s)\ y=mx+p$$

(Ripetendo il procedimento suggerito nell'esercizio precedente, si arriva alla formula

$$d=\frac{|p-m|}{\sqrt{1+m^2}})$$

57. Scrivere l'equazione delle due rette che sono parallele alla retta r d'equazione

$$y=\frac{1}{2}x+1$$

e distano 2 da r.
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.
(Si può procedere così:

I) scrivere l'equazione del fascio di rette parallele ad r,
II) determinare i valori del parametro k, tenendo presente la formula trovata nell'esercizio precedente.

Si ottengono le due rette che hanno le equazioni seguenti:

$$y=\frac{1}{2}x+1+\sqrt{5}, \qquad y=\frac{1}{2}x+1-\sqrt{5})$$

58. Un triangolo ABC ha per vertici i punti seguenti:

$$A(2,3), \qquad B(-2,-5), \qquad C(-4,-1)$$

Determinare l'altezza h relativa al lato AB e l'area del triangolo.
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.
(Per determinare rapidamente h si può procedere così:

I) si scrive l'equazione della retta r, che passa per i punti A e B,
II) si determina la distanza del vertice C dalla retta r, valendosi della formula trovata nell'esercizio 52.

Per calcolare l'area del triangolo, occorre ancora calcolare la lunghezza del lato AB)

59. Un triangolo ABC ha per vertici i punti seguenti:

$$A(-2,1), \qquad B(3,2), \qquad C(-1,-4)$$

Verificare che il triangolo è rettangolo ed isoscele.
Verificare che l'altezza relativa all'ipotenusa è la metà dell'ipotenusa.
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.

60. Un triangolo OAB ha per vertici i punti seguenti:

$$O(0,0), \qquad A(-1,8), \qquad B(6,4)$$

Determinare le coordinate dell'ortocentro H.
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.
(È necessario ricordare che l'ortocentro è il punto di incontro delle altezze di un triangolo. Per determinare H si può dunque procedere così:

I) si scrive l'equazione della retta OA,
II) si scrive l'equazione della retta r, che è perpendicolare ad OA e passa per B,
III) si scrive l'equazione della retta OB,
IV) si scrive l'equazione della retta s, che è perpendicolare ad OB e passa per A,
V) si determina il punto H di intersezione fra r ed s.

Per completare l'esercizio, si può verificare che la retta OH è perpendicolare alla retta AB.
Si ottiene $H\left(2,\frac{7}{2}\right)$)

61. È dato un triangolo ABC, che ha per vertici i seguenti punti:

$$A(-4,1), \quad B(1,4), \quad C(2,-1)$$

Determinare il perimetro p e l'area S del triangolo ABC.
Si traccia, per ogni vertice, la parallela al lato opposto determinando un altro triangolo $A'B'C'$.
Determinare i vertici, il perimetro p' e l'area S' del triangolo $A'B'C'$.
Quanto valgono i rapporti $\frac{p'}{p}$ e $\frac{S'}{S}$?
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.

62. Tre dei vertici di un parallelogramma $ABCD$ sono i punti seguenti:

$$A(2,1), \quad B(3,2), \quad C(4,5)$$

determinare il quarto vertice D.
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.
(Si può procedere così:

I) si determinano le equazioni delle rette AB e BC,
II) si determina l'equazione della retta r, che passa per C ed è parallela ad AB,
III) si determina l'equazione della retta s, che passa per A ed è parallela a BC,
IV) si determina il punto D di intersezione fra r ed s.

Si ottiene D(3,4))

63. Di un parallelogramma si hanno le seguenti informazioni:

– due lati si trovano sulle rette a e b che hanno le equazioni

$$a) \; y=\frac{3}{8}x-\frac{1}{8}, \qquad b) \; y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

– una delle diagonali si trova sulla retta d che ha l'equazione

$$d) \; y=\frac{2}{3}x-1$$

Determinare i vertici del parallelogramma.
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.
(Si trovano i punti A(3,1), B(−5,−2), C(9,5), D(17,8))

64. I punti $A(2,1)$ e $C(6,3)$ sono i vertici opposti di un quadrato; determinare le coordinate degli altri due vertici del quadrato.
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.
(Dato che è assegnata una delle diagonali del quadrato, è opportuno ricordare che in un quadrato le diagonali sono uguali, sono perpendicolari fra loro e si incontrano nel loro punto medio...
Si ottengono i punti B(5,0) e D(3,4))

65. Di un quadrato $ABCD$ sono date le seguenti informazioni:

– il lato AB si trova sulla retta d'equazione $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$
– il vertice A ha le coordinate $(1,-2)$
– il vertice B ha ascissa positiva ed il vertice C ha ordinata positiva.

Determinare le coordinate dei vertici B, C, D.
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.
(Si ottengono i punti B(7,1), C(4,7), D(−2,4))

Rette tangenti ad una conica

Gli esercizi dal 66 all'82 richiedono di determinare le equazioni dèlle rette tangenti ad una conica, scelte in un fascio proprio.

Per risolvere questi esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 3.

66. È data la circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-5x+4=0$$

esaminare i seguenti punti

$$O(0,0),\qquad A\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right),\qquad B(2,0)$$

per decidere quale risulta interno al cerchio, quale risulta esterno al cerchio e quale appartiene alla circonferenza assegnata.
Da ogni punto condurre le tangenti alla circonferenza, quando è possibile; determinare le coordinate degli eventuali punti di contatto.
Accompagnare lo svolgimento dell'esercizio con i relativi grafici.
(Si ottengono da O le rette d'equazione $y=\frac{3}{4}x$ e $y=-\frac{3}{4}x$; da A si ottiene la retta d'equazione $y=\frac{3}{2}$)

67. Ripetere l'esercizio 66 a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-x-y=0$$

e dai punti seguenti:

$$B(1,0),\qquad A\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\qquad C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

(Da B si ottiene la retta d'equazione $y=x-1$; da A si ottengono le due rette d'equazione $y=-x$, $y=x+1$)

68. Ripetere l'esercizio 66 a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-6x-6y+9=0$$

e dai punti seguenti:

$$O(0,0),\qquad A(3,1),\qquad B(3,4)$$

(Da O si ottengono le due rette d'equazione $y=0$, $y=\frac{12}{5}x$; da B si ottiene la retta d'equazione $y=4$)

69. Ripetere l'esercizio 66 a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-2x-2y+1=0$$

e dai punti seguenti:

$$A(1,1),\qquad B\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right),\qquad C(-1,0)$$

(Da C si ottengono le due rette d'equazione $y=0$, $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$; da B si ottiene la retta d'equazione $y=-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$)

70. Ripetere l'esercizio 66 a partire dalla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-6x+4y=0$$

e dai punti seguenti:

$$A\left(\frac{4}{3},-2\right),\qquad B(6,0),\qquad C(3,2)$$

(Da A si ottengono le due rette d'equazione $y=-\frac{3}{2}x$, $y=\frac{3}{2}x-4$; da B si ottiene la retta d'equazione $y=\frac{3}{2}x-9$)

71. È data la parabola d'equazione

$$y=x^2-3x$$

esaminare i seguenti punti:

$$A(-1,0),\qquad O(0,0),\qquad B(0,1)$$

per decidere quale risulta interno alla parabola, quale risulta esterno alla parabola e quale si trova sulla curva assegnata.
Da ogni punto condurre le tangenti alla curva, quando è possibile; determinare le coordinate degli eventuali punti di contatto.
Accompagnare lo svolgimento dell'esercizio con i relativi grafici.
(Si ottengono da A le rette d'equazione $y=-x-1$ e $y=-9x-9$; da O si ottiene la retta d'equazione $y=-3x$)

72. Ripetere l'esercizio 71 a partire dalla parabola d'equazione

$$y=-x^2+6x-5$$

e dai seguenti punti:

$$A(-3,0),\qquad B(0,-5),\qquad C(3,5)$$

(Da C si ottengono le due rette d'equazione $y=2x-1$, $y=-2x+11$; da B si ottiene la retta d'equazione $y=6x-5$)

73. Ripetere l'esercizio 71 a partire dalla parabola d'equazione

$$y=-x^2+5x-4$$

e dai punti seguenti:

$$A(1,0),\qquad B(2,1),\qquad O(0,0)$$

(Da O si ottengono le due rette d'equazione $y=9x$, $y=x$; da A si ottiene la retta d'equazione $y=3x-3$)

74. Ripetere l'esercizio 71 a partire dalla parabola d'equazione

$$x=-y^2+y+3$$

e dai punti seguenti:

$$A(-2,-2),\qquad B(3,0),\qquad O(0,0)$$

(Da A si ottengono le due rette d'equazione $y=\frac{1}{7}x-\frac{12}{7}$, $y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$; da B si ottiene la retta d'equazione $y=x-3$)

75. Ripetere l'esercizio 71 a partire dalla parabola d'equazione

$$x=2y^2-y+1$$

e dai punti seguenti:

$$A(3,1),\qquad B(1,0),\qquad C(5,2)$$

(Da C si ottengono le due rette d'equazione $y=\frac{1}{11}x+\frac{17}{11}$, $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$; da B si ottiene la retta d'equazione $y=-x+1$)

76. Ripetere l'esercizio 71 a partire dalla parabola d'equazione

$$x=-y^2-5y-4$$

e dai punti seguenti:

$$A(-4,0),\qquad B(-5,0),\qquad O(0,0)$$

(Da O si ottengono le due rette d'equazione $y=-\frac{1}{9}x$, $y=-x$; da A si ottiene la retta d'equazione $y=-\frac{1}{5}x-\frac{4}{5}$)

77. È data l'ellisse d'equazione

$$x^2+4y^2=4$$

esaminare i seguenti punti

$$A(3,0),\qquad O(0,0),\qquad B(0,1)$$

per decidere quale risulta interno alla conica, quale risulta esterno alla conica e quale si trova sulla curva assegnata.

Da ogni punto condurre le tangenti alla curva, quando è possibile; determinare le coordinate degli eventuali punti di contatto.
Accompagnare lo svolgimento dell'esercizio con i relativi grafici.

(Si ottengono da A le rette d'equazione $y=\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{3}{\sqrt{5}}$ *e* $y=-\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{3}{\sqrt{5}}$*; da B si ottiene la retta d'equazione* $y=1$*)*

78. Ripetere l'esercizio 77 a partire dall'ellisse d'equazione

$$x^2+9y^2=9$$

e dai punti seguenti:

$$A(2,0),\quad B\left(\sqrt{5},\frac{2}{3}\right),\quad C(0,2)$$

(Da C si ottengono le due rette d'equazione $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$, $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$*; da B si ottiene la retta d'equazione* $y=-\frac{\sqrt{5}}{6}x+\frac{3}{2}$*)*

79. Ripetere l'esercizio 77 a partire dall'ellisse d'equazione

$$x^2+4y^2=8$$

e dai punti seguenti:

$$A(0,-2),\quad B(-2,1),\quad C(1,1)$$

(Da A si ottengono le due rette d'equazione $y=-\frac{1}{2}x-2$, $y=\frac{1}{2}x-2$*; da B si ottiene la retta d'equazione* $y=\frac{1}{2}x+2$*)*

80. Ripetere l'esercizio 77 a partire dall'iperbole d'equazione

$$xy=2$$

e dai punti seguenti:

$$A(2,-3),\quad B(-1,-2),\quad C(2,2)$$

(Da A si ottengono le due rette d'equazione $y=-\frac{1}{2}x-2$, $y=-\frac{9}{2}x+6$*; da B si ottiene la retta d'equazione* $y=-2x+6$*)*

81. Ripetere l'esercizio 77 a partire dall'iperbole d'equazione

$$xy=-\frac{1}{6}$$

e dai punti seguenti:

$$A(2,-3),\quad B\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right),\quad C(2,4)$$

(Da C si ottengono le due rette d'equazione $y=\frac{8}{3}x-\frac{4}{3}$, $y=\frac{3}{2}x+1$*; da B si ottiene la retta d'equazione* $y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$*)*

82. Ripetere l'esercizio 77 a partire dall'iperbole d'equazione

$$xy=4$$

e dai punti seguenti:

$$A(1,3),\quad B(1,4),\quad C(1,5)$$

(Da A si ottengono le due rette d'equazione $y=-x+4$, $y=-9x+12$*; da B si ottiene la retta d'equazione* $y=-4x+8$*)*

Gli esercizi dall'83 al 98 richiedono di scegliere le tangenti ad una conica in un fascio improprio di rette.

Per questi esercizi si imposta un procedimento analogo a quello seguito per risolvere gli esercizi dal 66 all'82; si considera il sistema formato dall'equazione della conica e dall'equazione del fascio di rette; si ottengono quindi le tangenti richieste determinando i valori del parametro per cui il sistema ha due soluzioni coincidenti.

83. Scrivere le equazioni delle rette che sono parallele alla retta r d'equazione

$$y=-3x+2$$

e risultano tangenti alla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-3x-7y+12=0$$

Determinare le coordinate dei punti di contatto ed accompagnare lo svolgimento dell'esercizio con i relativi grafici.
(Il fascio di rette parallele alla retta r ha equazione $y=-3x+k$; le due tangenti richieste si ottengono per $k=13$ e $k=3$)

84. Ripetere l'esercizio 83 per determinare le rette che sono perpendicolari alla retta r d'equazione

$$y=\frac{1}{3}x-4$$

e sono tangenti alla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-8x-y+7=0$$

(Il fascio di rette perpendicolari alla retta r ha equazione $y=-3x+k$; le tangenti si ottengono per $k=3$ e $k=23$)

85. Ripetere l'esercizio 83 per determinare le rette che sono parallele alla retta r d'equazione

$$y=2x+5$$

e sono tangenti alla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-4x-6y-7=0$$

(Il fascio di rette perpendicolari alla retta r ha equazione $y=2x+k$; le tangenti si ottengono per $k=-11$ e $k=9$)

86. Ripetere l'esercizio 83 per determinare le rette che sono perpendicolari alla retta r d'equazione

$$y=x-8$$

e sono tangenti alla circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2+2x-6y+15=0$$

(Il fascio di rette perpendicolari alla retta r ha equazione $y=-x+k$; le tangenti si ottengono per $k=1$ e $k=5$)

87. Ripetere l'esercizio 83 per determinare le rette che sono parallele alla retta r d'equazione

$$y=-x+1$$

e sono tangenti all'ellisse d'equazione

$$x^2+3y^2=12$$

(Il fascio di rette parallele alla retta r ha equazione $y=-x+k$; le tangenti si ottengono per $k=4$ e $k=-4$)

88. Ripetere l'esercizio 83 per determinare le rette che sono perpendicolari alla retta r d'equazione

$$y=\frac{3}{2}x-7$$

e sono tangenti all'ellisse d'equazione

$$2x^2+3y^2=6$$

(Il fascio di rette perpendicolari alla retta r ha equazione $y=-\frac{2}{3}x+k$; le tangenti si ottengono per $k=\frac{\sqrt{30}}{3}$ e $k=-\frac{\sqrt{30}}{3}$)

89. Ripetere l'esercizio 83 per determinare le rette che sono parallele alla retta r d'equazione

$$y+2x+10$$

e sono tangenti all'ellisse d'equazione

$$x^2+3y^2=3$$

(Il fascio di rette parallele alla retta r ha equazione $y=2x+k$; le tangenti si ottengono per $k=\sqrt{13}$ e $k=-\sqrt{13}$)

90. Ripetere l'esercizio 83 per determinare le rette che sono perpendicolari alla retta r d'equazione

$$y=-\frac{3}{2}x+3$$

e sono tangenti all'iperbole d'equazione

$$xy=-\frac{1}{6}$$

(Il fascio di rette perpendicolari alla retta r ha equazione $y=\frac{2}{3}x+k$; le tangenti si ottengono per $k=\frac{2}{3}$ e $k=-\frac{2}{3}$)

91. Ripetere l'esercizio 83 per determinare le rette che sono parallele alla retta r d'equazione

$$y=-4x+15$$

e sono tangenti all'iperbole d'equazione

$$xy=4$$

(Il fascio di rette parallele alla retta r ha equazione $y=-4x+k$; le tangenti si ottengono per $k=8$ e $k=-8$)

92. Ripetere l'esercizio 83 per determinare le rette che sono parallele alla retta r d'equazione

$$y=-2x-13$$

e sono tangenti all'iperbole d'equazione

$$xy=2$$

(Il fascio di rette parallele alla retta r ha equazione $y=-2x+k$; le tangenti si ottengono per $k=4$ e $k=-4$)

93. Ripetere l'esercizio 83 per determinare le rette che sono perpendicolari alla retta r d'equazione

$$y=-x-3$$

e sono tangenti alla parabola d'equazione

$$y=x^2+8x+15.$$

(Il fascio di rette perpendicolari alla retta r ha equazione $y=x+k$; si ottiene una sola tangente per $k=\frac{11}{4}$)

94. Ripetere l'esercizio 83 per determinare le rette che sono parallele alla retta r d'equazione

$$y=3x-6$$

e sono tangenti alla parabola d'equazione

$$y=x^2-3x+2.$$

(Il fascio di rette parallele alla retta r ha equazione $y=3x+k$; si ottiene una sola tangente per $k=7$)

95. Ripetere l'esercizio 83 per determinare le rette che sono perpendicolari alla retta r d'equazione

$$y=-\frac{1}{4}x-\sqrt{3}$$

e sono tangenti alla parabola d'equazione

$$y=x^2-6x+5$$

(Il fascio di rette perpendicolari alla retta r ha equazione $y=4x+k$; si ottiene una sola tangente per $k=2$)

96. Ripetere l'esercizio 83 per determinare le rette che sono parallele alla retta r d'equazione

$$y=-x+13$$

e sono tangenti alla parabola d'equazione

$$x=y^2-8y+15$$

(Il fascio di rette parallele alla retta r ha equazione $y=-x+k$; si ottiene una sola tangente per $k=\frac{11}{4}$)

97. Ripetere l'esercizio 83 per determinare le rette che sono perpendicolari alla retta r d'equazione

$$y=4x-7$$

e sono tangenti alla parabola d'equazione

$$x=y^2-6y+5$$

(Il fascio di rette perpendicolari alla retta r ha equazione $y=-\frac{1}{4}x+k$; si ottiene una sola tangente per $k=1$)

98. Ripetere l'esercizio 83 per determinare le rette che sono parallele alla retta r d'equazione

$$y=-\frac{1}{4}x+\frac{2}{3}$$

e sono tangenti alla parabola d'equazione

$$x=y^2-4y+3$$

(Il fascio di rette perpendicolari alla retta r ha equazione $y=-\frac{1}{4}x+k$; si ottiene una sola tangente per $k=\frac{3}{4}$)

Problemi vari

Gli esercizi dal 99 al 112 conducono a determinare le tangenti ad una conica in un fascio proprio o improprio, ma richiedono anche di valersi di nozioni esposte nei paragrafi precedenti.

99. È data la parabola d'equazione

$$y=x^2+2x-3$$

Determinare le coordinate dei punti A e B, in cui la curva interseca l'asse delle x.
Scrivere le equazioni delle rette t_A e t_B, tangenti alla parabola in A e in B.
Calcolare le coordinate del punto P di intersezione delle rette t_A e t_B; verificare che P si trova sull'asse di simmetria della parabola.
Completare lo svolgimento dell'esercizio con i relativi grafici.
(Si ottengono i punti $A(-3,0)$ e $B(1,0)$, le rette $t_A)$ $y=-4x-12$ e $t_B)$ $y=4x-4$, il punto $P(-1,-8)$)

100. È data la parabola d'equazione

$$y=-x^2+4x$$

Determinare le coordinate dei punti O e A, in cui la curva interseca la retta b, bisettrice del I e III quadrante.
Scrivere l'equazione della retta t, parallela a b e tangente alla parabola.
Indicati con O' e A' le proiezioni ortogonali di O ed A sulla retta t, calcolare l'area S del rettangolo $OAA'O'$.
Completare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.
(Si ottengono i punti $O(0,0)$ e $A(3,3)$, la retta $t)$ $y=x+\frac{9}{4}$, l'area $S=\frac{27}{8}$)

101. È data la parabola d'equazione

$$x=-y^2+4y$$

Determinare le coordinate dei punti A e B, in cui la retta r d'equazione

$$y=-x+4$$

incontra la parabola.
Scrivere le equazioni delle rette t_A e t_B, tangenti alla parabola in A e in B.
Calcolare le coordinate del punto P di intersezione delle rette t_A e t_B.
Determinare l'area S del triangolo PAB.
Completare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.
(Si ottengono i punti $A(3,1)$, $B(0,4)$, $P\left(6,\frac{5}{2}\right)$; l'area $S=\frac{27}{4}$)

102. È data la parabola d'equazione

$$x=-y^2+4$$

Determinare le coordinate dei seguenti punti:

- A e B, in cui la curva incontra l'asse delle y,
- C, in cui la curva incontra l'asse delle x.

Determinare l'equazione della retta t, parallela alla bisettrice del I e III quadrante e tangente alla parabola; indicare con T il punto di contatto.
Determinare l'area S del quadrilatero $ABCT$.
Completare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.

(Si ottengono i punti $A(0,2)$, $B(0,-2)$, $C(4,0)$, $T\left(\frac{15}{4},-\frac{1}{2}\right)$; l'area $S=\frac{35}{4}$)

103. Sono date le due parabole d'equazione

$$y=\frac{x^2}{4}-1, \qquad y=-\frac{x^2}{16}+4$$

Determinare le coordinate dei punti A e B di intersezione fra le due curve.
Scrivere le equazioni delle tangenti a ciascuna parabola nei punti A e B, verificando che le due tangenti condotte in uno stesso punto sono perpendicolari.
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.

(Si ottengono i punti $A(4,3)$ e $B(-4,3)$; le rette d'equazione $y=2x-5$, $y=-\frac{1}{2}x+5$, $y=-2x-5$, $y=\frac{1}{2}x+5$)

104. È data la circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-3x-4y=0$$

La curva incontra gli assi cartesiani nei punti A e B, oltre che in O; determinare le coordinate dei punti A e B.
Scrivere le equazioni delle tangenti alla circonferenza in A, B, O.
Determinare l'area S del quadrilatero che le tangenti precedenti formano insieme alla retta AB.
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.

(Si ottengono i punti $A(3,0)$, $B(0,4)$; le rette d'equazione $y=\frac{3}{4}x+4$, $y=\frac{3}{4}x-\frac{9}{3}$, $y=-\frac{3}{4}x$, l'area $S=\frac{25}{2}$)

105. È data la circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-8x-9=0$$

Determinare le coordinate dei punti di intersezione della curva con l'asse delle y, indicando con A il punto di ordinata positiva.
Tracciare per A la retta r parallela all'asse delle x e determinare le coordinate dell'altro punto B, in cui r incontra la circonferenza.
Scrivere le equazioni delle rette t_A e t_B tangenti alla circonferenza in A e in B.
Calcolare le coordinate del punto D di intersezione delle due tangenti t_A e t_B.
Indicato con C il centro della circonferenza, calcolare l'area S del quadrilatero $ADBC$.
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.

(Si ottengono i punti $A(0,3)$, $B(8,3)$, le rette $t_A)$ $y=\frac{4}{3}x+3$, $t_B)$ $y=-\frac{4}{3}x+\frac{41}{3}$, il punto $D\left(4,\frac{25}{3}\right)$, l'area $S=\frac{100}{3}$)

106. È data la circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2+4x-2y-20$$

ed il punto $P(5,0)$.
Scrivere le equazioni delle tangenti condotte da P alla circonferenza, determinando le coordinate dei punti di contatto T e T'.
Verificare che le due tangenti sono perpendicolari fra loro.
Indicato con C il centro della circonferenza, calcolare il perimetro p e l'area S del quadrilatero $CTPT'$.
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.

(Si ottengono le rette d'equazione $y=\frac{3}{4}x-\frac{15}{4}$, $y=-\frac{4}{3}x+\frac{20}{3}$, $p=20$, l'area $S=25$)

107. Sono date le circonferenze che hanno le equazioni seguenti:

$$x^2+y^2-4x+2y=0, \qquad x^2+y^2+x+2y=0$$

Determinare le coordinate dei loro punti di intersezione A e B, scrivendo l'equazione dell'asse radicale.
Scrivere le equazioni delle tangenti a ciascuna circonferenza nei punti A e B, verificando che le due tangenti condotte in uno stesso punto sono perpendicolari.
Determinare l'area S del quadrilatero che ha per lati le quattro tangenti.
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.
(Si ottiene $S=\frac{5}{2}$)

108. Sono date la circonferenza e la parabola che hanno le seguenti equazioni:

$$x^2+y^2-10x+9=0, \qquad x=\frac{y^2}{4}$$

Verificare che le due curve si toccano in due punti A e B; calcolare le coordinate di A e di B.
Scrivere le equazioni delle tangenti alle curve nei punti A e B.
Determinare le coordinate del punto C, d'intersezione delle due tangenti.
Calcolare l'area S del triangolo ABC.
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.
(Si ottengono i punti $A(3,\sqrt{12})$, $B(3,-\sqrt{12})$, le rette $t_A)$ $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$, $t_B)$ $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}$, il punto $C(-3,0)$, l'area $S=6\sqrt{12}$)

109. Data l'ellisse d'equazione

$$x^2+4y^2=8$$

Scrivere l'equazione delle seguenti rette:
- t_1 e t_2, tangenti all'ellisse condotte da $A(0,2)$, calcolando le coordinate dei punti P e Q di contatto;
- t_3, tangente all'ellisse in $R(2,-1)$.

Si ottiene un triangolo ABC, circoscritto all'ellisse; determinare le coordinate dei vertici B e C.
Scrivere le equazioni delle tre rette che congiungono un vertice col punto di contatto del lato opposto e verificare che queste tre rette passano per uno stesso punto.
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.

110. È data l'iperbole d'equazione

$$xy=2$$

Scrivere l'equazione delle seguenti rette:
- t_1 e t_2, tangenti all'iperbole condotte da $A(-3,2)$, calcolando le coordinate dei punti P e Q di contatto;
- t_3, tangente all'iperbole in $R\left(6,\frac{1}{3}\right)$

Si ottiene un triangolo ABC, circoscritto all'iperbole; determinare le coordinate dei vertici B e C.
Scrivere le equazioni delle tre rette che congiungono un vertice col punto di contatto del lato opposto e verificare che queste tre rette passano per uno stesso punto.
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.

Svolgendo gli esercizi 109 e 110 si è verificato in due casi particolari il seguente teorema dovuto a Ceva (1648-1734): «se un triangolo è circoscritto ad una conica, le congiungenti i vertici con i punti di contatto dei lati opposti passano per uno stesso punto».

111. È dato il triangolo ABC, che è inscritto nell'ellisse d'equazione

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

ed ha per vertici i seguenti punti:

$$A\left(-4,\frac{12}{5}\right), \qquad B\left(3,\frac{16}{5}\right), \qquad C\left(3,-\frac{16}{5}\right)$$

Determinare le equazioni delle seguenti rette:
- AB, BC, CA;
- t_A, tangente all'ellisse in A,

- t_B, tangente all'ellisse in B,
- t_C, tangente all'ellisse in C.

Determinare le coordinate dei seguenti punti:

- P, d'intersezione di AB con t_C,
- Q, d'intersezione di AC con t_B,
- R, d'intersezione di BC con t_A.

Verificare che i punti P, Q, R stanno su una stessa retta.
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.

112. È dato il triangolo ABC, inscritto nell'iperbole d'equazione

$$xy=4$$

il triangolo ha per vertici i seguenti punti:

$$A(-1,-4), \quad B(1,4), \quad C(4,1).$$

Determinare le equazioni delle seguenti rette:

- AB, BC, CA;
- t_A, tangente all'iperbole in A,
- t_B, tangente all'iperbole in B,
- t_C, tangente all'iperbole in C.

Determinare le coordinate dei seguenti punti:

- P, d'intersezione di AB con t_C,
- Q, d'intersezione di AC con t_B,
- R, d'intersezione di BC con t_A.

Verificare che i punti P, Q, R stanno su una stessa retta.
Accompagnare lo svolgimento degli esercizi con i relativi grafici.

Svolgendo gli esercizi 111 e 112 si è verificato, in due casi particolari, il seguente teorema dovuto a Carnot (1753-1823): «se un triangolo è inscritto in una conica, le intersezioni dei lati con le tangenti nei vertici opposti stanno su una stessa retta».

Coniche che soddisfano condizioni assegnate

Coniche che passano per dei punti assegnati

Gli esercizi dal 113 al 118 conducono a scrivere l'equazione di circonferenze che passano per tre punti non allineati.

Per risolvere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 4, ricordando, in particolare, le seguenti nozioni:

- *l'equazione di una circonferenza è sempre del tipo* $x^2+y^2+ax+by+c=0$, *(1)*
- *una curva passa per un punto solo se le coordinate del punto soddisfano l'equazione della curva,*
- *sostituendo le coordinate di un punto dato nell'equazione (1) si ottiene un'equazione nelle incognite a, b, c,*
- *si debbono determinare i valori di a, b, c, in modo che le coordinate dei tre punti assegnati soddisfino l'equazione (1),*
- *in definitiva si è condotti a risolvere un sistema di tre equazioni nelle tre incognite a, b, c.*

113. Scrivere l'equazione della circonferenza che passa per i tre punti seguenti:

$$A(0,1), \quad B(1,2), \quad C(-3,0)$$

Completare lo svolgimento dell'esercizio tracciando il grafico della curva ottenuta.
(Si ottiene $x^2+y^2+6x-10y+9=0$)

114. Ripetere l'esercizio 113 a partire dai tre punti seguenti:

$A(0,-1)$, $B(1,-2)$, $C(1,0)$

(Si ottiene $x^2+y^2-2x+2y+1=0$)

115. Ripetere l'esercizio 113 a partire dai tre punti seguenti:

$A(-3,2)$, $B(4,1)$, $C(0,-7)$

(Si ottiene $x^2+y^2+4y-21=0$)

116. Ripetere l'esercizio 113 a partire dai tre punti seguenti:

$A(-1,1)$, $B(3,3)$, $C(2,0)$

(Si ottiene $x^2+y^2-2x-4y=0$)

117. Ripetere l'esercizio 113 a partire dai tre punti seguenti:

$A(-1,4)$, $B(5,4)$, $C(3,0)$

(Si ottiene $x^2+y^2-4x-6y+3=0$)

118. Ripetere l'esercizio 113 a partire dai tre punti seguenti:

$A(0,1)$, $B(-2,0)$, $C\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$

(Si ottiene $x^2+y^2-2x-4y-8=0$)

Gli esercizi dal 119 al 128 richiedono di scrivere l'equazione di una parabola che abbia l'asse di simmetria parallelo ad uno degli assi coordinati e passi per tre punti assegnati.

Per risolvere gli esercizi ci si basa sullo stesso ragionamento seguito per risolvere gli esercizi dal 113 al 118, ricordando le seguenti nozioni:

- *una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y ha sempre un'equazione del tipo $y=ax^2+bx+c$, (2)*
- *una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle x ha sempre un'equazione del tipo $x=ay^2+by+c$, (3)*
- *una curva passa per un punto solo se le coordinate del punto soddisfano l'equazione della curva,*
- *sostituendo le coordinate di un punto dato nell'equazione (2) (o nell'equazione (3)), si ottiene un'equazione nelle incognite a, b, c,*
- *si debbono determinare i valori di a, b, c, in modo che le coordinate dei tre punti assegnati soddisfino l'equazione (2) (o l'equazione (3)),*
- *in definitiva si è condotti a risolvere un sistema di tre equazioni nelle tre incognite a, b, c.*

119. Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle y e passante per i seguenti punti:

$A(0,-1)$, $B(-2,-7)$, $C(2,-3)$

Completare lo svolgimento dell'esercizio tracciando il grafico della curva ottenuta.
(Si ottiene l'equazione $y=-x^2+x-1$)

120. Ripetere l'esercizio 119 a partire dai seguenti punti:

$A(1,3)$, $B(-3,3)$, $C(-1,-1)$

(Si ottiene $y=x^2+2x$)

121. Ripetere l'esercizio 119 a partire dai seguenti punti:

$A(0,4)$, $B(2,2)$, $C(-1,2)$

(Si ottiene $y=-x^2+x+4$)

122. Ripetere l'esercizio 119 a partire dai seguenti punti:

$A(1,-3)$, $B(2,0)$, $C(0,-4)$

(Si ottiene $y=x^2-4$)

123. Ripetere l'esercizio 119 a partire dai seguenti punti:

$A(1,-2)$, $B(0,1)$, $C(-1,-6)$

(Si ottiene $y=-4x^2+x+1$)

124. Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle x e passante per i seguenti punti:

$$A(4,2), \quad B(-5,-1), \quad O(0,0)$$

Completare lo svolgimento dell'esercizio, tracciando il grafico della curva ottenuta.
(Si ottiene l'equazione $x=-y^2+4y$)

125. Ripetere l'esercizio 124 a partire dai seguenti punti:

$$A(1,2), \quad B(4,-4), \quad O(0,0)$$

(Si ottiene $x=\frac{1}{4}y^2$)

126. Ripetere l'esercizio 124 a partire dai seguenti punti:

$$A(3,0), \quad B(0,3), \quad C(4,1)$$

(Si ottiene $x=-y^2+2y+3$)

127. Ripetere l'esercizio 124 a partire dai seguenti punti:

$$A(4,0), \quad B(0,2), \quad C(1,1)$$

(Si ottiene $x=y^2-4y+4$)

128. Ripetere l'esercizio 124 a partire dai seguenti punti:

$$A(2,1), \quad B(0,3), \quad C\left(\frac{5}{2},2\right)$$

(Si ottiene $x=-\frac{1}{2}y^2+y+\frac{3}{2}$)

Gli esercizi dal 129 al 133 richiedono di scrivere l'equazione di un'ellisse che abbia il centro $O(0,0)$, gli assi sugli assi coordinati e passi per due punti assegnati.

Per risolvere gli esercizi ci si basa sullo stesso ragionamento seguito per risolvere gli esercizi dal 113 al 128, ricordando le seguenti nozioni:

- *un'ellisse che abbia il centro in $O(0,0)$ e gli assi sugli assi coordinati ha sempre un'equazione del tipo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (4)*
- *una curva passa per un punto solo se le coordinate del punto soddisfano l'equazione della curva,*
- *sostituendo le coordinate di un punto dato nell'equazione (4) si ottiene un'equazione nelle incognite a^2 e b^2,*
- *si debbono determinare i valori di a^2 e b^2, in modo che le coordinate dei due punti assegnati soddisfino l'equazione (4),*
- *in definitiva si è condotti a risolvere un sistema di due equazioni nelle due incognite a^2 e b^2.*

129. Scrivere l'equazione dell'ellisse che abbia il centro in $O(0,0)$, gli assi sugli assi coordinati e passi per i seguenti punti:

$$A\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right), \quad B(-2,0)$$

Completare lo svolgimento dell'esercizio tracciando il grafico della curva ottenuta.
(Si ottiene l'equazione $\frac{x^2}{4}+y^2=1$)

130. Ripetere l'esercizio 129 a partire dai seguenti punti:

$$A(0,2), \quad B\left(\sqrt{7},\frac{3}{2}\right)$$

(Si ottiene l'equazione $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$)

131. Ripetere l'esercizio 129 a partire dai seguenti punti:

$$A(-5,0), \quad B\left(3,\frac{12}{5}\right)$$

(Si ottiene l'equazione $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$)

132. Ripetere l'esercizio 129 a partire dai seguenti punti:

$$A(4{,}0), \qquad B\left(-3, \frac{16}{5}\right)$$

(Si ottiene l'equazione $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$*)*

Gli esercizi dal 133 al 137 richiedono di scrivere l'equazione di un'iperbole che abbia gli assi coordinati come asintoti e passi per un punto assegnato.

Per risolvere gli esercizi ci si basa sullo stesso ragionamento seguito per risolvere gli esercizi dal 113 al 132, ricordando le seguenti nozioni:

- *un'iperbole che abbia gli assi coordinati come asintoti ha sempre un'equazione del tipo* $xy=k$, *(5)*
- *una curva passa per un punto solo se le coordinate del punto soddisfano l'equazione della curva,*
- *sostituendo le coordinate di un punto dato nell'equazione (5) si ottiene un'equazione nella sola incognita* k.

133. Determinare l'equazione dell'iperbole, che ha gli assi coordinati come asintoti e passa per il punto $A(-2{,}1)$.
Completare lo svolgimento dell'esercizio, tracciando il grafico della curva ottenuta.
(Si ottiene $xy=-2$*)*

134. Ripetere l'esercizio 133 a partire dal punto $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$
(Si ottiene $xy=\frac{1}{6}$*)*

135. Ripetere l'esercizio 133 a partire dal punto $A\left(\frac{3}{2}, -2\right)$
(Si ottiene $xy=-3$*)*

136. Ripetere l'esercizio 133 a partire dal punto $A\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{3}\right)$
(Si ottiene $xy=\frac{1}{4}$*)*

137. Ripetere l'esercizio 133 a partire dal punto $A\left(\frac{1}{8}, -4\right)$
(Si ottiene $xy=-\frac{1}{2}$*)*

Equazioni di coniche che soddisfano varie condizioni

Lo svolgimento degli esercizi dal 113 al 137 suggerisce qualche considerazione più generale.

I) L'equazione di una circonferenza che ha il centro $C(p,q)$ *ed il raggio lungo* r *si può scrivere nella forma*

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2,$$

o nella forma

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

In ambedue i casi l'equazione dipende dal valore di tre *coefficienti; perciò alla circonferenza si possono imporre* tre *condizioni dalle quali ricavare il valore dei tre coefficienti.*

II) L'equazione di una parabola con l'asse parallelo ad uno degli assi coordinati si scrive nella forma

$$y=ax^2+bx+c,$$

oppure nella forma

$$x=ay^2+by+c$$

In ambedue i casi l'equazione dipende da tre *coefficienti* (a, b, c)*; perciò a queste coniche si possono imporre* tre *condizioni dalle quali ricavare il valore dei tre coefficienti.*

III) L'equazione di un'ellisse con centro in O(0,0) e gli assi sugli assi coordinati si scrive nella forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

e dipende dunque da due *coefficienti (a^2 e b^2); perciò a queste ellissi si possono imporre* due *condizioni dalle quali ricavare il valore dei due coefficienti.*

IV) L'equazione di un'iperbole con gli assi cartesiani come asintoti si scrive nella forma

$$xy=k$$

e dipende dunque da un solo *coefficiente (k); perciò a queste iperboli si può imporre* una sola *condizione dalla quale ricavare il valore del coefficiente.*
Finora le condizioni imposte ad una conica sono state determinate dal passaggio per tanti punti quanti sono i coefficienti da determinare, ma si possono imporre alle coniche anche altri tipi di condizione.

Gli esercizi dal 138 al 157 conducono, appunto, a determinare le equazioni di coniche che soddisfano varie condizioni e richiedono di ricordare anche nozioni esposte nei capitoli precedenti.

138. Scrivere l'equazione della parabola che ha l'asse parallelo all'asse delle y, il vertice $V(2,1)$ e passa per $A(0,-3)$.
Completare lo svolgimento dell'esercizio tracciando il grafico della curva ottenuta.
(Si impone che la parabola passi per A e per V. Occorre inoltre imporre che V sia proprio il vertice della parabola; questo si può realizzare in vari modi, fra i quali segnaliamo i seguenti:

1) imporre che risulti $-\frac{b}{2a}=2$,

2) imporre che la parabola passi anche per il punto $A'(4,-3)$, *simmetrico di A rispetto all'asse d'equazione* $x=2$...

Comunque le condizioni assegnate sono tre e la parabola è ben determinata; si ottiene $y=-x^2+4x-3$*)*

139. Scrivere l'equazione della parabola che ha l'asse parallelo all'asse delle x, il vertice $V(-1,1)$ e passa per $O(0,0)$.
Completare lo svolgimento dell'esercizio tracciando il grafico della curva ottenuta.
(Vedi le osservazioni esposte nell'esercizio precedente; si ottiene $x=y^2-2y$*)*

140. Scrivere l'equazione della parabola che ha l'asse parallelo all'asse delle y, il vertice $V(1,4)$ ed è tangente alla retta r d'equazione $y=-2x+7$.
Completare lo svolgimento dell'esercizio tracciando il grafico della curva ottenuta.
(Occorre ricordare che una parabola d'equazione $y=ax^2+bx+c$ *è tangente alla retta r, se il sistema*

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=-2x+7 \end{cases}$$

ha due soluzioni coincidenti.
Risolvendo il sistema, per esempio col metodo di sottrazione, si arriva a scrivere

$$\begin{cases} ax^2+(b+2)x+c-7=0 \\ y=-2x+7 \end{cases}$$

Si ottiene un sistema con le due soluzioni coincidenti se risulta

$$\Delta=(b+2)^2-4a(c-7)=0.$$

Le condizioni che si impongono alla parabola sono ancora una volta tre, che sono riassunte nello schema seguente:

- *passaggio per V(1,4), cioè* $4=a+b+c$,
- *V(1,4) vertice, cioè* $\frac{-b}{2a}=1$
- *tangenza alla retta r, cioè* $(b+2)^2-4c(c-7)=0$.

Si imposta così un sistema di tre equazioni nelle tre incognite a, b, c; conviene procedere per sostituzione: si ricava b dalla 2ª equazione e lo si sostituisce nella 1ª, ottenendo anche c in funzione di a...
Si ottiene $y=-x^2+2x+3$*)*

141. Ripetere l'esercizio 140, dati il vertice $V(2,-4)$ e la retta r d'equazione $y=2x-9$.
(Si ottiene $y=x^2-4x$*)*

142. Ripetere l'esercizio 140 con una parabola che ha l'asse parallelo all'asse delle x, il vertice $V(4,2)$ ed è tangente alla retta r d'equazione $y=\frac{1}{4}x$.
(Si ottiene $x=-y^2+4y$)

143. Ripetere l'esercizio 140 con una parabola che ha l'asse parallelo all'asse delle x, il vertice $V(2,4)$ ed è tangente alla retta r d'equazione $y=-x+7$
(Si ottiene $x=-\frac{1}{3}y^2+y+3$)

144. Scrivere l'equazione della parabola che ha l'asse parallelo all'asse delle y, passa per i punti $A(0,-4)$ e $B(1,-3)$ ed è tangente in B alla retta r d'equazione $y=2x-5$.
Completare lo svolgimento dell'esercizio tracciando il grafico della curva ottenuta.
(Tenere presenti le considerazioni svolte nell'esercizio 140; si ottiene $y=x^2-4$)

145. Ripetere l'esercizio 144 per una parabola che ha l'asse parallelo all'asse delle x, passa per i punti $A(-7,-2)$ e $B(-4,-1)$ ed è tangente in B alla retta r d'equazione $y=2x-2$
(Si ottiene $x=-y^2-3$)

146. Scrivere l'equazione della parabola che ha l'asse parallelo all'asse delle y, passa per i punti $A(-1,1)$ e $B(2,1)$ ed è tangente alla retta r d'equazione $y=x+3$.
Completare lo svolgimento dell'esercizio tracciando il grafico della curva ottenuta.
(Tenere presenti le considerazioni svolte nell'esercizio 140. In questo caso non è dato il punto di tangenza e si ottengono due parabole che risolvono il problema; si ha: $y=-x^2+x+3$, $y=-\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{9}x+\frac{11}{9}$. Interpretare i due risultati)

147. Ripetere l'esercizio 146 per una parabola che ha l'asse parallelo all'asse delle x, passa per i punti $A(3,0)$ e $B(0,3)$ ed è tangente alla retta r d'equazione

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$

(Si ottengono le due parabole che hanno le equazioni seguenti: $x=-y^2+2y+3$ e $x=-\frac{1}{9}y^2+\frac{2}{3}y-3$. Interpretare i due risultati)

148. Scrivere l'equazione della circonferenza che è tangente all'asse delle x nel punto $A(-3,0)$ e passa per il punto $B(0,1)$.
Completare lo svolgimento dell'esercizio tracciando il grafico della curva ottenuta.
(Occorre ricordare che una circonferenza d'equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$ è tangente all'asse delle x, se il sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ y=0 \end{cases}$$

ha due soluzioni coincidenti.
Risolvendo il sistema col metodo di sostituzione si arriva a scrivere

$$\begin{cases} x^2+ax+c=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Si ottiene un sistema con le due soluzioni coincidenti se risulta

$$\Delta=a^2-4c=0$$

Le condizioni che si impongono alla parabola sono ancora una volta tre, che sono riassunte nello schema seguente:

- *passaggio per $A(-3,0)$, cioè* $9-3a+c=0$,
- *passaggio per $B(0,1)$, cioè* $1+b+c=0$,
- *tangenza all'asse delle x, cioè* $a^2-4c=0$.

Si imposta così un sistema di tre equazioni nelle tre incognite a, b, c; conviene procedere per sostituzione: si ricava c dalla 1ª equazione e lo si sostituisce nella 3ª, ottenendo il valore di a...
Si ottiene $x^2+y^2+6x-10y+9=0$)

149. Ripetere l'esercizio 148 per determinare la circonferenza che è tangente all'asse delle y nel punto $A(0,1)$ e passa per $B(1,2)$.
(Si ottiene $x^2+y^2-2x-2y+1=0$)

150. Ripetere l'esercizio 148 per determinare la circonferenza che è tangente alla retta r d'equazione $y=-2x+7$ nel punto $A(3,1)$ e passa per $B(-3,3)$.
(Si ottiene $x^2+y^2+2x+2y-18=0$)

151. Scrivere l'equazione della circonferenza che è tangente all'asse delle x, passa per i punti $A(0,1)$ e $B(1,2)$.
Completare lo svolgimento dell'esercizio tracciando il grafico della curva ottenuta.
(Confrontare quest'esercizio con l'esercizio 148. Ora non è dato il punto di tangenza e si ottengono due circonferenze che risolvono il problema; sono $x^2+y^2+6x-10y+9=0$ e $x^2+y^2-2x-2y+1=0$. Interpretare i due risultati)

152. Scrivere l'equazione della circonferenza che è tangente all'asse delle y, passa per i punti $A(1,0)$ e $B(2,1)$.
Completare lo svolgimento dell'esercizio tracciando il grafico della curva ottenuta.
(Confrontare quest'esercizio con l'esercizio 149. Ora non è dato il punto di tangenza e si ottengono due circonferenze che risolvono il problema; sono $x^2+y^2-10x+6y+9=0$ e $x^2+y^2-2x-2y+1=0$. Interpretare i due risultati)

153. Scrivere l'equazione della circonferenza che ha il centro $C(-1,-1)$ ed è tangente alla retta s d'equazione $y=-2x+7$
Completare lo svolgimento dell'esercizio tracciando il grafico della curva ottenuta.
*(Si ottiene un procedimento molto rapido, ricordando che la tangente è perpendicolare al raggio nel punto di tangenza. Si può dunque determinare la lunghezza del raggio, calcolando la distanza di C dalla retta s, valendosi della formula esposta nell'esercizio 52 a pag. 469.
Si ottiene $(x+1)^2+(y+1)^2=20$)*

154. Ripetere l'esercizio 153 per determinare la circonferenza che ha centro $C(3,0)$ ed è tangente alla retta s d'equazione $y=\frac{1}{2}x+1$
(Si ottiene $(x-3)^2+y^2=5$)

155. Scrivere l'equazione dell'ellisse che è tangente alla retta s d'equazione $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+2$ nel punto $A\left(-\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$
Completare lo svolgimento dell'esercizio tracciando il grafico della curva ottenuta.
(Si segue un procedimento analogo a quello esposto negli esercizi 140 e 148; si ottiene $x^2+4y^2-4=0$)

156. Ripetere l'esercizio 155 per scrivere l'equazione dell'ellisse tangente alla retta $y=\frac{1}{2}x-2$ nel punto $B(2,-1)$.
(Si ottiene $x^2+4y^2=9$)

157. Scrivere l'equazione dell'iperbole, che ha gli assi cartesiani come asintoti ed è tangente alla retta d'equazione $y=-4x+8$.
Completare lo svolgimento dell'esercizio tracciando il grafico della curva ottenuta.
(Basta una sola condizione, che si impone con un procedimento analogo a quello seguito negli esercizi 140 e 148. Si ottiene $xy=4$)

158. Ripetere l'esercizio 157 per determinare l'iperbole tangente alla retta d'equazione $y=-2x-4$.
(Si ottiene $xy=2$)

Fasci di coniche

Fasci di circonferenze

Gli esercizi dal 159 al 165 indicano due sole condizioni da imporre ad una circonferenza e conducono quindi a scrivere le equazioni di alcuni fasci di circonferenze; successivamente è richiesto di individuare qualcuna delle circonferenze del fascio.

Per risolvere gli esercizi è necessario tener presenti le nozioni esposte nel paragrafo 4.

159. Scrivere il fascio di circonferenze che passano per $A(1,2)$ e $B(1,3)$.
Come varia il centro C delle circonferenze?

Determinare la curva del fascio passante per $P(2,3)$ e tracciarne il grafico.
(L'ultima circonferenza richiesta è $x^2+y^2-3x-6y+8=0$)

160. Ripetere l'esercizio 159 per il fascio di circonferenze che passano per $A(0,2)$ e $B(2,0)$.
Determinare la curva del fascio passante per $O(0,0)$
(L'ultima circonferenza richiesta è $x^2+y^2-2x-2y=0$

161. Ripetere l'esercizio 159 per il fascio di circonferenze che passano per $A(1,3)$ e $B(2,3)$.
Determinare le curve del fascio tangenti alla retta s d'equazione $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.
(Le ultime circonferenze richieste sono $x^2+y^2-3x-5y+8=0$ e $x^2+y^2-3x-13y+32=0$)

162. Scrivere l'equazione del fascio di circonferenze tangenti all'asse delle x nel suo punto $A(2,0)$.
Come varia il centro C delle circonferenze?
Determinare la curva del fascio passante per $B(0,-4)$ e tracciarne il grafico.
(L'ultima circonferenza richiesta è $x^2+y^2-4x+5y+4=0$)

163. Ripetere l'esercizio 162 per il fascio di circonferenze tangenti all'asse delle y nel punto $A(0,-1)$.
Determinare la circonferenza del fascio passante per $B(-1,0)$.
(L'ultima circonferenza richiesta è $x^2+y^2+2x+2y+1=0$)

164. Ripetere l'esercizio 162 per il fascio di circonferenze tangenti alla retta s d'equazione $y=x$ nel suo punto $O(0,0)$.
Determinare le curve del fascio tangenti alla retta t d'equazione $y=-x+2$ e tracciarne il grafico.
(Le ultime circonferenze richieste sono $x^2+y^2+2x-2y=0$ e $x^2+y^2-2x+2y=0$)

165. Ripetere l'esercizio 162 per il fascio di circonferenze tangenti alla retta s d'equazione $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$
Determinare la curva del fascio che ha il centro di ordinata 4 e tracciarne il grafico.
(L'ultima circonferenza richiesta è $x^2+y^2-8y+6=0$)

Gli esercizi dal 166 al 171 richiedono di studiare dei fasci di circonferenze, scoprendone alcune caratteristiche. Per risolvere questi esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 4.

166. È data l'equazione $x^2+y^2-2kx-1=0$
Verificare che l'equazione descrive un fascio di circonferenze, che passano tutte per i punti $A(0,1)$ e $B(0,-1)$.
Come variano il centro C ed il raggio r delle circonferenze?
Tracciare il grafico della circonferenza di raggio minimo.

167. È data l'equazione $x^2+y^2-2ky-4=0$
Verificare che l'equazione descrive un fascio di circonferenze, che passano tutte per due punti A e B da determinare.
Come variano il centro C ed il raggio r delle circonferenze?
Tracciare il grafico della circonferenza di raggio minimo.
(Per determinare i punti A e B si possono, per esempio, determinare i punti di intersezione di due qualunque circonferenze del fascio si ottengono $A(2,0)$ e $B(-2,0)$)

168. Ripetere l'esercizio 167 a partire dall'equazione seguente

$$x^2+y^2-2kx-2ky-8=0$$

(I punti comuni a tutte le circonferenze sono $A(2,2)$ e $B(-2,-2)$)

169. Ripetere l'esercizio 167 a partire dall'equazione seguente

$$x^2+y^2+3kx-2ky=0$$

Che cosa succede per $k=0$?
(Ora si trova un solo punto comune a tutte le circonferenze: è $O(0,0)$. Tutte le circonferenze sono tangenti in O alla retta...)

170. Ripetere l'esercizio 167 a partire dall'equazione seguente:

$$x^2+y^2+(k-3)x-(1+3)y+10=0$$

(Ora le circonferenze non hanno alcun punto in comune)

171. Ripetere l'esercizio 167 a partire dall'equazione

$$x^2+y^2+kx-2(1+k)y+2k-4=0$$

Si può trovare nel fascio una circonferenza di raggio uguale ad 1?
(I punti comuni a tutte le circonferenze sono $A(-2,0)$ e $B(2,2)$)

Gli esercizi dal 172 al 178 indicano due sole condizioni da imporre ad una parabola e conducono quindi a scrivere le equazioni di alcuni fasci di parabole; successivamente è richiesto di individuare nel fascio qualche parabola particolare.

Per risolvere gli esercizi si può seguire un procedimento analogo a quello seguito per risolvere gli esercizi dal 159 al 165.

172. Scrivere l'equazione del fascio di parabole che hanno l'asse parallelo all'asse delle y e passano per i punti $A(1,-1)$ e $B(-1,5)$.
Determinare la parabola del fascio che ha l'asse di equazione $x=\frac{3}{4}$; tracciarne il grafico.
(Si parte dall'equazione $y=ax^2+bx+c$, alla quale sono imposte le due condizioni seguenti:
- *passaggio per $A(1,-1)$, cioè $-1=a+b+c$;*
- *passaggio per $B(-1,5)$, cioè $5=a-b+c$...*

Il fascio ha equazione $y=kx^2-3x+2-k$; la parabola richiesta si ottiene per $k=2$)

173. Scrivere l'equazione del fascio di parabole che hanno l'asse parallelo all'asse delle y ed il vertice $V(0,2)$.
Determinare la parabola del fascio che passa per $A(1,3)$.
(All'equazione $y=ax^2+bx+c$ sono imposte le condizioni seguenti:
- *passaggio per $V(0,2)$, cioè $2=c$,*
- *$V(0,2)$ vertice, cioè $\frac{-b}{2a}=0$...*

Il fascio ha equazione $y=kx^2+2$; la parabola richiesta si ottiene per $k=1$)

174. Ripetere l'esercizio 173 per il fascio di parabole di vertice $V(-1,2)$.
Determinare la parabola del fascio che passa per $O(0,0)$.
(Il fascio è $y=kx^2+2kx+k+2$; la parabola richiesta si ottiene per $k=-2$)

175. Scrivere l'equazione del fascio di parabole che hanno l'asse parallelo all'asse delle y e sono tangenti all'asse delle x in $A(1,0)$.
Determinare la parabola del fascio che passa per $B(0,2)$.
(Si può scrivere immediatamente che il fascio deve avere equazione $y=k(x-1)^2$; perché? La parabola richiesta si ottiene per $k=2$).

176. Scrivere l'equazione del fascio di parabole che hanno l'asse parallelo all'asse delle x e passano per i punti $O(0,0)$ e $A(3,1)$.
Determinare l'equazione ed il grafico della parabola del fascio tangente alla retta d'equazione $y=x$.
*(Seguendo lo stesso procedimento esposto nell'esercizio 172, ma a partire dall'equazione $x=ay^2+by+c$, si arriva all'equazione $x=ky^2+(3-k)y$.
La parabola richiesta si ottiene per $k=2$).*

177. Scrivere l'equazione del fascio di parabole che hanno l'asse parallelo all'asse delle x ed il vertice $V(2,-1)$.
Determinare l'equazione ed il grafico della parabola che passa per $O(0,0)$.
*(Seguendo lo stesso procedimento esposto nell'esercizio 173, ma a partire dall'equazione $x=ay^2+by+c$, si arriva all'equazione $x=ky^2+2ky+2+k$.
La parabola richiesta si ottiene per $k=-2$).*

178. Scrivere l'equazione del fascio di parabole che hanno l'asse parallelo all'asse delle x e sono tangenti all'asse delle y in $A(0,-2)$.
Determinare l'equazione ed il grafico della parabola del fascio che passa per $B(-4,-1)$.
(Confrontare con l'esercizio 175. Per il fascio si può scrivere subito l'equazione $x=k(y+2)^2$; la parabola richiesta si ottiene per $k=-4$)

Gli esercizi dal 179 al 187 richiedono di studiare dei fasci di parabole, scoprendone alcune caratteristiche. È opportuno risolvere questi esercizi dopo aver "costruito fasci di parabole", risolvendo gli esercizi dal 172 al 178.

179. È data l'equazione $y=kx^2+2kx+3+k$.
Verificare che l'equazione descrive un fascio di parabole con l'asse parallelo all'asse delle y e che hanno tutte lo stesso vertice V.
Determinare l'equazione ed il grafico della parabola del fascio tangente all'asse delle x.
(Occorre ricordare che, per trovare il vertice V di una parabola d'equazione $y=ax^2+bx+c$, si svolgono i seguenti calcoli

$$x_V = \frac{-b}{2a}, \qquad y_V = ax_V^2 + bx_V + c$$

Si trova V(1,3). Si ottiene la parabola richiesta per k=3)

180. È data l'equazione $y=-x^2+k$.
Verificare che l'equazione descrive un fascio di parabole con l'asse parallelo all'asse delle y.
Come varia il vertice delle parabole?
Determinare la parabola del fascio che passa per $A(1,2)$.
(Confrontare con l'esercizio 179; il vertice percorre l'asse delle y. Si ottiene la parabola richiesta per k=3).

181. È data l'equazione $y=x^2-2x+k$.
Verificare che l'equazione descrive un fascio di parabole con l'asse parallelo all'asse delle y.
Come varia il vertice delle parabole?
Determinare la parabola del fascio che è tangente alla retta d'equazione $y=x$.
(Confrontare con l'esercizio 179; il vertice percorre la retta d'equazione x=1. Si ottiene la parabola richiesta per $k=\frac{1}{4}$*).*

182. È data l'equazione $y=kx^2-(k+1)x+5$
Verificare che l'equazione descrive un fascio di parabole che hanno l'asse parallelo all'asse delle y e passano tutte per i punti A e B da determinare.
Come varia il vertice delle parabole?
(Per determinare A e B si possono, per esempio, trovare i punti di intersezione di due qualunque parabole del fascio; si ha A(0,5) e B(1,4).
Per trovare il vertice, confrontare con l'esercizio 179; il vertice percorre la retta d'equazione y=5).

183. È data l'equazione $y=-x^2+2kx$.
Verificare che l'equazione descrive un fascio di parabole che hanno l'asse parallelo all'asse delle y e passano tutte per il punto O.
Come varia il vertice delle parabole?
(Per quanto riguarda il vertice V, valgono le considerazioni esposte nell'esercizio 179; le coordinate di V, sono date da

$$x_V=k, \qquad y_V=k^2$$

Ricavando k dalla 1ª equazione e sostituendolo nella 2ª si trova che il vertice V percorre la parabola d'equazione $y=x^2$*).*

184. È data l'equazione $y=x^2+4kx+3$
Verificare che l'equazione descrive un fascio di parabole che hanno l'asse parallelo all'asse delle y e passano tutte per un punto A da determinare.
Come varia il vertice delle parabole?
(Per il punto A, confrontare l'esercizio 182; si ottiene A(0,3).
Per il vertice V, confrontare l'esercizio 179 e 183; V percorre la parabola d'equazione $y=-4x^2+3$*).*

185. È data l'equazione $y=-x^2+2kx-k$.
Verificare che l'equazione descrive un fascio di parabole che hanno l'asse parallelo all'asse delle y e passano tutte per un punto A da determinare.
Come varia il vertice delle parabole?
(Per il punto A, confrontare l'esercizio 182; si ottiene $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.
Per il vertice V, confrontare l'esercizio 179 e 183; V percorre la parabola d'equazione $y=-x^2+x$*).*

186. È data l'equazione $x=y^2-2(k-1)y-4$.
Verificare che l'equazione descrive un fascio di parabole che hanno l'asse parallelo all'asse delle x e passano tutte per un punto A da determinare.
Come varia il vertice delle parabole?
(Ripetendo considerazioni analoghe a quelle necessarie per risolvere l'esercizio 185, si trova che A ha le coordinate (−4,0), mentre il vertice V percorre la parabola $x=3y^2-4$*)*

187. È data l'equazione $x=ky^2+4ky+3+4k$.
Verificare che l'equazione descrive un fascio di parabole che hanno l'asse parallelo all'asse delle x e hanno tutte lo stesso vertice V.
Determinare l'equazione ed il grafico della parabola che passa per $O(0,0)$.
(Ripetendo considerazioni analoghe a quelle necessarie per risolvere l'esercizio 179, si trova V(3,−2). La parabola richiesta si ottiene per $k=-\frac{3}{4}$*).*

1. Parte sesta
Esercizi

Disequazioni in un'incognita

Il segno di binomi di 1° grado

Gli esercizi dall'1 al 15 conducono a studiare il segno di binomi di 1° grado.

Per risolvere questi esercizi basta ricordare i risultati esposti nello schema che si trova alla fine del paragrafo 2.
Tuttavia lo svolgimento degli esercizi risulta più efficace, se accompagnato dal grafico delle rette che visualizzano ciascun binomio sul piano cartesiano.

Studiare il segno dei binomi indicati negli esercizi dall'1 al 15.

Si consiglia di accompagnare lo svolgimento di ogni esercizio con il grafico delle rette corrispondenti a ciascun binomio assegnato.

1. $y=x$; $y=2x$; $y=-x$; $y=-\frac{1}{3}x$

2. $y=x-1$; $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$; $y=-x+1$; $y=-3x+3$

3. $y=x+1$; $y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$; $y=-x-1$; $y=-4x-4$

4. $y=x-2$; $y=\frac{1}{2}x-1$; $y=-x+2$; $y=-\frac{3}{2}x+3$

5. $y=2x+1$; $y=x+\frac{1}{2}$; $y=-2x-1$; $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$

6. $y=3x-2$; $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$; $y=-3x+2$; $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$

7. $y=4x+3$; $y=2x+\frac{3}{2}$; $y=-4x-3$; $y=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$

8. $y=6x-4$; $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$; $y=-3x+2$; $y=-2x+\frac{4}{3}$

9. $y=5x+6$; $y=\frac{5}{2}x+3$; $y=-5x-6$; $y=-\frac{5}{6}x-1$

10. $y=8x-5$; $y=2x-\frac{5}{4}$; $y=-8x+5$; $y=-\frac{4}{5}x+\frac{1}{2}$

11. $y=\sqrt{2}x$; $y=-\sqrt{2}x$; $y=x+\sqrt{2}$; $y=x-\sqrt{2}$

12. $y=\sqrt{2}x-1$; $y=\sqrt{2}-x$; $y=-\sqrt{2}x+1$; $y=-\sqrt{2}-x$

13. $y=\sqrt{3}-2x$; $y=\sqrt{3}x-2$; $y=3-2\sqrt{3}x$; $y=3x-2\sqrt{3}$

14. $y=\pi-x$; $y=-\pi x$; $y=\pi x+\pi$; $y=x+\pi$

15. $y=2x+\pi$; $y=x+2\pi$; $y=-2x+\frac{\pi}{2}$; $y=\frac{1}{2}x-\pi$

Il segno di trinomi di 2° grado

Gli esercizi dal 16 al 35 conducono a studiare il segno di trinomi di 2° grado.

Per risolvere questi esercizi basta ricordare i risultati esposti nello schema che si trova alla fine del paragrafo 3.
Tuttavia lo svolgimento degli esercizi risulta più efficace, se accompagnato dal grafico delle parabole che visualizzano ciascun trinomio sul piano cartesiano.

Studiare il segno dei trinomi assegnati negli esercizi dal 16 al 35.

Si consiglia di accompagnare lo svolgimento di ogni esercizio con il grafico delle parabole corrispondenti a ciascun trinomio assegnato.

16. $y=x^2+1$; $\quad y=-x^2-1$; $\quad y=2x^2+2$

17. $y=2x^2$; $\quad y=-2x^2$; $\quad y=x^2$

18. $y=4x^2-1$; $\quad y=1-4x^2$; $\quad y=x^2-\frac{1}{4}$

19. $y=x^2+5x+4$; $\quad y=-x^2-5x-4$; $\quad y=2x^2+10x+8$

20. $y=x^2-8x+16$; $\quad y=-x^2+8x-16$; $\quad y=\frac{1}{4}x^2-2x+4$

21. $y=5x^2+x+1$; $\quad y=-5x^2-x-1$; $\quad y=x^2+\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$

22. $y=x^2-2x$; $\quad y=x^2-2x+1$; $\quad y=x^2-2x+2$

23. $y=-4x^2+4x$; $\quad y=-4x^2+4x-2$; $\quad y=-4x^2+4x-1$

24. $y=-x^2+2x-1$; $\quad y=-x^2$; $\quad y=-x^2+6x-9$

25. $y=(x-1)^2$; $\quad y=x^2-1$; $\quad y=x^2-2x+1$

26. $y=(x+1)^2$; $\quad y=x^2+1$; $\quad y=x^2+2x+\frac{1}{2}$

27. $y=(-x+1)^2$; $\quad y=-x^2+1$; $\quad y=-(x-1)^2$

28. $y=(-x-1)^2$; $\quad y=-x^2-1$; $\quad y=-(x+1)^2$

29. $y=(x-2)^2$; $\quad y=x^2-4$; $\quad y=x^2+4$

30. $y=(2x-1)^2$; $\quad y=2(x-1)^2$; $\quad y=4x^2-1$

31. $y=2(x+1)^2$; $\quad y=[2(x+1)]^2$; $\quad y=(2x+1)^2$

32. $y=-\frac{1}{2}(x-4)^2$; $\quad y=\left[-\frac{1}{2}(x-4)\right]^2$; $\quad y=\left(-\frac{1}{2}x+2\right)^2$

33. $y=x^2+x-3$; $\quad y=2x^2-6x+3$

34. $y=\frac{1}{2}x^2-3x+3$; $\quad y=2x^2-2\sqrt{2}x+1$

35. $y=-3x^2+2\sqrt{3}x-1$; $\quad y=-\frac{1}{3}x^2-x+3$

Il segno di funzioni razionali intere

Gli esercizi dal 36 al 54 conducono a studiare il segno di funzioni razionali intere.

Ricordiamo che, per svolgere questi esercizi, basta ripetere il procedimento esposto nel paragrafo 6, organizzando i calcoli nel modo seguente:

I) si scompone il polinomio assegnato in fattori di 1° o 2° grado (per una trattazione sistematica *della scomposizione in fattori di un polinomio v.* Matematica nella realtà *vol. 1, pagg. 252-256, 473-475 e vol. 2, pagg. 401-402);*

II) si studia separatamente il segno dei singoli fattori,

III) si valuta il segno del polinomio, tenendo presente che

- *un prodotto vale zero solo se vale zero almeno uno dei suoi fattori,*
- *un prodotto è negativo solo se presenta un numero dispari di fattori negativi.*

Studiare il segno delle funzioni razionali intere proposte negli esercizi dal 36 al 54.

36. $y=x^3-3x^2+5x-3$; $y=x^3+x-2$

(I due polinomi assegnati sono divisibili per il binomio $(x-1)$ e, dunque, si possono scomporre in fattori, valendosi, per esempio, della regola di Ruffini)

37. $y=x^3+3x^2+5x+3$; $y=x^3+3x+4$

(I due polinomi sono divisibili per $(x+1)$)

38. $y=2x^3+3x^2-2x-3$; $y=x^3-2x^2-x+2$

39. $y=x^3-6x^2+20x-24$; $y=x^3-2x^2-x+2$

(I due polinomi sono divisibili per $(x-2)$)

40. $y=x^4-3x^3+3x^2-3x+2$; $y=x^4-6x^3+9x^2-4$

(I polinomi sono divisibili per $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$; per scomporli in fattori si procede più rapidamente valendosi della regola di Ruffini o della divisione dei polinomi?)

41. $y=x^4-3x^3-2x^2+12x-8$; $y=x^4+x^3-3x^2-4x-4$

(I polinomi sono divisibili per $(x-2)(x+2)=x^2-4$; qual'è il procedimento più rapido per scomporli in fattori?)

42. $y=x^3-3x^2-2x$; $y=x^4+2x^3+4x^2+8x$

43. $y=x^3-3x^2-10x+24$; $y=x^3-3x^2+4x-12$

44. $y=x^3+6x^2+13x+10$; $y=2x^3-x^2-18x+9$

45. $y=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$; $y=x^4-3x^3-2x^2+12x-8$

46. $y=2x^4-3x^2+1$; $y=x^4-5x^2+6$

(Per scomporre in fattori un trinomio biquadratico, cioè del tipo $y=ax^4+bx^2+c$, è opportuno tener presenti alcuni risultati relativi alla scomposizione in fattori di un trinomio di 2° grado, cioè del tipo

$$y=ax^2+bx+c.$$

Ricordiamo che se si conoscono le soluzioni x_1 e x_2 dell'equazione

$$ax^2+bx+c=0,$$

il trinomio si scompone in fattori nel modo seguente:

$$y=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Così conviene scrivere il trinomio biquadratico nella forma

$$y=a(x^2)^2+bx^2+c$$

e considerarlo come un trinomio di 2° grado nella variabile x^2, scomponendolo in fattori nel modo seguente

$$y=a(x^2-x_1)(x^2-x_2).$$

Per esempio, risulta che il trinomio

$$y=2x^4-3x^2+1$$

si annulla per

$$x^2=\frac{1}{2} \quad e \quad x^2=1$$

e perciò si scompone nel modo seguente:

$$y=2\left(x^2-\frac{1}{2}\right)(x^2-1)$$

In modo analogo si procede per l'altro trinomio)

47. $y=x^4-13x^2+36$; $y=-x^4+13x^2-36$ **48.** $y=x^4-7x^2+16$; $y=-x^4+7x^2-16$

49. $y=x^4-10x^2+9$; $y=-x^4+10x^2-9$ **50.** $y=x^4-10x^2+25$; $y=-x^4+10x^2-25$

51. $y=9x^4-10x^2+1$; $y=-9x^4+10x^2-1$ **52.** $y=4x^4+4x^2+1$; $y=-4x^4-4x^2-1$

53. $y=x^4-17x^2+16$; $y=-x^4+17x^2-16$ **54.** $y=x^4-2x^2+1$; $y=-x^4+2x^2-1$

Segno di funzioni razionali fratte

Gli esercizi dal 55 al 65 conducono a studiare il segno di funzioni razionali fratte.

Ricordiamo che, per svolgere questi esercizi, basta ripetere il procedimento esposto nel paragrafo 6, organizzando i calcoli nel modo seguente:

I) si studia separatamente il segno del numeratore N e del denominatore D;

II) si valuta il segno del quoziente, tenendo presente che

- *un quoziente è positivo solo se numeratore e denominatore hanno lo stesso segno,*
- *un quoziente perde significato se il denominatore vale zero,*
- *un quoziente vale zero, se il solo numeratore vale zero.*

Studiare il segno delle funzioni razionali fratte assegnate negli esercizi dal 55 al 65.

55. $y=\dfrac{2x}{2x^2+x}$; $y=\dfrac{x-2x^2}{2x}$ **56.** $y=\dfrac{1-x}{1-x^2}$; $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

57. $y=\dfrac{4x^2-x}{4x-1}$; $y=\dfrac{4x-1}{x-4x^2}$ **58.** $y=\dfrac{x^2+3x+2}{4x^2+1}$; $y=\dfrac{4x^2+1}{x^2-3x+2}$

59. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$; $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x+1}$ **60.** $y=\dfrac{4x^2}{4x^2-4x+1}$; $y=\dfrac{4x^2+4x+1}{-4x^2}$

61. $y=\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$; $y=\dfrac{x+3}{x^2+6x+9}$ **62.** $y=\dfrac{-9x^2}{x^2+9}$; $y=\dfrac{-x^2-9}{3x^2}$

63. $y=\dfrac{x^2+x}{x^3+1}$; $y=\dfrac{x^3-1}{x-x^2}$ **64.** $y=\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$; $y=\dfrac{1-x^2}{x^4-1}$

65. $y=\dfrac{x^4+1}{x^3+1}$; $y=\dfrac{x^3+1}{x^4+1}$ **66.** $y=\dfrac{x^4-2x+1}{x^2-2x+1}$; $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x^4+2x^2+1}$

Disequazioni irrazionali

Una disequazione è irrazionale, *quando l'incognita compare sotto il segno di radice; ecco qualche esempio:*

a) $x>\sqrt{x}$, *b)* $x<\sqrt{x}$, *c)* $x+2>\sqrt{4-x^2}$, *d)* $x+2<\sqrt{4-x^2}$

Invece, non sono disequazioni irrazionali *le seguenti:*

$x^2>\sqrt{2}x$, *b)* $x<\sqrt{3}+2x$, $\sqrt{5}+x^2<\sqrt{7}x$...

La soluzione di disequazioni irrazionali può essere ottenuta per via grafica o valendosi di metodi algebrici.
Vediamo i due tipi di procedimento "all'opera" per risolvere le disequazioni a, b, c, d.

I) Metodo grafico.

Riprendiamo alcune considerazioni svolte negli esercizi (pag. 461-462), a proposito della risoluzio-

ne di equazioni per via grafica: per risolvere graficamente le due disequazioni (a) e (b) si può procedere così:

- *si traccia, sullo stesso piano cartesiano, il grafico delle due funzioni*

  $y_1=x \quad e \quad y_2=\sqrt{x}.$

  Si ottengono la retta ed il ramo di parabola di fig. 1;
- *si determinano i punti d'intersezione fra le due curve.*

  La retta e la parabola s'incontrano nei due punti O ed A, di cui è immediato ricavare le coordinate, sia per via algebrica che per via grafica; si ha:

  $O(0,0) \quad e \quad A(1,1).$
- *si osserva il grafico, individuando la posizione reciproca delle due curve.*

  Dalla figura si nota che, quando risulta

  $0<x<1,$

  la retta si trova al disotto dell'arco di parabola; perciò si ha:

  $y_1<y_2, \quad ossia \quad x<\sqrt{x}.$

  Quando, invece risulta

  $x>1,$

  la retta si trova al disopra della parabola e dunque si ha:

  $x>\sqrt{x}.$

  È chiaro che, invece, quando risulta

  $x=0 \quad oppure \quad x=1$

  si ha

  $x=\sqrt{x}.$

  Infine, per

  $x<0$

  le disequazione (a) e (b) perdono significato, dato che per valori negativi di x non esiste il grafico della parabola.

In modo del tutto analogo si possono risolvere le disequazioni (c) e (d), cioè

$c)\ x+2>\sqrt{4-x^2}, \qquad d)\ x+2<\sqrt{4-x^2}.$

Basta tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$y_1=x+2 \quad e \quad y_2=\sqrt{4-x^2};$

si ottiene la retta e la semicirconferenza di fig. 2.
Le due curve s'incontrano nei punti $A(-2,0)$ e $B(0,2)$ e risulta dunque

$x+2<\sqrt{4-x^2} \quad per \quad -2<x<0,$
$x+2>\sqrt{4-x^2} \quad per \quad 0<x<2,$
$x+2=\sqrt{4-x^2} \quad per \quad x=0 \quad oppure\ per \quad x=-2$

Infine, la disequazione assegnata perde significato se risulta

$x<-2 \quad oppure \quad x>2.$

II) Metodo algebrico.

Trattiamo algebricamente la disequazione (c), che riscriviamo nella forma

$\sqrt{4-x^2}<x+2.$

Si procede così:

- *si osserva che la disuguaglianza ha significato solo se i due membri assumono valori reali.*

  Nel caso assegnato, il secondo membro risulta sempre reale; invece il primo membro assume valori reali solo se risulta

  $4-x^2>0;$
- *si osserva che il primo membro è sempre positivo (quando è reale), dato che davanti alla radice "è sottinteso" il segno "+"; perciò anche il secondo membro deve assumere solo valori positivi.*

  Deve dunque risultare

  $x+2>0$

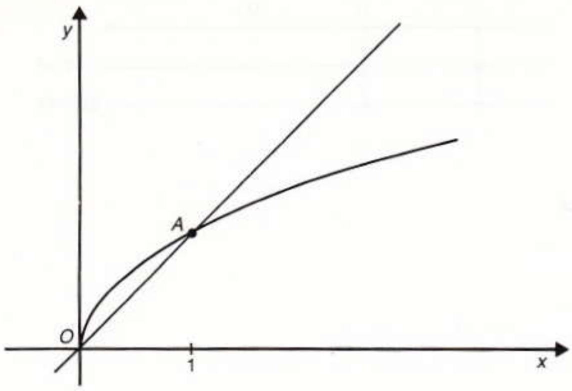


Fig. 1

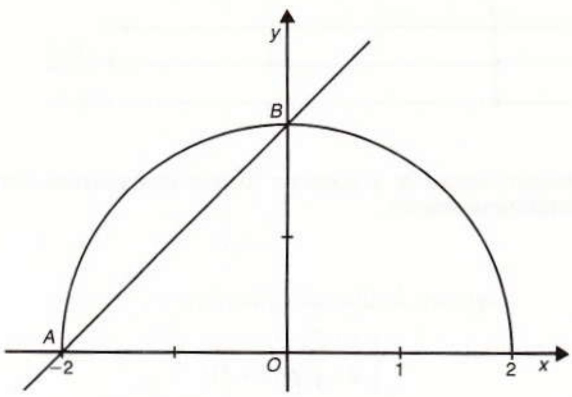


Fig. 2

– *si elevano i due membri al quadrato ottenendo una disequazione razionale, cioè*

$$4-x^2<(x+2)^2$$

ossia

$$4-x^2<x^2+4x+4$$

che si può scrivere nella forma

$$2x^2+4x>0.$$

In conclusione, le soluzioni della disequazione (c) sono date da tutti i valori di x che soddisfano contemporaneamente le seguenti disequazioni:

$$\begin{cases} 4-x^2>0 \\ x+2>0 \\ 4-x^2<(x+2)^2 \end{cases}$$

Il grafico di fig. 3 mostra che si ottengono le soluzioni

$$0<x<2$$

già trovate per via grafica.

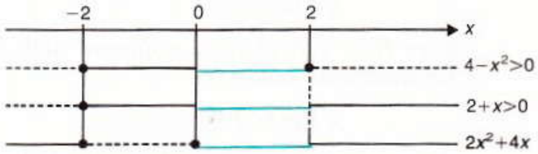


Fig. 3. Il tratto continuo indica i valori di x per cui è soddisfatta la disequazione scritta a fianco.

Passiamo ora alla disequazione (d), cioè alla disequazione seguente:

$$\sqrt{4-x^2}>x+2.$$

Si può procedere così:

– *si osserva che la disequazione è certamente soddisfatta se il secondo membro è negativo, purché il primo membro sia reale; dunque soddisfano la disequazione i valori di x per cui risulta contemporaneamente*

$$\begin{cases} 4-x^2>0 \\ x+2<0 \end{cases}$$

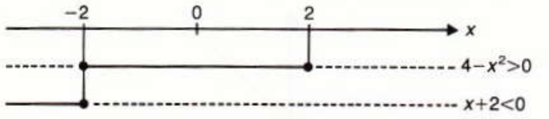
– *se invece il secondo membro non è negativo (ed il primo membro è reale), si può ridurre ad una disequazione razionale elevando i due membri al quadrato; si ottengono dunque altre soluzioni della disequazione assegnata determinando i valori di x per cui risulta contemporaneamente*

$$\begin{cases} x+2>0 \\ 4-x^2>0 \\ 4-x^2>(x+2)^2 \end{cases}$$

Osservando le tre disequazioni, ci si rende conto che la seconda è superflua, dato che $4-x^2$ risulterà certamente positivo se deve essere maggiore di un quadrato, come è richiesto dalla terza disequazione.

In conclusione, le soluzioni della disequazione (d) sono i valori di x che soddisfano le due disequazioni

$$\begin{cases} x+2<0 \\ 4-x^2>0 \end{cases}$$



Nessun valore di x soddisfa le due disequazioni contemporaneamente.

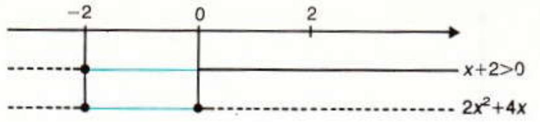


Fig. 4

oppure le due disequazioni

$$\begin{cases} x+2>0 \\ 4-x^2>(x+2)^2 \end{cases}$$

I grafici di fig. 4 mostrano che si ottengono le soluzioni

$$-2<x<0$$

già ottenute per via grafica.
È chiaro che il metodo algebrico è più lungo e faticoso del metodo grafico.
Tuttavia bisogna tener presente che il metodo algebrico ha validità generale, mentre la via grafica è talvolta difficile, quando si è condotti a disegnare funzioni diverse da quelle finora trattate.

Le considerazioni ora svolte si possono sempre ripetere quando si vogliono risolvere per via algebrica disequazioni irrazionali del tipo

$$\sqrt{R(x)}<P(x)$$

oppure

$$\sqrt{R(x)}>P(x)$$

dove $R(x)$ e $P(x)$ sono polinomi nella variabile x.
Le soluzioni della

$$\sqrt{R(x)}<P(x)$$

si ottengono determinando i valori che soddisfano contemporaneamente le seguenti disequazioni:

$$\begin{cases} R(x)>0 \\ P(x)>0 \\ R(x)<[P(x)]^2 \end{cases}$$

Invece le soluzioni della

$$\sqrt{R(x)}>P(x)$$

si ottengono determinando i valori di x che soddisfano le due disequazioni

$$\begin{cases} P(x)<0 \\ R(x)>0 \end{cases}$$

oppure le due disequazioni

$$\begin{cases} P(x)>0 \\ R(x)>[P(x)]^2 \end{cases}$$

Il procedimento indicato si estende a tutte le disequazioni in cui compaiono radicali con indice pari. Molto più semplici da trattare sono invece le disequazioni irrazionali in cui compaiono radici con indice dispari. Ricordiamo infatti che la radice cubica, quinta, settima, ... di un numero reale è sempre reale e mantiene il segno del radicando. Ecco qualche esempio:

$$\sqrt[3]{8}=2, \quad \sqrt[3]{-8}=-2, \quad \sqrt[5]{243}=3, \quad \sqrt[5]{-243}=-3, \ \ldots$$

Perciò si risolve una disequazione come la seguente

$$\sqrt[3]{x^3-1}>x-1$$

elevandone semplicemente i due membri alla terza potenza e riducendosi a determinare i valori di x per cui risulta

$$x^3-1>(x-1)^3$$

Sviluppando i calcoli ci si riduce a risolvere la disequazione razionale seguente

$$x^3-1>x^3-3x^2+3x-1$$

ossia

$$-3x^2+3x<0$$

Le disequazioni assegnate negli esercizi dal 67 al 76 si possono risolvere sia con il metodo grafico che con il metodo algebrico. Può essere interessante valersi dei due metodi e confrontare i risultati ottenuti.

Risolvere le disequazioni irrazionali assegnate negli esercizi dal 67 al 76.

67. $13-x<\sqrt{x+7}$; $\quad 13-x>\sqrt{x+7}$

68. $\sqrt{5-2x}>6x-1$; $\quad \sqrt{5-2x}<6x-1$

69. $x-1<\sqrt{2x-2}$; $\quad x-1>\sqrt{2x-2}$

70. $\sqrt{x+1}<3-2x$; $\quad \sqrt{x+1}>3-2x$

71. $\sqrt{x-2}>x-3$; $\quad \sqrt{x-2}<x-3$

72. $1-x<\sqrt{4-2x}$; $\quad 1-x>\sqrt{4-2x}$

73. $\sqrt{x-3}>5-x$; $\quad \sqrt{x-3}<5-x$

74. $x+2>\sqrt{-x^2+3x+10}$; $\quad x+2<\sqrt{-x^2+3x+10}$

75. $x-3>\sqrt{2x-x^2}$; $\quad x-3<\sqrt{2x-x^2}$

76. $\sqrt{-x^2+6x-5}>x-1$; $\quad \sqrt{-x^2+6x-5}<x-1$

Le disequazioni assegnate negli esercizi dal 77 al 90 si risolvono facilmente valendosi solo del metodo algebrico.

Risolvere le disequazioni assegnate negli esercizi dal 77 al 90.

77. $\sqrt{x^2-2x}>x-3$; $\quad \sqrt{x^2-2x}<x-3$

78. $\sqrt{9x^2-6x-8}<3x+5$; $\quad \sqrt{9x^2-6x-8}>3x+5$

79. $\sqrt{4x^2-4x-15}>2x+1$; $\quad \sqrt{4x^2-4x-15}<2x+1$

80. $\sqrt{x^2+x+3}<x+6$; $\quad \sqrt{x^2+x+3}>x+6$

81. $\sqrt{2x^2+x-3}>x-1$; $\quad \sqrt{2x^2+x-3}<x-1$

82. $\sqrt{x^2+x+2}<x-1$; $\quad \sqrt{x^2+x+2}>x-1$

83. $2x+2>\sqrt{x^2+5x+4}$; $\quad 2x+2<\sqrt{x^2+5x+4}$

84. $\sqrt{10x^2+x^4}>x^2+4x$; $\quad \sqrt{10x^2+x^4}<x^2+4x$

85. $\sqrt[4]{-4x^3+8x^2-4x}>x-1$; $\quad \sqrt[4]{-4x^3+8x^2-4x}<x-1$

86. $\sqrt[4]{4x^3+4x}>x+1$; $\quad \sqrt[4]{4x^3+4x}<x+1$

87. $\sqrt[3]{x^3+2}<x-1$; $\quad \sqrt[3]{x^3+2}>x-1$

88. $\sqrt[3]{x^3-4x}>x+1$; $\quad \sqrt[3]{x^3-4x}<x+1$

89. $3x+4>\sqrt[3]{27x^3+45x+46}$; $\quad 3x+3>\sqrt[3]{27x^3+45x+46}$

90. $x+1>\sqrt[5]{x^5+10x^3+5x+1}$; $\quad x+1<\sqrt[5]{x^5+10x^3+5x+1}$

Problemi che conducono a risolvere disequazioni in un'incognita

I problemi proposti negli esercizi dal 91 al 119 conducono a risolvere disequazioni in un'incognita, ma richiedono anche la conoscenza di alcune nozioni esposte nelle parti precedenti.

91. È data la circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-10x-10y+25=0$$

ed il fascio di rette d'equazione

$$y=k$$

Calcolare i valori di k che individuano le rette del fascio tangenti alla curva.
Determinare i valori di k per cui si trovano nel fascio le rette secanti la curva o le rette che non intersecano la curva.
Completare lo svolgimento dell'esercizio tracciando il grafico della curva e di qualche retta significativa del fascio indicato.
(È opportuno ricordare che per individuare le rette tangenti si debbono determinare i valori di k per cui un'equazione di 2° grado ha le soluzioni coincidenti, cioè risulta

$$\Delta=0.$$

È chiaro che si ottengono le rette secanti, se la stessa equazione ha le due soluzioni reali e distinte, cioè risulta

$$\Delta>0;$$

Mentre si ottengono rette che non incontrano la curva, quando l'equazione di 2° grado non ha soluzioni reali, cioè risulta

$$\Delta<0).$$

Ripetere il problema 91 a partire dai dati assegnati negli esercizi dal 92 al 109.

92. Circonferenza d'equazione $x^2+y^2-2x-2y+1=0$, fascio di rette d'equazione $x=h$

93. Circonferenza d'equazione $x^2+y^2+2x-8y+15=0$, fascio di rette d'equazione $y=-x+k$

94. Circonferenza d'equazione $x^2+y^2+10x+16=0$, fascio di rette d'equazione $y=hx$

95. Circonferenza d'equazione $x^2+y^2-60x+23y-19=0$, fascio di rette d'equazione $y=hx+1$

96. Parabola d'equazione $y=x^2-3x+2$, fascio di rette d'equazione $y=3x+k$

97. Parabola d'equazione $y=-x^2+x+3$, fascio di rette d'equazione $y=x+k$

98. Parabola d'equazione $y=x^2-3x+2$, fascio di rette d'equazione $y=3x+k$

99. Parabola d'equazione $y=-x^2+4$, fascio di rette d'equazione $y=-2x+k$

100. Parabola d'equazione $y=-x^2+4x$, fascio di rette d'equazione $y=2x+k$

102. Parabola d'equazione $y=x^2-6x+5$, fascio di rette d'equazione $y=hx+4$

103. Parabola d'equazione $y=x^2-4x+3$, fascio di rette d'equazione $y=hx+3$

104. Ellisse d'equazione $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, fascio di rette d'equazione $y=-x+k$

105. Ellisse d'equazione $x^2+2y^2=4$, fascio di rette d'equazione $y=-2x+k$

106. Ellisse d'equazione $x^2+4y^2=4$, fascio di rette d'equazione $y=h(x+3)$

107. Iperbole d'equazione $xy=4$, fascio di rette d'equazione $y=-4x+k$

108. Iperbole d'equazione $xy=2$, fascio di rette d'equazione $y=-x+k$

109. Iperbole d'equazione $xy=-6$, fascio di rette d'equazione $y=x+k$

110. È dato il fascio di circonferenze d'equazione

$$x^2+y^2-(2-k)x-(4+k)y+4+2k=0$$

Indicare i valori di k per cui si ottengono circonferenze secanti o tangenti all'asse delle x.
Ci sono dei valori di k per cui le circonferenze risultano esterne all'asse delle x?

111. È dato il fascio di circonferenze d'equazione

$$x^2+y^2+kx-2(1+k)y+2k-4=0$$

determinare i valori di k per cui le circonferenze risultano secanti, tangenti o esterne alla retta d'equazione

$$y=-\frac{1}{3}x+6$$

112. L'equazione

$$y=x^2+k$$

rappresenta un fascio di parabole; scegliere i valori di k che determinano parabole secanti l'asse delle x. Come varia il vertice delle parabole?

113. Considerare il seguente fascio di parabole:

$$y=kx^2-4$$

Qual è la posizione di ogni parabola rispetto all'asse delle x?
Qual è il vertice delle varie parabole?
Che cosa succede per $k=0$?

114. Considerare il fascio di parabole

$$y=kx^2+4$$

e confrontarlo con il fascio proposto nell'esercizio precedente, rilevando analogie e differenze.

115. Considerare il fascio di parabole

$$y=x^2-2x+k$$

e scegliere i valori di k che determinano parabole secanti l'asse delle x.
Tenendo presente che l'equazione si può scrivere nella forma

$$y=(x-1)^2+k-1,$$

dire come varia il vertice delle parabole.

116. Considerare il fascio di parabole

$$y=4x^2+4x+k$$

ed indicare i valori di k che determinano parabole esterne all'asse delle x.
Tenendo presente che l'equazione data si può scrivere nella forma

$$y=(2x+1)^2+k-1,$$

dire come varia il vertice delle parabole.

117. Considerare il fascio di parabole

$$y=-x^2+6x+k$$

e scegliere i valori di k che determinano parabole secanti o tangenti all'asse delle x.
Come varia il vertice delle parabole?

118. Considerare il fascio di parabole

$$y=x^2-2kx$$

Qual è la posizione di ogni parabola rispetto all'asse delle x?

119. Considerare il fascio di parabole

$$y=kx^2-2x$$

Qual è la posizione di ogni parabola rispetto all'asse delle x?
Che cosa succede per $k=0$?

Disequazioni in due incognite

Disequazioni lineari

Gli esercizi dal 120 al 136 conducono ad indicare semipiani o zone di piano definiti da disequazioni lineari in due incognite.

Per risolvere gli esercizi basta tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 8.

Indicare le zone di piano definite nelle disequazioni assegnate negli esercizi dal 120 al 126.

120. *a*) $y \geq -2$, *b*) $y \geq 0$, *c*) $x \geq -3$, *d*) $x \geq 0$

121. *a*) $y \leq 0$, *b*) $y \leq 3$, *c*) $x \leq 0$, *d*) $x \leq 2$

122. *a*) $y \leq x$, *b*) $y \geq x$, *c*) $y \geq -x$, *d*) $y \leq -x$

123. *a*) $y \geq 2x$, *b*) $y \leq 2x$, *c*) $y \leq -2x$, *d*) $y \geq -2x$

124. *a*) $y \leq x+1$, *b*) $y \geq x+1$, *c*) $y \geq -x+1$, *d*) $y \leq -x+1$

125. *a*) $y \leq 3x-4$, *b*) $y \geq 3x-4$, *c*) $y \geq -3x+4$, *d*) $y \leq -3x+4$

126. *a*) $-1 \leq x \leq 3$, *b*) $-5 \leq x \leq 0$ *c*) $-4 \leq y \leq -1$ *d*) $0 \leq y \leq 6$

Indicare le zone di piano definite dai sistemi di disequazioni assegnati negli esercizi dal 127 al 136.

127. *a*) $\begin{cases} y \leq \frac{1}{2}x+1, \\ y \geq 1 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} y \geq -2x+\frac{1}{2} \\ y \leq 0 \end{cases}$

128. *a*) $\begin{cases} y \leq -\frac{3}{4}x-2, \\ y \leq \frac{1}{2}x \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} y \geq \frac{5}{2}x+\frac{1}{4} \\ y \geq -4x \end{cases}$

129. *a*) $\begin{cases} x \leq 8 \\ y \geq 3 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} y \leq 4x+2 \\ y \geq 4x+7 \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} y \leq -3x+8 \\ y \geq -3x-2 \end{cases}$

130. $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 8 \\ y \leq 7 \\ x \geq 2 \end{cases}$

131. $\begin{cases} x \leq 10 \\ y \geq 5 \\ x \leq 10 \\ y \leq 3x \end{cases}$

132. $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 10 \\ y \leq 5 \\ y \geq 0 \\ y \leq -x+12 \end{cases}$

133. $\begin{cases} y \leq x+3 \\ y \leq -\frac{1}{2}x+5 \\ y \geq 2 \end{cases}$

134. $\begin{cases} y \leq x+2 \\ x+y \leq 6 \\ y \geq \frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \\ x \geq 0 \end{cases}$

135. $\begin{cases} y \leq -2x+8 \\ x \geq 2 \\ y \leq 3 \\ y \geq 1 \end{cases}$

136. $\begin{cases} y \geq 2 \\ y \geq \frac{1}{2}x \\ x \leq 8 \\ y \leq x+5 \end{cases}$

Problemi di programmazione lineare

Gli esercizi dal 137 al 143 conducono a trattare problemi di programmazione lineare.

Per risolvere questi problemi è opportuno tenere presenti i procedimenti esposti nel paragrafo 9.

137. Riferirsi al problema della fabbrica di blue jeans, proposto nel paragrafo 7. Per una riduzione di personale si produce di meno e le condizioni sono ora le seguenti:

$$\begin{cases} x+y \leq 600 \\ x \geq 200 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Determinare la zona di produzione.

Calcolare il massimo ricavo che si può avere, sapendo che i ricavi per i due tipi di confezioni sono rimasti gli stessi.

138. Una piccola industria produce cioccolata; gli ingredienti fondamentali per produrre la cioccolata sono cacao zuccherato e latte. È chiaro che questi ingredienti intervengono in proporzioni diverse a seconda del tipo di cioccolata, ma debbono essere rispettate date condizioni, per essere certi che la cioccolata abbia un sapore gradevole, abbia un bell'aspetto, ...
Ecco delle condizioni opportune: il quantitativo di latte non deve superare due volte e mezzo il quantitativo di cacao, ma non deve essere inferiore a 5,25 kg diminuito di $\frac{1}{8}$ del quantitativo di cacao; il peso complessivo del latte e del cacao non deve superare i 14 kg.
Indicando, per esempio, con x il quantitativo di cacao, in kg, e con y il quantitativo di latte, sempre in kg, "tradurre" le condizioni del problema in disequazioni ed individuare sul piano cartesiano la "zona di produzione".
Sapendo poi che il latte costa L. 1000 al chilo, mentre la cioccolata costa L. 4000 al chilo, determinare la situazione che realizza il costo totale minimo.

139. Una piccola azienda artigiana di mobili costruisce due tipi di tavoli con pezzi prefabbricati: modello A e modello B.
L'azienda è costituita da un lucidatore e da un falegname e i vincoli relativi alla produzione sono riuniti nella tabella seguente:

	Modello A ore di lavoro necessarie	Modello B ore di lavoro necessarie	Ore di lavoro che può fare al massimo
Falegname	1	2	8
Lucidatore	3	1	9

Indicare, per esempio, con x il numero di tavoli A e con y il numero di tavoli B, "tradurre" i vincoli in disequazioni ed indicare sul piano cartesiano la "zona di produzione".
Sapendo che l'azienda ha un profitto di L. 60.000 sul modello A e di L. 90.000 sul modello B, si chiede di stabilire quanti tavoli di ciascun modello conviene costruire per realizzare il profitto massimo (supponendo che tutti i tavoli prodotti siano venduti).

140. Accade talvolta che, a causa di una calamità naturale o di una guerra, si deve evacuare una zona dalla popolazione; si organizza allora un "ponte aereo". In generale più compagnie aeree mettono a disposizione i loro veicoli, proponendo condizioni differenti, ed il governo deve scegliere fra più alternative. Ecco un esempio. Le persone da trasportare sono 1600, le merci ammontano a 200 tonnellate e si offrono due compagnie aeree: una mette a disposizione 6 aerei (tipo A), mentre l'altra dispone di 8 aerei (tipo B) alle seguenti condizioni:

	Persone che trasporta un aereo	Bagagli che trasporta un aereo	Costo di un aereo
Tipo A	200	40 tonn.	40 milioni
Tipo B	400	20 tonn.	120 milioni

Quanti aerei di tipo A e quanti aerei di tipo B conviene affittare per spendere il meno possibile?

141. Uno zoo per nutrire i suoi animali può scegliere fra due tipi di alimenti, già pronti, A e B, che hanno le caratteristiche riassunte nella tabella seguente:

	Proteine	Grassi	Zuccheri	
1 sacco di A contiene	3 kg	3 kg	1 kg	e costa L. 3000
1 sacco di B contiene	2 kg	1 kg	2 kg	e costa L. 6000

Si deve tener presente che gli animali hanno bisogno di una razione giornaliera minima di 120 kg di proteine, 90 kg di grassi e 60 kg di zuccheri.
Quanti sacchi di ogni tipo di alimenti conviene prendere per spendere il meno possibile?

142. Un teatro con 600 posti vende i biglietti a due prezzi (L. 15.000 e L. 60.000) e intende lasciare almeno 200 posti al prezzo più basso.
Sapendo che per coprire le spese occorre incassare, per ogni rappresentazione, almeno L. 4.200.000, qual è il minimo numero di posti che si possono vendere senza subire una perdita? Qual'è il massimo guadagno che si può ottenere con una rappresentazione?

143. Una ditta di trasporti ha 7 autocarri (tipo A) che possono trasportare un carico di 6 tonnellate, 4 autocarri (tipo B) che possono trasportare un carico di 10 tonnellate e 9 autisti disponibili. La ditta si è impegnata a trasportare un minimo di 360 tonnellate di carbone da una miniera ad una centrale elettrica; gli autocarri di tipo A possono compiere 8 viaggi al giorno, mentre quelli di tipo B solo 6 viaggi al giorno.
Dire come si debbono utilizzare gli autocarri se si vuole:

a) trasportare ogni giorno il massimo carico,
b) impiegare ogni giorno il minimo numero di autisti,
c) minimizzare i costi di trasporto, sapendo che un viaggio con l'autocarro A costa L. 5000, mentre un viaggio con l'autocarro B costa L. 8000.

Disequazioni di 2° grado

Non tutti i problemi di programmazione economica si traducono in disequazioni lineari in due incognite. Ecco un problema che conduce a scrivere una disequazione di 2° grado.

144. Un'organizzazione fieristica, per allestire un'esposizione, deve recintare un'area rettangolare, servendosi di pannelli prefabbricati lunghi 2 m. L'area da recintare deve essere di almeno 200 m^2 e confina con un muro di cinta già esistente. I pannelli disponibili sono in tutto 50.
Qual'è il minimo numero di pannelli di cui ci si deve servire?
(Indichiamo con x ed y il numero di pannelli necessari, rispettivamente per il lato minore e per il lato maggiore del rettangolo. Così il numero totale n di pannelli da recintare è dato da

$$n=2x+y,$$

mentre l'area S della zona da recintare è

$$S=xy.$$

Dovrà dunque risultare

$$\begin{cases} 2x+y\geq 50 \\ xy\geq 200 \end{cases}$$

e, inoltre

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

Si osserva subito che, insieme a tre disequazioni lineari, compare anche una disequazione di 2° grado: è

$$xy\geq 200.$$

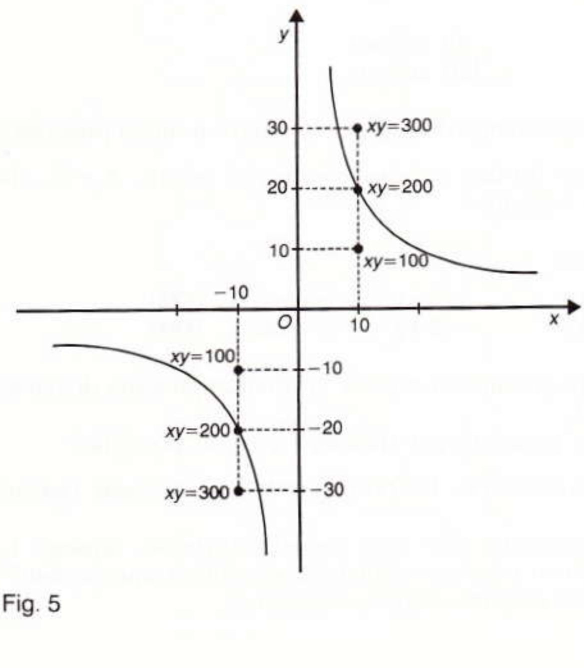


Fig. 5

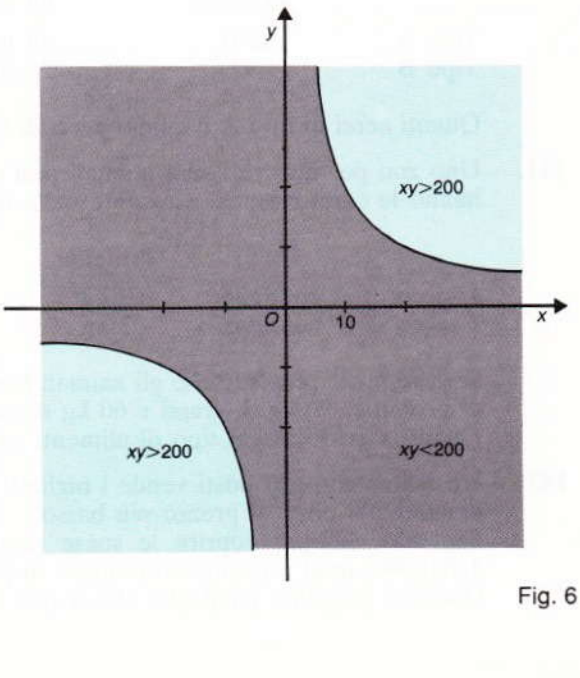


Fig. 6

Per individuare la zona di piano che visualizza questa disequazione, tracciamo il grafico della curva d'equazione

$$xy=200$$

e scegliamo qualche "punto di prova" nelle varie zone di piano delimitate dalla curva (fig. 5). Si individuano così (fig. 6) due zone di piano delimitate dall'iperbole d'equazione

$$xy=20:$$

– la zona in colore, caratterizzata dalla disequazione

$$xy>200$$

– la zona grigia, caratterizzata dalla disequazione

$$xy<200.$$

Ora è facile indicare sul piano la zona delimitata dalle disequazioni assegnate.
Per risolvere il problema, determinando il minimo valore di n, occorre infine considerare il fascio di rette d'equazione

$$y=-2x+n;$$

si tratta del fascio di rette parallele alla retta r d'equazione

$$y=-2x+50.$$

Ogni retta del fascio incontra l'asse delle y nel punto A(0,n) e si ottiene il valore minimo di n in corrispondenza alla retta del fascio tangente alla parabola)

Dal problema esaminato possiamo trarre anche qualche considerazione più generale.
Per individuare rapidamente zone di piano caratterizzate da disequazioni non lineari si può procedere nel modo seguente:
– si traccia la curva descritta dalla corrispondente equazione,
– si esaminano le zone di piano delimitate dalla curva, scegliendo opportunamente qualche punto di prova e verificando se le coordinate del punto soddisfano la disequazione assegnata.

Indicare le zone di piano che sono caratterizzate dalle disequazioni assegnate negli esercizi dal 145 al 160.

145. $xy>1$; $\quad xy<1$

146. $xy>4$; $\quad xy<4$

147. $xy>-1$; $\quad xy<-1$

148. $xy<-2$; $\quad xy>-2$

149. $y>x^2$; $\quad y<x^2$

150. $y<1-x^2$; $\quad y>1-x^2$

151. $y>x^2-2x$; $\quad y<x^2-2x$

152. $y<-x^2+4x-3$; $\quad y>-x^2+4x-3$

153. $x>y^2$; $\quad x<y^2$

154. $y<\sqrt{x}$; $\quad y>\sqrt{x}$

155. $x>4-y^2$; $\quad x<4-y^2$

156. $y>\sqrt{4-x}$; $\quad y<\sqrt{4-x}$

157. $x^2+y^2>1$; $\quad x^2+y^2<1$

158. $y<\sqrt{1-x^2}$; $\quad y>\sqrt{1-x^2}$

159. $x^2+y^2-2x>0$; $\quad x^2+y^2-2x<0$

160. $y>\sqrt{2x-x^2}$; $\quad y<\sqrt{2x-x^2}$

Esercizi riassuntivi relativi all'intero capitolo 1

1. Scrivere l'equazione della circonferenza che ha il centro $C(4,3)$ ed è tangente alla retta d'equazione $y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$.
Determinare le coordinate dei punti A e B, dove la circonferenza incontra l'asse delle x.
Scrivere l'equazione della parabola che ha l'asse parallelo all'asse delle y e passa per i punti $P(1,2)$, A e B precedentemente calcolati.
Determinare le equazioni delle tangenti alla parabola e alla circonferenza nei punti A e B.
Completare lo svolgimento dell'esercizio, tracciando i relativi grafici.
(La circonferenza è $x^2+y^2-8x-6y+15=0$; i punti sono $A(5,0)$, $B(3,0)$; la parabola è $y=\frac{1}{4}x^2-2x+\frac{15}{4}$; le tangenti sono $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$, $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$, $y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$, $y=-\frac{1}{3}x+1$)

2. Fra le circonferenze di equazione $x^2+y^2+6y+k=0$, determinare quella di raggio 5; calcolare le coordinate del centro C e dei punti A e B di intersezione con l'asse delle x.
Scrivere l'equazione della parabola che ha l'asse parallelo all'asse delle y, il vertice nel punto C e passa per A.
Determinare le equazioni delle tangenti alla parabola nei punti A e B; calcolare le coordinate del loro punto di incontro P e l'area S del triangolo ABP.
Completare lo svolgimento dell'esercizio, tracciando i relativi grafici.
(Si ottiene $x^2+y^2+6y-16=0$, $C(0,-3)$, $A(-4,0)$, $B(4,0)$, $y=\frac{3}{16}x^2-3$, $y=-\frac{3}{2}(x+4)$, $y=\frac{3}{2}(x-4)$, $P(0,6)$, $S=24$)

3. Determinare le coordinate dei punti A e B, dove si incontrano la circonferenza d'equazione $x^2+y^2-6x-2y+8=0$ e la retta d'equazione $y=-x+4$, indicando con A il punto di ascissa minore.
Scrivere l'equazione della parabola che ha l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y, il vertice nel punto A e passa per B.
Scrivere le equazioni delle tangenti alla parabola condotte dal punto $P\left(\frac{5}{2},3\right)$ calcolando le coordinate dei punti di contatto T e T' e la lunghezza l della corda TT'.
Completare lo svolgimento dell'esercizio, tracciando i relativi grafici.
(Si ottiene $A(2,2)$, $B(4,0)$, $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$, $y=x+\frac{1}{2}$, $y=-2x+8$, $l=\frac{\sqrt{397}}{2}$)

4. Dal punto $P(1,-2)$ condurre le tangenti alla parabola d'equazione $y=x^2$ e calcolare le coordinate dei punti A e B di contatto.
Per il punto P tracciare la retta r, parallela all'asse della parabola; determinare le coordinate del punto Q, dove r incontra la corda AB.
Scrivere l'equazione della circonferenza che ha centro in Q e diametro AB.
Completare lo svolgimento dell'esercizio, tracciando i relativi grafici.
(Si ottiene $A(1-\sqrt{3},4-2\sqrt{3})$, $B(\sqrt{3}+1,4+2\sqrt{3})$; $x^2+y^2-2x-8y+2=0$)

5. Data la retta r d'equazione $y=2x$, dal punto $A(4,0)$ si tracciano le seguenti rette:

- a parallela alla retta r,
- b perpendicolare alla retta r.

Determinare le coordinate dei seguenti punti:

- B, dove a incontra l'asse delle y,
- C, dove b incontra l'asse delle y.

Scrivere l'equazione della circonferenza che passa per i punti A, B, C.
Determinare l'equazione della tangente alla circonferenza nel punto A.
Completare lo svolgimento dell'esercizio, tracciando i relativi grafici.
(Si ottiene $x^2+y^2+6y-16=0$, $y=-\frac{4}{3}x-\frac{16}{3}$)

6. Determinare le equazioni di due parabole che hanno l'asse parallelo all'asse delle y, passano per il punto $A(0,4)$ ed hanno vertici $V(-2,0)$ e $V'(4,0)$
Considerare i seguenti due punti di uguale ordinata:

P, variabile sull'arco VA, Q, variabile sull'arco $V'A$

ed indicare con P' e Q' le loro proiezioni ortogonali sull'asse delle x.
Determinare le coordinate di P e Q in modo che risulti $PQ=3PP'$.
Completare lo svolgimento dell'esercizio, tracciando i relativi grafici.

(Si ha: $y=(x+2)^2$, $y=\frac{1}{4}(x-4)^2$.

Indicando con k l'ordinata di P e di Q, si scrive $P(-2+\sqrt{k},k)$, $Q(4-2\sqrt{k},k)$, *con* $0<k<4$; *il valore di k che risolve il problema è* $k=1$*)*

7. Scrivere l'equazione della circonferenza che passa per i seguenti punti

$$A(-3,2), \qquad B(4,1), \qquad C(0,-7)$$

Scrivere le equazioni delle due tangenti alla curva condotte dal punto $D(1,5)$.
Verificare che le tangenti sono perpendicolari e che i punti di contatto sono i punti A e B dati.
Calcolare l'area S del quadrilatero $ADBC$.
Completare lo svolgimento dell'esercizio, tracciando i relativi grafici.

(Si ottiene $x^2+y^2+4y-21=0$, $y=\frac{3}{4}x+\frac{17}{4}$, $y=-\frac{4}{3}x+\frac{19}{3}$, $S=\frac{85}{22}$*)*

8. Scrivere l'equazione della parabola che ha l'asse parallelo all'asse delle y, passa per $A(2,4)$ e $B\left(6,\frac{4}{3}\right)$
Scrivere l'equazione dell'iperbole che ha gli assi coordinati come asintoti e passa per A.
Calcolare le coordinate dei punti comuni alle due coniche.
Scrivere le equazioni delle tangenti alle due curve nel punto A.
Completare lo svolgimento dell'esercizio, tracciando i relativi grafici.

(Si ottiene $y=-\frac{4}{9}x^2+\frac{26}{9}x$, $xy=8$; *i punti comuni sono A e* $C\left(-\frac{3}{2},-\frac{16}{3}\right)$. *Le tangenti sono* $y=\frac{10}{9}x+\frac{16}{9}$, $y=-2x+8$*)*

9. Scrivere l'equazione dell'iperbole che ha gli assi coordinati come asintoti e passa per $A(4,1)$.
Scrivere l'equazione della parabola che ha l'asse parallelo all'asse delle y, passa per $O(0,0)$ ed incontra l'iperbole nei punti B e C d'ascissa 2 e $-\frac{2}{3}$.
Determinare le coordinate del terzo punto D di intersezione delle due coniche.
Scrivere l'equazione della circonferenza che passa per B, C, D e calcolare l'area S del cerchio corrispondente.
Completare lo svolgimento dell'esercizio, tracciando i relativi grafici.

(Si ottiene $xy=4$, $y=-3x^2+7x$, $B(2,2)$, $C\left(-\frac{2}{3},-6\right)$, $D(1,4)$, $3x^2+3y^2+29x+y-84=0$, $S=\pi\frac{925}{18}$*)*

10. È dato il fascio di iperboli d'equazione

$$y=\frac{2x+1}{x-k}$$

Verificare che tutte le curve del fascio passano per uno stesso punto P, da determinare.
Confrontare il grafico delle curve corrispondenti ai valori $k=2$ e $k=-1$.
Fissare l'attenzione sull'iperbole che si ottiene per $k=2$.
Determinare le coordinate dei punti A e B, dove la curva incontra gli assi coordinati e verificare che risulta $\overline{OA}=\overline{OB}$.
Scrivere l'equazione delle seguenti rette:

- AB, che incontra l'asintoto orizzontale in M,
- la tangente alla curva in B, che incontra l'asintoto orizzontale in N.

Calcolare la lunghezza del segmento MN.

(Si ottiene $P\left(-\frac{1}{2},0\right)$, *le equazioni delle rette sono* $y=-\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}$, $y=-x-\frac{1}{2}$*)*

11. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=x^2-3x+2. \qquad y=-x^2+x+2$$

Relativamente a ciascuna curva determinare

- il vertice,
- i punti di intersezione con gli assi cartesiani,
- le tangenti in tali punti di intersezione.

Dire come deve essere condotta una retta r parallela all'asse delle x affinché risultino uguali le due corde che r determina in ciascuna curva.
(Dal tema di maturità scientifica del 1935.
Si ottengono i vertici $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ *e* $V'\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$, *i punti* $A(0,2)$ *con tangenti* $y=-3x+2$ *e* $y=x+2$, $B(2,0)$ *con tangenti* $y=x-2$ *e* $y=-3x+6$, $C(1,0)$ *con tangente* $y=-x+1$, $D(-1,0)$ *con tangente* $y=3x+3$. *La retta r ha equazione* $y=1$*)*

12. Sono date le parabole d'equazione

$$y=x^2-2x \quad \text{e} \quad y=2x-\frac{x^2}{2}$$

Disegnare le curve, dopo aver trovato i seguenti punti:
- i vertici V e V' delle parabole,
- i punti di intersezione di ciascuna parabola con l'asse delle x,
- i punti di intersezione delle due parabole.

Dire come deve essere condotta una retta r parallela all'asse delle x affinché risultino uguali le due corde da essa determinate sulle due parabole.
(Dal tema di maturità del 1936.
Si ottengono i vertici $V(1,-1)$, $V'(2,2)$, *i punti* $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(4,0)$, $C\left(\frac{8}{3}, \frac{16}{9}\right)$. *La retta r ha equazione* $y=1$*)*

13. Scrivere l'equazione di una parabola che ha l'asse parallelo all'asse delle y, è tangente alla retta d'equazione $y=x$ in $O(0,0)$ e passa per $A(4,0)$.
Fra i trapezi che hanno come base maggiore OA e come base minore una corda della parabola parallela ad OA, determinare quello che ha l'area $S=\frac{9}{4}$.
(Dal tema di maturità del 1938.
La parabola è $y=-\frac{1}{4}x^2+x$. *Data la simmetria della curva rispetto alla retta* $x=2$, *si può considerare l'area S come il doppio dell'area del trapezio rettangolo OHKB di fig. 7. Se x indica l'ascissa del punto B (con* $0<x<2$*), l'area di OHKB è... Dunque sono due i trapezi che soddisfano la condizione richiesta: si ottengono in corrispondenza ai valori* $x=1$ *e* $x=\frac{7-\sqrt{13}}{2}$*)*

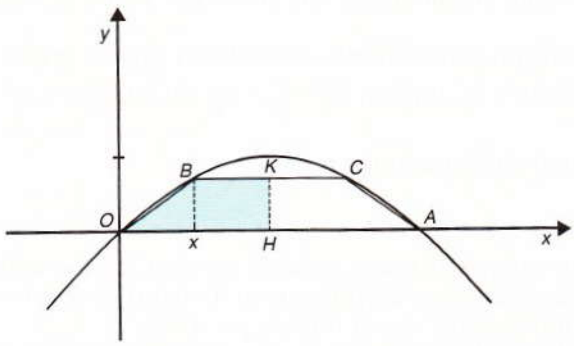


Fig. 7

14. Considerare il fascio di parabole che hanno l'equazione

$$y=mx^2+x+3-4m \text{ (con } m\neq 0).$$

Verificare che tutte le parabole passano per due punti A e B da determinare.
Determinare le parabole del fascio che hanno per vertice A e B e verificare che esse sono simmetriche rispetto al punto medio C del segmento AB.
(Dal tema di maturità del 1967.
Si trovano i punti $A(2,5)$, $B(-2,5)$ *e le parabole* $y=\frac{1}{4}x^2+x+2$, $y=-\frac{1}{4}x^2+x+4$*)*

15. Scrivere l'equazione della circonferenza che ha il centro d'ordinata 4 e passa per i punti $A(-2,0)$ e $B(4,0)$; calcolare le coordinate degli estremi D ed E del diametro parallelo all'asse delle x.
Determinare i coefficienti dell'equazione $y=ax^2+bx+c$, in modo che le parabole da essa rappresentate passino per $C(0,4)$ e siano tangenti all'asse delle x.
Tra queste parabole determinare quelle che passano per D o per E.
(Da uno dei temi di maturità scientifica del 1972.

Si ottengono la circonferenza $x^2+y^2-2x-8y=0$, i punti $D(-4,4)$, $E(6,4)$, le parabole $y=(x+2)^2$, $y=\left(\frac{2}{3}x-2\right)^2$)

16. Scrivere le equazioni delle due circonferenze C e C' che hanno il centro sull'asse delle y, sono tangenti alla parabola d'equazione $y=5-x^2$ ed alla retta d'equazione $y=1$; indicare con r ed r' i rispettivi raggi (con $r>r'$).
Scrivere l'equazione di un'altra circonferenza C'', che ha il centro sull'asse delle y ed il raggio r.
Determinare l'equazione della parabola che ha l'asse parallelo all'asse delle y ed è tangente alle due circonferenze C' e C''.
(Da uno dei temi di maturità del 1973.
Si ottengono C: $x^2+y^2+3y-4=0$, C': $x^2+y^2-5y+4=0$, C'': $x^2+y^2-13y+36=0$, parabola $y=x^2$)

17. Considerare le parabole che hanno le equazioni seguenti:

$$y=3x-x^2, \qquad y=x^2-2x$$

Le due curve si incontrano in $O(0,0)$ e in un punto A da determinare.
Nella regione finita di piano delimitata dalle due curve si costruisce un triangolo che ha un vertice in A ed il lato opposto BC parallelo all'asse delle y. In quale caso l'area S del triangolo vale $\frac{9}{4}$?
(Da uno dei temi di maturità del 1977.
Si ottiene $A\left(\frac{5}{2},\frac{5}{4}\right)$. Indicando con x l'ascissa di B e di C si ottiene $S=\frac{1}{4}x(5-2x)^2$; le situazioni richieste sono due, individuate dai valori $x=1$ e $x=2-\frac{\sqrt{7}}{2}$)

18. È data la parabola d'equazione $y=x^2+x\sqrt{3}+1$.
Determinare le equazioni delle tangenti alla parabola condotte da $O(0,0)$, determinando le coordinate dei punti A e B di contatto.
Scrivere l'equazione della circonferenza passante per O, A, B.
(Da uno dei temi di maturità del 1980.
Si ottengono le rette $y=(\sqrt{3}-2)x$, tangente in $A(-1,2-\sqrt{3})$ e $y=(\sqrt{3}+2)x$, tangente in $B(1,2+\sqrt{3})$; la circonferenza è $x^2+y^2-4y=0$)

19. Scrivere le equazioni delle due circonferenze che passano per $O(0,0)$ ed hanno i centri nei punti $C(2,0)$ e $C'\left(-\frac{1}{2},0\right)$.
Condurre per O due rette r ed s, fra loro perpendicolari, individuando i seguenti punti:
- A e B, dove r incontra le due circonferenze,
- C e D, dove s incontra le due circonferenze.

Determinare la situazione in cui l'area S del quadrilatero $ABCD$ vale $\frac{25}{4}$.
(Da uno dei temi di maturità scientifica del 1981.
Le circonferenze sono $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2+x=0$; r ha equazione $y=mx$, s ha equazione $y=-\frac{1}{m}$; risulta $S=\frac{25}{2}\,\frac{|m|}{1+m^2}$ e dunque la situazione richiesta si ottiene per $m=1$)

20. Una parabola passa per gli estremi di un diametro di una circonferenza di raggio r, ha le tangenti in tali punti perpendicolari fra loro e ha l'asse del diametro come asse di simmetria.
Scrivere le equazioni della parabola e della circonferenza in un riferimento cartesiano opportunamente scelto.
(Da uno dei temi di maturità scientifica del 1983
Si ottiene $x^2+y^2=r^2$ e $y=\frac{x^2}{2r}+\frac{r}{2}$, se si sceglie la parabola che rivolge la concavità verso il basso)

21. È data la parabola p d'equazione $y=3x-x^2$
Scrivere le equazioni delle seguenti parabole:
- parabola p' simmetrica a p rispetto all'asse delle y,
- parabole simmetriche a p e p' rispetto alla retta congiungente i vertici di p e di p'.

Inscrivere nella regione finita di piano delimitata dalle quattro parabole il quadrato con i lati tangenti alle parabole e calcolare il perimetro di tale quadrato.
(Da uno dei temi di maturità del 1985.
Le parabole sono $y=-x^2-3x$, $y=x^2-3x+\frac{9}{2}$, $y=x^2+3x+\frac{9}{2}$.
Per la simmetria della figura i lati del quadrato si trovano su rette parallele alle bisettrici dei quadranti... si ottiene il perimetro, che vale $5\sqrt{2}$)