1
Complementi

Il lancio dei proiettili

1. Studio grafico della traiettoria di un proiettile

Nelle figg. 1 e 2 sono riprodotte due stampe sul lancio dei proiettili prese da documenti antichi: la prima è del Medioevo e l'altra dell'epoca di Galileo.

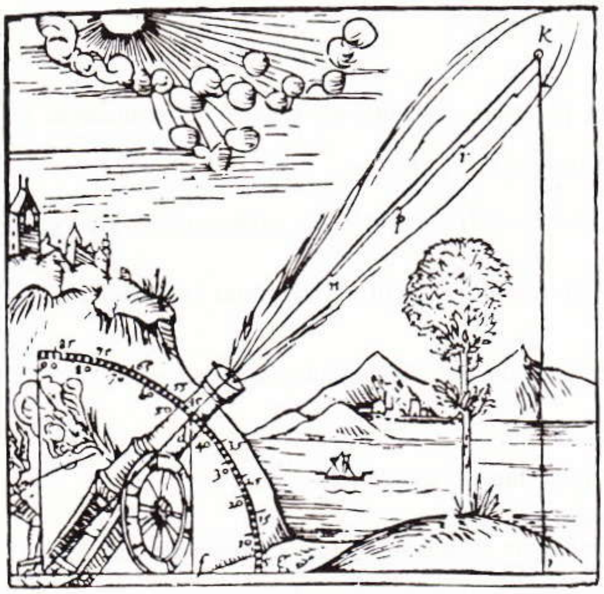

Fig. 1

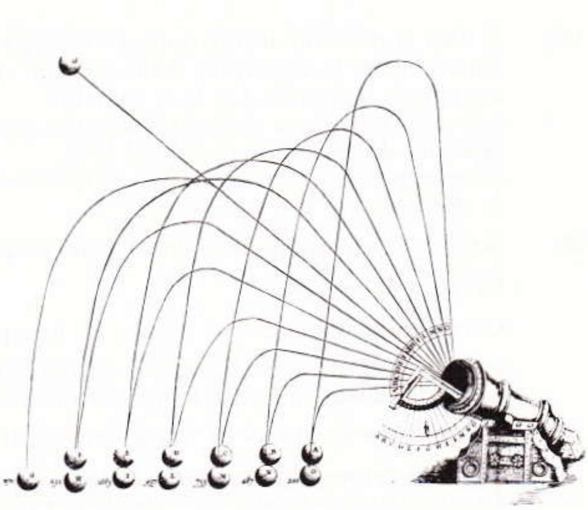

Fig. 2

Le traiettorie indicate sono ben diverse una dall'altra, e fanno capire quanto fossero vaghe ed imprecise le concezioni sul moto dei proiettili fino a Galileo.

Per noi, oggi, non è difficile rendersi conto che un proiettile, lanciato per esempio da un cannone, comincia a muoversi sotto l'influenza della velocità impressa inizialmente, e si capisce che questa velocità iniziale viene subito modificata dalla forza di gravità e dalla resistenza dell'aria. Il proiettile non si muove quindi in linea retta, ma ricade a terra dopo aver percorso una traiettoria curva.

Tutto ciò accade non solo per i proiettili lanciati da un cannone: la fig. 3 mostra la traiettoria dei "proiettili infuocati" lanciati dal vulcano di Stromboli.

Fig. 3

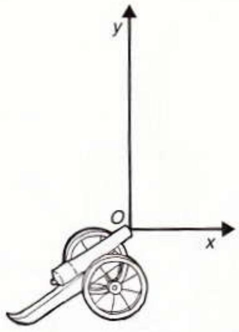

Fig. 4

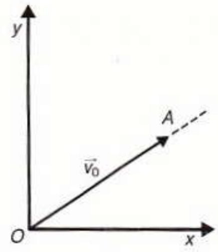

Fig. 5

Ci chiediamo: come varia la **velocità** del proiettile? qual'è la sua esatta **traiettoria**? e, come si può prevedere la **gittata**, cioè la distanza fra il punto in cui cade il proiettile e il punto di lancio?

Per dare una prima risposta a queste domande, facciamo astrazione dalla resistenza dell'aria. Riferiamoci a un sistema cartesiano, disegnato nel piano in cui avviene il movimento (fig. 4), immaginando che l'origine O si trovi proprio nella posizione della bocca del cannone.

Riflettiamo: se non esistesse l'accelerazione di gravità, il proiettile continuerebbe a viaggiare con velocità costante, sempre uguale a $\vec{v_0}$[1]; la sua traiettoria sarebbe dunque la retta OA (fig. 5). Ma il proiettile è soggetto all'accelerazione di gravità $\vec{g}$, che agisce verso il basso in direzione dell'asse delle y, e produce in 1 secondo una variazione di velocità data da

$$g=9{,}8 \text{ m/s}.$$

Basandoci su queste considerazioni possiamo avere un'idea di come varia la velocità $\vec{v}$ del proiettile. È una costruzione geometrica a facilitare la comprensione: in fig. 6 abbiamo rappresentato con il vettore $\overrightarrow{OA_1}$ la velocità $\vec{v_0}$, e, a partire da A_1, abbiamo costruito con la regola del parallelogramma la velocità $\vec{v_1}$, cioè la velocità dopo 1 secondo.

Nella costruzione abbiamo supposto che la gravità agisca "a scatti" alla fine di ogni secondo; abbiamo quindi considerato $\vec{v_1}$ *(in nero)* come diagonale di un parallelogramma i cui lati sono $\vec{g}$ *(in colore)* e $\vec{v_0}$ *(in grigio)*.

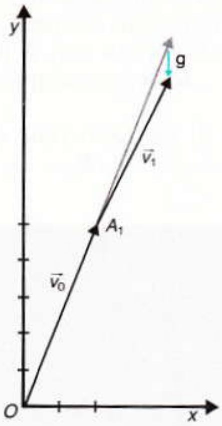

Fig. 6

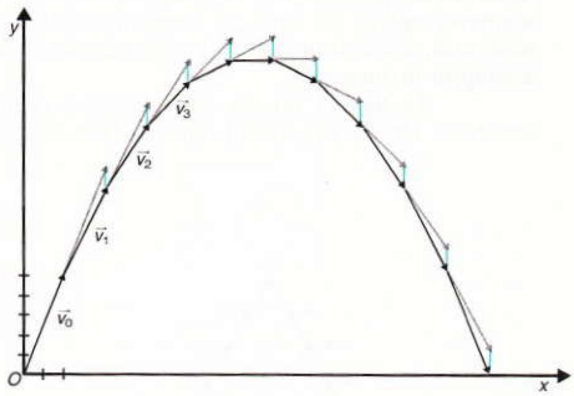

Fig. 7

È chiaro che questa costruzione si può continuare: si determinano così $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$, ..., e si ottiene un disegno come quello della fig. 7, dove è rappresentata la velocità $\vec{v}$ del proiettile, secondo per secondo.

Esaminando il grafico, si capisce che i vari vettori velocità non indicano le successive posizioni occupate dal proiettile durante il movimento, ma si ha un'idea della traiettoria dato che, in ogni istante,

[1] Si legge "v con zero", e indica la velocità iniziale, cioè la velocità nell'istante zero.

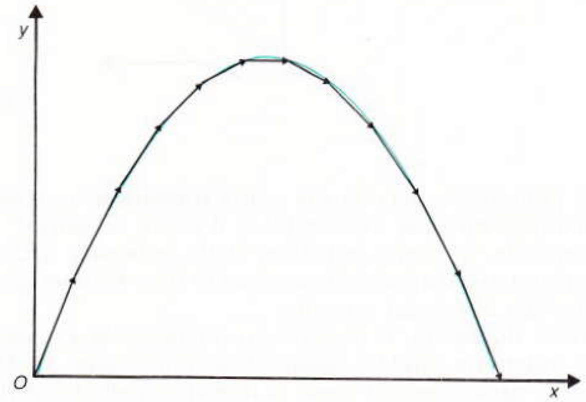

Fig. 8

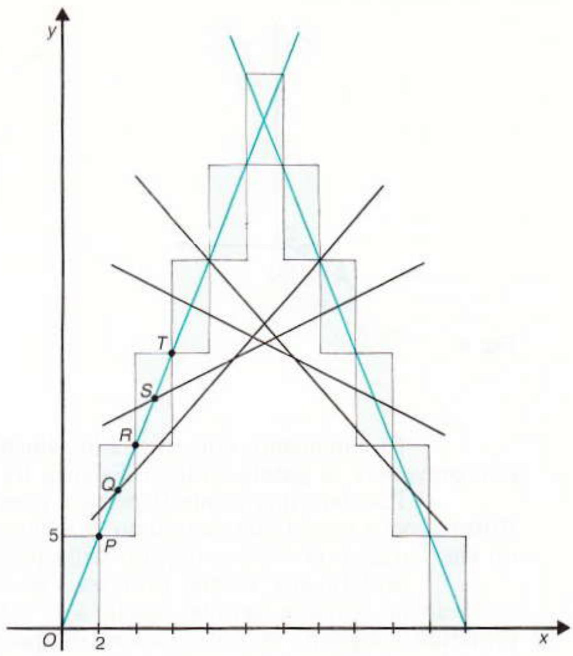

Fig. 9

il vettore velocità risulta *tangente* alla traiettoria. Si capisce così che la traiettoria è una curva (in colore in fig. 8) "inviluppata" dai vari vettori velocità. Siamo dunque arrivati ad individuare la traiettoria, non per punti (cioè congiungendo dei punti), ma come **inviluppo di tangenti**.

Osserviamo ora la fig. 9: abbiamo disegnato in colore la prima e l'ultima tangente. Ci si accorge che le altre tangenti, disegnate in nero, "staccano" su quelle in colore dei segmenti uguali: risulta infatti

$$PQ=QR=RS=\dots$$

come semidiagonali di rettangoli uguali. Da qui, una semplicissima costruzione della curva traiettoria come inviluppo (fig. 10): si disegnano due semirette Or e Os, e su ciascuna di queste si riportano tanti segmenti uguali fra loro; si congiunge l'ultimo punto A_{10} di una semiretta con il primo B_1 dell'altra semiretta, e si continua così, congiungendo A_9 con B_2, A_8 con B_3, ... Si vede così apparire la curva come inviluppo di tangenti.

In fig. 11 questa costruzione è realizzata con sbarrette di meccano (che corrispondono alle semirette Or, Os) e con fili elastici (che corrispondono alle rette $A_{10}B_1$, A_9B_2, ...).

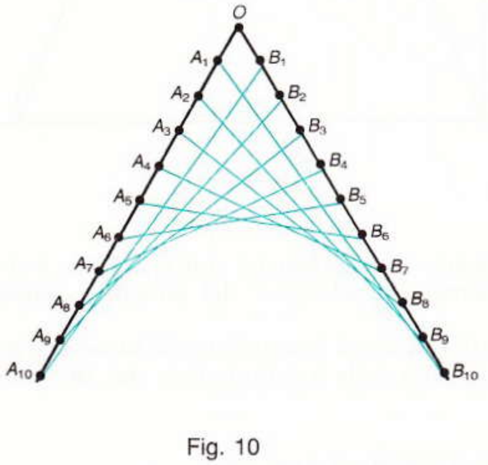

Fig. 10

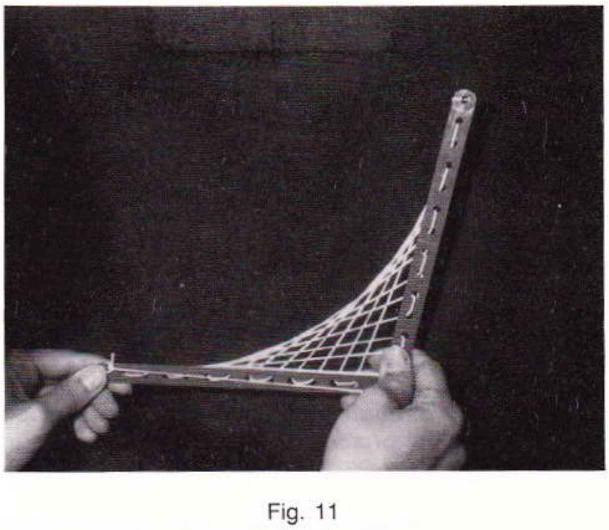

Fig. 11

2. L'equazione della traiettoria: è una parabola

Nel paragrafo precedente siamo riusciti a costruire la traiettoria descritta da un proiettile come inviluppo di tangenti, basandoci su semplici considerazioni di fisica. Sarà ora la matematica, e precisamente la geometria analitica, a farci conoscere la natura di questa curva. Basterà esaminare, separatamente, il movimento nella direzione degli assi cartesiani. Indicando con v_{0x}, v_{0y} le componenti della velocità iniziale v_0 lungo gli assi (fig. 12), si ha che:

- lungo l'asse delle x il movimento ha velocità costante v_{0x}; quindi la distanza x percorsa (a partire da O) è data da

$$x=v_{0x}\cdot t;$$

- lungo l'asse delle y agisce l'accelerazione di gravità, che è costante ed è sempre orientata verso il basso; perciò lo spostamento y è dato da

$$y=v_{0y}\cdot t-\frac{1}{2}gt^2.$$

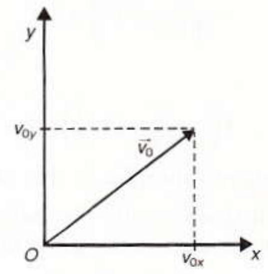

Fig. 12

Dunque, istante per istante, il proiettile occupa un punto del piano che ha le coordinate x e y date da:

$$\begin{cases} x=v_{0x}\cdot t \\ y=v_{0y}\cdot t-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Se ora vogliamo conoscere la traiettoria, cioè la "scia" che il proiettile lascia sul piano, dobbiamo eliminare il tempo t; ricavando t dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda, si ha

$$t=\frac{x}{v_{0x}}$$

$$y=v_{0y}\frac{x}{v_{0x}}-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2. \qquad (1)$$

Riflettiamo sull'equazione (1): siccome g, v_{0x}, v_{0y} sono delle costanti, la (1) è della forma

$$y=ax^2+bx,$$

con $a<0$. Si tratta dunque dell'equazione di una parabola avente l'asse parallelo all'asse delle y.

Si scopre così che **la traiettoria descritta da un proiettile (trascurando la resistenza dell'aria) è una parabola con la concavità rivolta verso il basso**.

3. Calcolo della gittata

Vedremo ora come, basandosi sull'equazione della traiettoria, si può calcolare facilmente la gittata, cioè la distanza fra il punto di caduta e il punto di lancio. Cominciamo da un esempio numerico.

Un cannone imprime a un proiettile la velocità v_0 di 500 m/sec (fig. 13) e l'inclinazione della canna del cannone sull'orizzontale è tale che risulta:

$$v_{0x}=300 \text{ m/sec}, \qquad v_{0y}=400 \text{ m/sec}.$$

Se trascuriamo la resistenza dell'aria, l'equazione della traiettoria è fornita dalla (1); si ha:

$$y=-\frac{1}{2}\,\frac{g}{300^2}x^2+\frac{400}{300}x.$$

Si tratta di una parabola con la concavità rivolta verso il basso. Sostituendo a g il valore 10, approssimato per eccesso, si ha

$$y=-\frac{1}{2}\,\frac{10}{300^2}x^2+\frac{400}{300}x,$$

ossia

$$y=-\frac{5}{300^2}x^2+\frac{4}{3}x. \qquad (2)$$

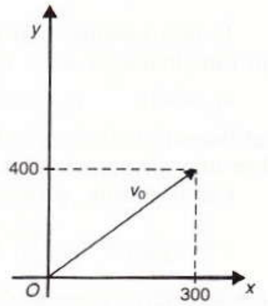

Fig. 13

In fig. 14 abbiamo visualizzato la traiettoria, senza tener conto dei coefficienti della (2), disegnando una parabola con la concavità rivolta verso il basso e passante per l'origine; tale parabola incontra l'asse delle x, oltre che in O, nel punto A.

Vogliamo determinare la distanza OA, cioè la gittata. È chiaro che in A si avrà

$$y=0.$$

Poniamo dunque nell'equazione (2) $y=0$; si ha:

$$-\frac{5}{300^2}x^2+\frac{4}{3}x=0,$$

ossia

$$x\left(-\frac{5}{300^2}x+\frac{4}{3}\right)=0.$$

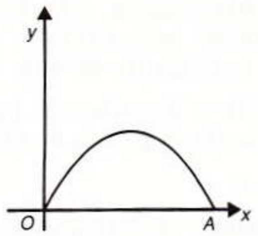

Fig. 14

Si ottengono dunque le due soluzioni seguenti:
- la soluzione $x_1=0$, che individua il punto di partenza O,
- la soluzione x_2 che individua il punto A e si ottiene risolvendo l'equazione:

$$-\frac{5}{300^2}x+\frac{4}{3}=0;$$

si ha:

$$x_2=\frac{4}{3}\cdot\frac{300^2}{5}=24.000.$$

È immediato ora concludere che risulta

$$\overline{OA}=24.000.$$

La gittata è dunque di 24 km.

Per disegnare meglio la parabola, determiniamo l'ordinata del vertice. Siccome l'asse della parabola ha l'equazione

$$x=12.000,$$

l'ascissa del vertice sarà, anche, uguale a 12.000, e l'ordinata risulterà, in km:

$$y=-\frac{5}{300^2}\cdot 12.000^2+\frac{4}{3}\cdot 12.000=8000.$$

In fig. 15 è disegnata la parabola.

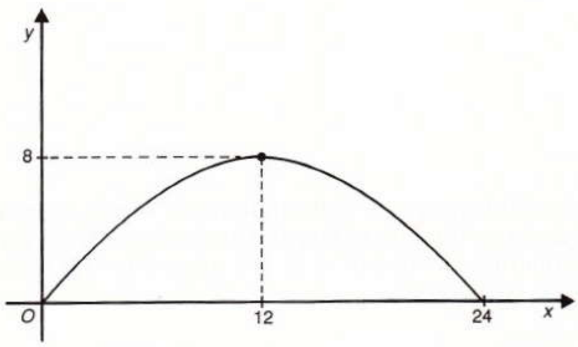

Fig. 15

È interessante trovare la gittata lasciando invariata la velocità iniziale ($v_0=500$ m/sec), ma variando l'inclinazione della canna del cannone. Consideriamo ora come componenti

$$v_{0x}=400, \qquad v_{0y}=300,$$

cioè scambiamo i valori precedenti (fig. 16). Il fatto che la componente v_{0x} è ora più grande potrebbe far prevedere una gittata maggiore.

Calcoliamola, procedendo come prima. L'equazione della parabola è ora

$$y=-\frac{5}{400^2}x^2+\frac{300}{400}x.$$

La gittata si otterrà ponendo $y=0$; si ha:

$$-\frac{5}{400^2}x^2+\frac{4}{3}x=0,$$

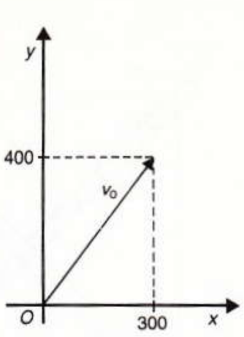

Fig. 16

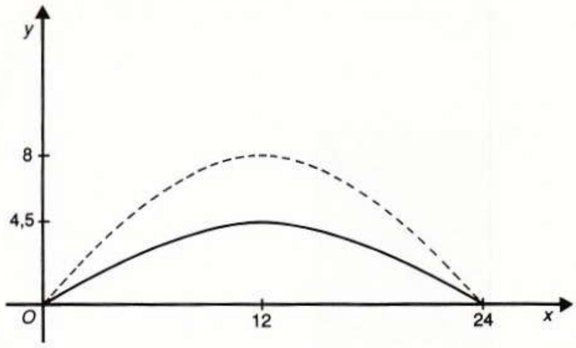

Fig. 17

da cui

$$x_1=0$$

e

$$x_2=24.000.$$

Risulta così $\overline{OA}=24.000$.
Si ottiene dunque una diversa traiettoria (in colore in fig. 17), ma la gittata risulta la stessa; è un caso?

Per chiarire questo fatto determiniamo la formula della gittata in generale, a partire dall'equazione

$$y=-\frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}x^2+\frac{v_{0y}}{v_{0x}}x.$$

Per $y=0$ si ha

$$-\frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}x^2+\frac{v_{0y}}{v_{0x}}x=0,$$

da cui

$$x=0$$

e

$$-\frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}x+\frac{v_{0y}}{v_{0x}}=0,$$

ossia

$$x=\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\cdot\frac{2v_{0x}^2}{g}.$$

Si ottiene così la gittata $\overline{OA}$ data da:

$$\overline{OA}=\frac{2v_{0x}\cdot v_{0y}}{g}.$$

Si osserva che la formula è *simmetrica* rispetto a v_{0x} e a v_{0y}; questo ci dice che la gittata è la stessa se si scambiano le due componenti. Questo risultato, davvero non prevedibile, porta ad intuire, per via geometrica, che la gittata sarà massima se

$$v_{0x}=v_{0y}.$$

Ecco come si ragiona:

$$v_{0x}\cdot v_{0y}$$

rappresenta l'area di un rettangolo (fig. 18) di diagonale v_0; e l'area di un rettangolo di diagonali fissate risulta massima quando le diagonali sono fra loro perpendicolari, cioè nel caso del quadrato (fig. 19). Ci si rende conto di questa proprietà realizzando un modello in cui le diagonali sono due sbarrette uguali (tipo meccano) imperniate nel punto medio (con vite e dado) e il perimetro è costituito da filo elastico.

Si conclude così che quando l'angolo formato da v_0 con l'orizzontale è di 45°, la gittata è massima.

All'intuizione fisico-geometrica si può far seguire una semplice dimostrazione algebrica. Osser-

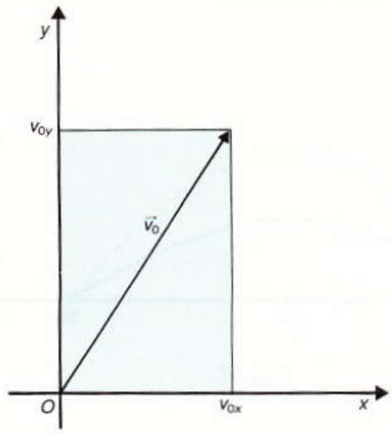

Fig. 18

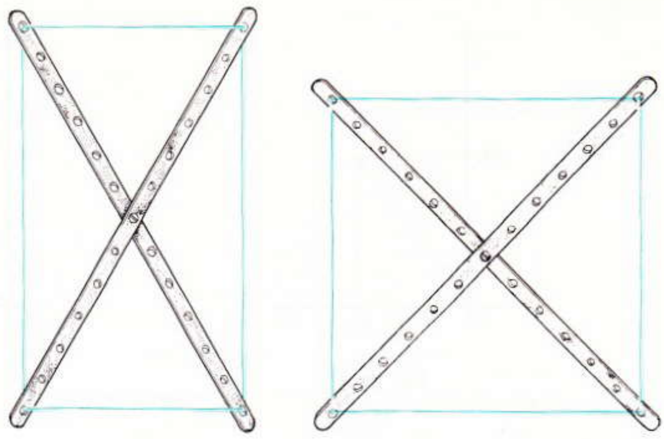

Fig. 19

viamo che si deve determinare il valore massimo del prodotto

$$v_{0x} \cdot v_{0y},$$

sapendo che, per il teorema di Pitagora (fig. 18) risulta

$$v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = v_0^2.$$

Conviene allora trovare il massimo di

$$v_{0x}^2 \cdot v_{0y}^2,$$

e scrivere, per semplicità:

$$v_{0x}^2 = h \qquad \text{e} \qquad v_{0y}^2 = k$$

indicando con $2s$ la costante v_0^2.
Si tratta allora di cercare il massimo del prodotto

$$h \cdot k,$$

sapendo che risulta

$$h + k = 2s.$$

È evidente che nel caso in cui le due grandezze h, k, sono uguali risulta

$$h = k = s,$$

mentre negli altri casi si ha che:

h è dato da s aumentato di un valore z
k » » » » diminuito dello stesso valore z.

Quindi il prodotto $h \cdot k$, di cui cerchiamo il massimo, si può scrivere così:

$$h \cdot k = (s+z)(s-z) = s^2 - z^2;$$

ora, $s^2 - z^2$ è massimo se ad s^2 non si toglie nulla, cioè se si sceglie

$$z = 0.$$

Risulta allora che il caso

$$h = s, \qquad k = s,$$

cioè

$$v_{0x}^2 = v_{0y}^2 \qquad \text{ossia} \qquad v_{0x} = v_{0y}$$

è quello in cui è massimo il prodotto $v_{0x} \cdot v_{0y}$.

Il valore della gittata è dunque massimo quando le componenti di v_0 sono uguali, cioè quando si ha un quadrato di diagonale v_0 (fig. 20). In tal caso risulta

$$v_{0x} = v_{0y} = \frac{v_0}{\sqrt{2}},$$

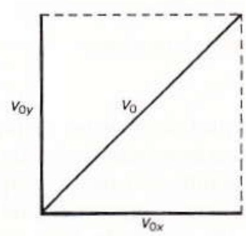

Fig. 20

e la gittata massima è data da

$$\overline{OA}=\frac{2\cdot\dfrac{v_0}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{v_0}{\sqrt{2}}}{g}=\frac{2\cdot\dfrac{v_0^2}{2}}{g}=\frac{v_0^2}{g}\ .$$

Nel caso numerico di prima, in cui $v_0=500$, la gittata massima è

$$\overline{OA}=\frac{500^2}{g}\cong\frac{250.000}{10}=25.000.$$

Dunque un proiettile lanciato con una velocità iniziale di 500 m/s raggiunge una gittata massima di 25 km.