1
Geometria analitica

Parte prima
Il piano cartesiano

Parte seconda
Curve e funzioni

Parte terza
Trasformazioni del piano

Parte quarta
Intersezione di curve

Parte quinta
Fasci di curve

Parte sesta
Disequazioni sul piano cartesiano

La geometria analitica nei secoli

"Geometria analitica": l'aggettivo "analitica" fa capire che non è la solita geometria, "pura"; si tratta infatti di una geometria che è legata all'aritmetica, all'algebra,... ai numeri insomma.

Per coglierne subito lo spirito, conviene partire dalle critiche che uno dei fondatori del metodo analitico, René Descartes (spesso noto col nome latinizzato di Cartesio), porta all'istruzione che egli stesso aveva avuto nelle scuole secondarie francesi[1]. Dopo aver osservato che la cultura tradizionale, di carattere prevalentemente umanistico-letterario, si basa più sull'esercizio della fantasia e sullo studio delle grandi opere degli altri, che non su una ricerca diretta da parte degli studenti, ecco che cosa scrive nei riguardi della matematica:

«Avevo un po' studiato, quando ero più giovane, **la logica** *nel corso di filosofia, e* **la geometria e l'algebra** *nel corso di matematica; tre arti o scienze che dovevano contribuire ai miei studi. Ma, esaminandole bene, mi sono accorto che, per la logica, i suoi sillogismi e la maggior parte delle altre istruzioni servono a spiegare le cose che già si sanno, e a parlare di quelle che non si conoscono senza però essere in grado di darne un giudizio... Poi, per quanto riguarda la geometria degli antichi e l'algebra dei moderni[2], oltre al fatto che sono materie molto astratte e che sembrano non avere alcuna applicazione, la prima è sempre così legata alla considerazione di figure che non si arriva a capirla senza sforzare troppo l'immaginazione, e l'altra è talmente assoggettata a regole su regole che se ne è fatta un'arte confusa e oscura che appesantisce lo spirito invece di farne una scienza che lo coltiva. È per queste ragioni che ho pensato che occorreva cercare un altro metodo matematico, un metodo che, tenendo conto dei lati positivi delle tre, fosse esente dai loro difetti».*

Per rendere più chiaro il suo pensiero, Cartesio porta un esempio di politica; dice: «la moltitudine delle leggi fornisce spesso la scusa ai "vizi"[3], mentre uno Stato è governato molto meglio quando di leggi ne ha poche, perché, allora, esse vengono strettamente osservate». Sono queste considerazioni, portate nel campo della scienza, che lo conducono ad enunciare quattro «regole atte a dirigere la mente alla ricerca».

*Le regole di Cartesio si riassumono così: 1) non si deve accettare nulla come vero se non è così chiaro da rimuovere ogni dubbio (***regola dell'evidenza***); 2) occorre dividere le difficoltà in "piccoli elementi" (***regola dell'analisi***); 3) bisogna procedere dal semplice al complesso (***regola della sintesi***); 4) bisogna infine rivedere, passo per passo, i ragionamenti seguiti, in modo da verificare che nulla sia stato omesso (***regola dell'enumerazione***).*

Ispirandosi a questi principi generali, Cartesio si consacra alla matematica, motivato dal suo costante interesse alle applicazioni e ai fenomeni della natura, e, anche – come lui stesso dice in uno sfogo mistico – perché suggestionato da un sogno, fatto il 10 novembre 1619, in cui gli era stato rivelato che la natura non è che un grande sistema geometrico e che, quindi, è proprio dalla geometria che si deve partire. Ma, ascoltiamolo ancora una volta: «Ho deciso di abbandonare quella geometria che è unicamente astratta e che serve solo ad esercitare la mente, per studiare, invece, un altro tipo di geometria, che ha, come obiettivo, la spiegazione dei fenomeni della natura».

[1] Il passo che riportiamo si trova nella prima parte del "Discorso del metodo", 1637.

[2] La «geometria degli antichi» è la geometria dei Greci; l'«algebra dei moderni» è l'algebra come era stata sviluppata nel Cinquecento.

[3] Noi diremmo «a svicolare nell'illegalità».

Con questa dichiarazione egli rompe apertamente con le idee della matematica greca; se ne distacca poi del tutto per i procedimenti seguiti. Fermiamoci su quest'ultima affermazione: la geometria era, per i Greci, la fonte di ogni scoperta matematica, a tal punto che un problema di aritmetica o di algebra veniva "tradotto" in chiave geometrica; per esempio, un'equazione del tipo

$$ax+x^2=b^2,$$

che qui scriviamo col simbolismo moderno, viene da Euclide interpretata così: «prolungare un segmento $AB=a$ (fig. 1) di un tratto x e costruire un rettangolo, di diagonale AM, che sia composto di un rettangolo di dimensioni a ed x, e di un quadrato di lato x, in modo tale che il grande rettangolo sia equivalente a un quadrato di lato b».

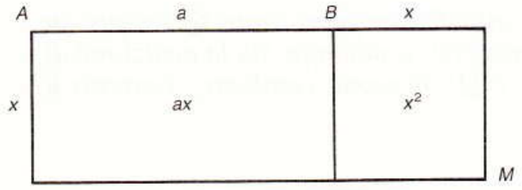


Fig. 1

La figura chiarifica l'enunciato; si capisce però che, caso per caso, cambia l'interpretazione geometrica e, quindi, occorre ogni volta affrontare il problema in modo diverso.

Cartesio vuole valersi «dell'algebra dei moderni», e capovolge il procedimento: è ***l'algebra di cui si vale per risolvere problemi di geometria.*** *E siccome l'algebra ha delle regole "universali", si propone di dare anche alla geometria dei procedimenti altrettanto generali.*

Cerchiamo di cogliere il suo pensiero: davanti a una figura come un poligono, osserva la posizione reciproca dei lati e vuole esprimerla "in formula"; prima di tutto è condotto a riflettere "sul modo algebrico" di descrivere una retta che appartiene a un piano. Una retta è determinata da due punti; occorre allora, prima di tutto, vedere come "si localizza" un punto. Per noi, è molto facile capire che un punto può essere individuato se ne diamo le distanze a, b (fig. 2) da due assi di riferimento (quel riferimento che sarà poi chiamato cartesiano); per Cartesio, questa idea era... tutta da inventare!

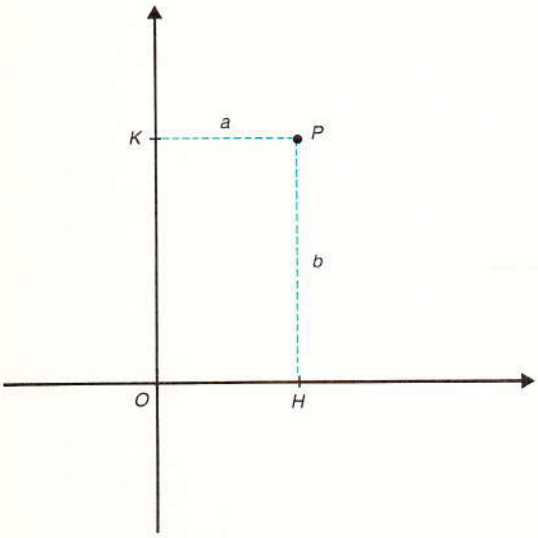


Fig. 2

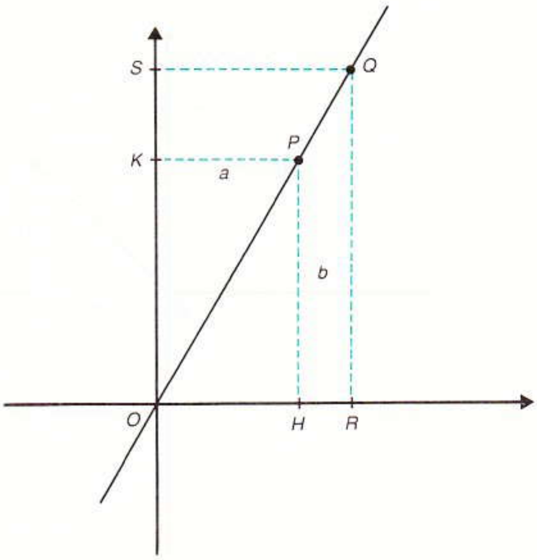


Fig. 3

Una volta ideato il riferimento, c'è un altro passo da fare; questo: se due punti P, Q si trovano sulla stessa retta r come in fig. 3, le loro distanze PH, PK e QR, QS non possono essere "qualunque"; se infatti P e Q sono su r, allora ci sono due triangoli simili (OPH e OQR), e quindi ci sono dei rapporti uguali. Cartesio si basa su una ben nota proprietà geometrica, e la "esalta" a tal punto da farne l'inizio della sua teoria. Ecco come procede: tenendo presente l'uguaglianza di quei rapporti, si ha

$$\frac{QR}{PH}=\frac{OQ}{OH}$$

ossia

$$\frac{QR}{b}=\frac{OR}{a}.$$

Immaginiamo ora di tenere fisso il punto P e di far variare Q sempre su quella retta; quei rapporti devono mantenersi, qualunque sia la posizione di Q. Per far capire che i segmenti QR e QS possono cambiare, Cartesio li indica con y e x; si ha allora

$$\frac{y}{b}=\frac{x}{a}$$

ossia

$$y=\frac{b}{a}x.$$

Ecco, una proprietà geometrica – un punto che percorre una retta – si traduce in una proprietà algebrica, in un'equazione.

Tutto un mondo si apre all'indagine, alla scoperta. Perché non saranno solamente le rette a poter essere tradotte in equazione, ma... qualunque curva: basta tradurre algebricamente la proprietà che caratterizza questa o quella curva. Sarà, per fare un altro esempio, la proprietà della circonferenza di avere ogni suo punto ugualmente distante dal centro a condurci in modo facilissimo a scriverne l'equazione: basta esprimere il raggio r per mezzo del teorema di Pitagora (fig. 4) per avere l'equazione del cerchio; eccola:

$$x^2+y^2=r^2.$$

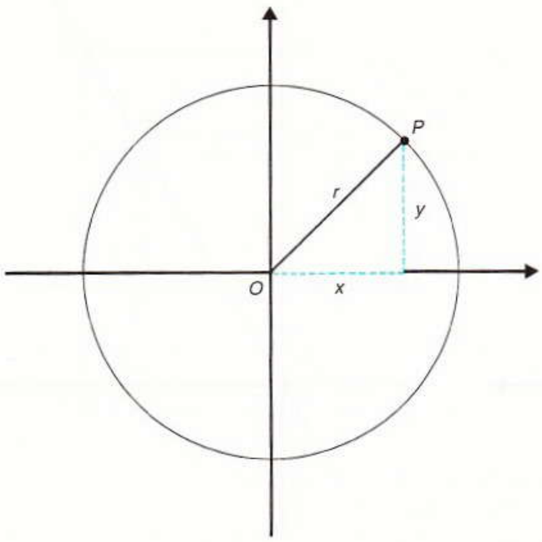


Fig. 4

Ma è facile intuire che non è solo il mondo della geometria che è interessato a questo processo di algebrizzazione: dai vari tipi di moto a questioni di ottica, ai più vari fenomeni naturali, dovunque sia possibile descrivere graficamente il problema, una traduzione analitica ne fisserà la legge. Cartesio, trascinato dalla scoperta di questo procedimento, non vedeva limiti alla scienza, e parafrasando il famoso detto di Archimede a proposito della leva, «datemi un punto d'appoggio e io solleverò la Terra», scrisse «datemi l'estensione [e cioè la figura] e il moto, e io vi costruirò l'universo!».

Cartesio – l'abbiamo detto all'inizio – è ***uno dei fondatori*** *della geometria analitica. Perché – e non è la prima volta che da parte di due scienziati si arrivi ad una stessa scoperta nel medesimo periodo – un altro matematico francese, Pierre Fermat, aveva avuto le stesse idee proprio in quegli anni. Pierre Fermat è uno dei più originali matematici di tutti i tempi; e la cosa più impressionante è che... non era matematico! Per tutta la vita esercitò la professione di avvocato nella città di Tolosa, ma il suo hobby era la matematica; e forse proprio perché non era che il suo hobby non pensò mai a pubblicare qualcosa: le sue grandi scoperte sono appuntate sui bordi delle pagine dei libri che più lo interessavano. È solo dopo la sua morte che la sua opera, che consisteva in moltissime note, in appunti, in lettere ad altri matematici, fra i quali anche Cartesio, fu riordinata, riorganizzata e finalmente pubblicata. E sembra che alle scoperte fatte da Cartesio, Fermat fosse giunto qualche anno prima.*

E prima del Seicento? La geometria analitica nacque veramente dal nulla? L'idea di un riferimento formato da un reticolato (come fosse un foglio a quadretti) in cui erano disegnate due rette "fondamentali" è veramente molto antica: gli Egiziani se ne erano valsi allo scopo di mettere in evidenza la posizione delle stelle, i Greci per localizzare città e paesi sulla prima carta geografica (Dicearco, 300 a.C.), i Romani al fine di progettare la pianta di nuove città. In tutti questi casi, però, si tratta solo di un'illustrazione grafica precisata per mezzo di un riferimento; non è certamente la geometria analitica. È nel X secolo che troviamo in una pergamena conservata nella Regia Biblioteca di Monaco, in Germania, qualcosa di più: vi si trovano infatti indicate le traiettorie dei pianeti, sono tracciate dunque delle curve.

Un vero passo avanti verso la geometria analitica del Seicento viene fatto solo nel 1300 per opera di un religioso francese, Nicola d'Oresme: la sua idea geniale fu quella di utilizzare il riferimento per riportare dei dati numerici tratti da esperimenti di fisica, cioè delle misure eseguite dall'uomo; e tabelle e grafici condussero d'Oresme, che era un economista e non un matematico di professione, a scoprire proprietà e leggi.

Ma le idee di Nicola d'Oresme non potevano essere sviluppate fino a che non era sviluppato lo strumento essenziale: l'algebra; bisognava attendere.

E dopo il Seicento, dopo l'opera di Cartesio e di Fermat, quale sviluppo ha avuto la geometria analitica?

Accade sempre che le grandi idee suggeriscono altre idee, altri sviluppi. L'associazione di "equazione e curva" non solo permise di tradurre curve note in equazioni e, quindi, di studiarle analiticamente, ma, viceversa, condusse alla scoperta di nuove curve a partire "dall'invenzione" delle più varie equazioni. E, cambiando le equazioni, si introdusse ben presto una terza variabile: voleva dire uscire dal piano, individuare un *punto per mezzo di tre coordinate x, y, z (fig. 5), e considerare superficie e curve nello spazio.*

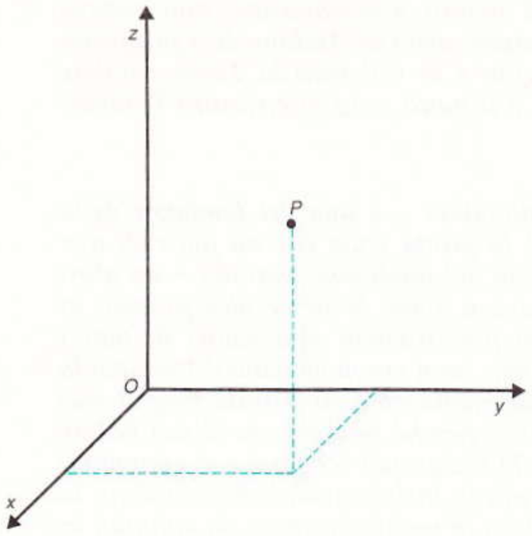


Fig. 5

E se si aumentava ancora di una variabile? Si può pensare che la quarta variabile, t, indichi ***il tempo****; l'algebra porta così a vedere quello che è impossibile per l'occhio: le quattro variabili non solo permettono di localizzare la posizione di un punto nello spazio, ma ci dicono, anche, in quale momento quel punto si trova in quella posizione, e, quindi, servono a precisare un evento nel tempo.*

Siamo ormai lontani dalla geometria analitica piana di Cartesio e di Fermat, ma sono state le loro idee a cambiare la faccia della matematica!

1. Parte prima
Il piano cartesiano

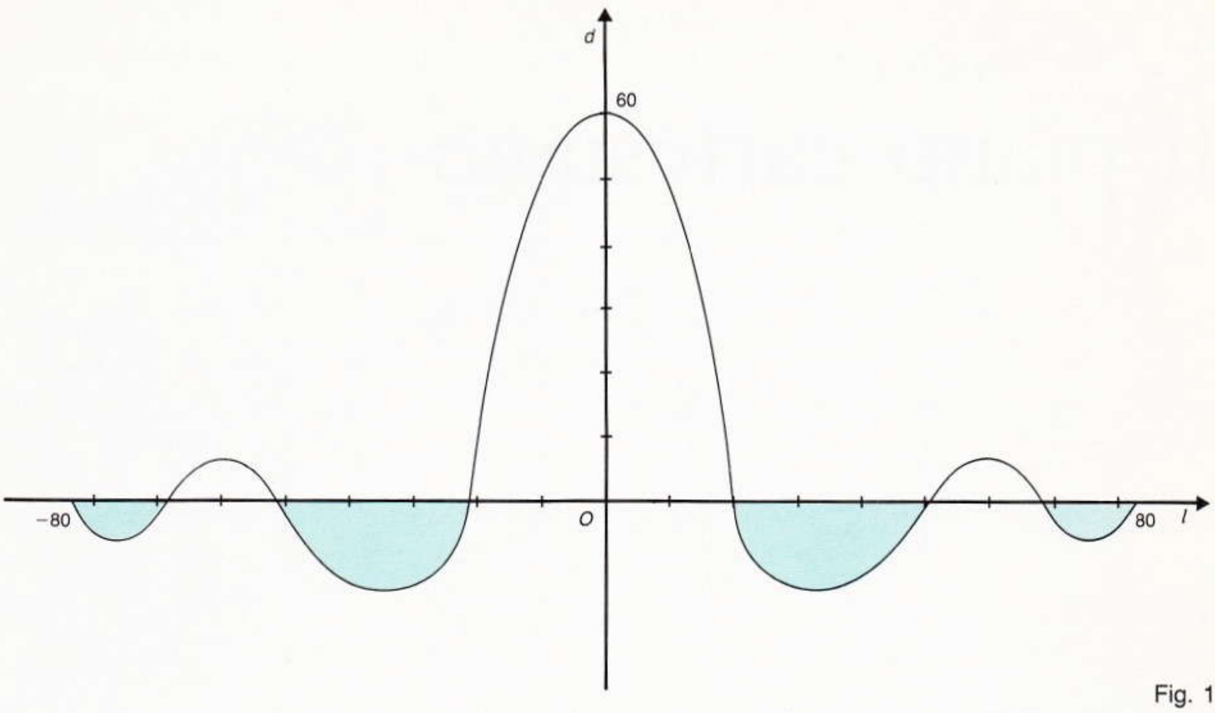


Fig. 1

1. I grafici oggi

Oggi sempre più spesso si vedono dei grafici alla televisione, su quotidiani, riviste, libri... Ecco un esempio, tratto da un articolo del 1983, che parla di progetti per controllare il ciclo dell'acqua a livello mondiale.

In fig. 1 è indicata con l la latitudine misurata in gradi e con d la differenza fra precipitazioni ed evaporazione espressa in centimetri all'anno. La latitudine $l=0$ indica l'equatore, valori positivi di l indicano latitudini Nord e valori negativi di l indicano latitudini Sud. Inoltre, $d=0$ indica che le precipitazioni sono compensate dall'evaporazione (cioè l'acqua portata dalle piogge evapora completamente), mentre valori positivi di d indicano il fatto che le precipitazioni superano l'evaporazione e valori negativi di d indicano il fenomeno opposto.

Il grafico sintetizza dunque molte informazioni. Per esempio, si nota subito che la curva ottenuta è quasi simmetrica rispetto all'equatore, dove c'è una zona di scarsa evaporazione; ai lati opposti di questa zona si trovano invece due zone dove è notevole l'eccesso di evaporazione. Si riesce così a prevedere il principale effetto dell'alternarsi di queste zone: in ogni emisfero il vapor d'acqua che si genera nella "zona più umida" viene trasportato verso il Polo, lasciando spesso alcune zone vicino all'equatore in condizioni di tragica siccità.

Come intervenire in questo ciclo naturale? Sarà "l'acceleratore aerologico" a risolvere questo grave problema?

Cerchiamo ora di fissare quali sono gli elementi che rendono così espressivo il grafico della fig. 1. Per riportare graficamente i dati relativi alla latitudine l e alla differenza d fra precipitazioni ed evaporazione, si "prepara" il disegno in questo modo:

a) si tracciano due rette perpendicolari, che si incontrano in un punto O, decidendo di rappresentare i dati relativi alla latitudine sulla retta contrassegnata dalla lettera l e i dati relativi alla differenza d sull'altra retta (fig. 2);

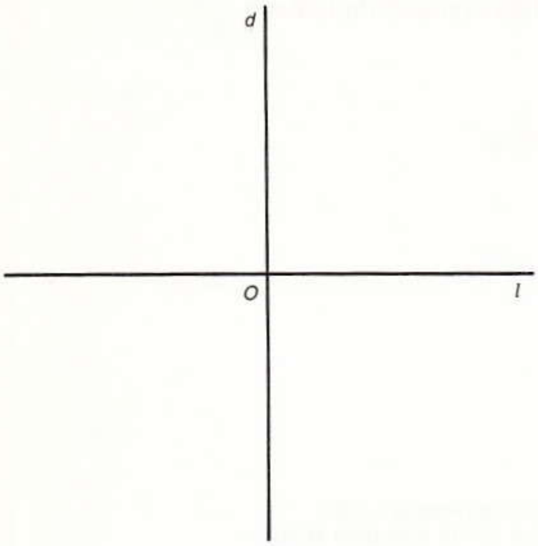


Fig. 2

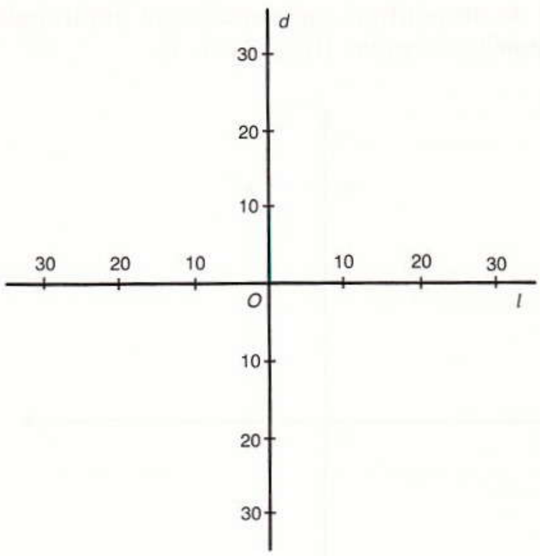


Fig. 3

b) si sceglie su ciascuna di queste rette un'unità di misura delle lunghezze: così ogni valore numerico di d o di l può essere visualizzato con la lunghezza di un segmento (fig. 3);

c) si sceglie su ogni retta un verso di percorrenza: si possono così distinguere anche graficamente i valori di l o di d positivi da quelli negativi (fig. 4).

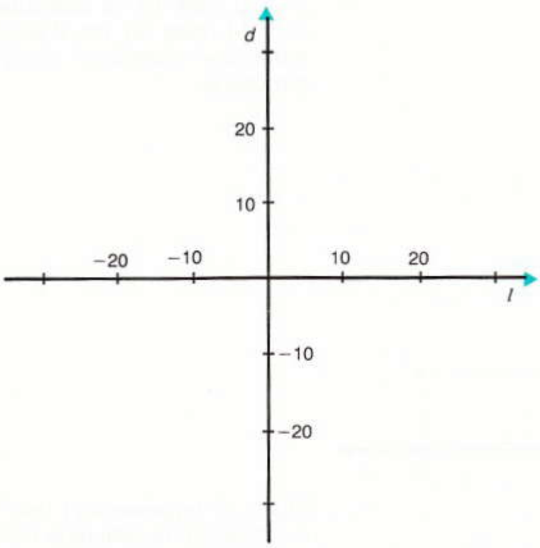


Fig. 4

In questo modo ogni coppia di dati (l, d) può essere rappresentata da un punto e, viceversa, ogni punto indicherà una coppia di dati. Ecco qualche esempio (figg. 5, 6, 7).

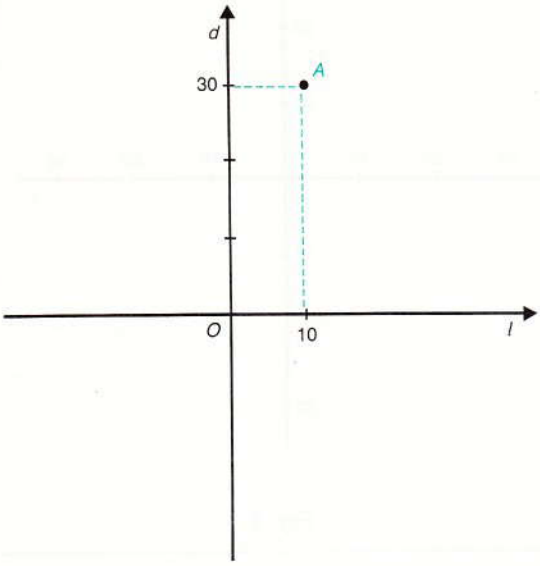


Fig. 5. *A* rappresenta i dati:
l=10, cioè 10° di latitudine Nord
d=30, cioè 30 cm d'acqua per anno che "restano" dopo l'evaporazione.

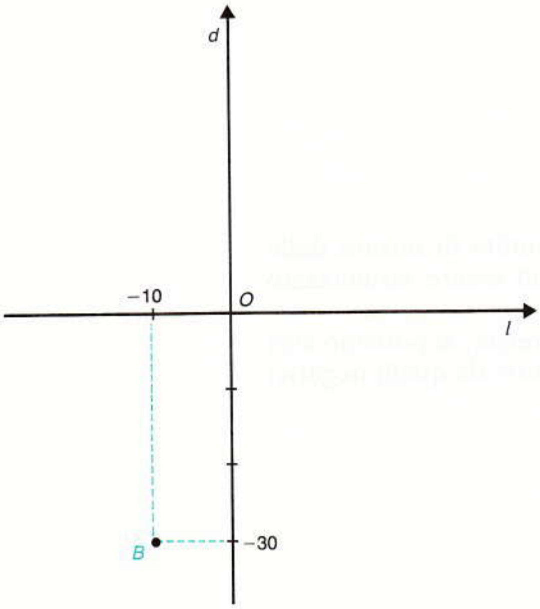


Fig. 6. *B* rappresenta i dati:
l=−10, cioè 10° di latitudine Sud
d=−30, cioè 30 cm d'acqua per anno che "mancano" dopo l'evaporazione.

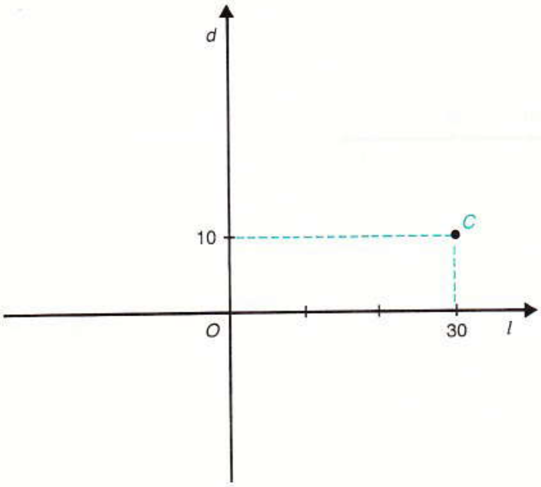


Fig. 7. *C* rappresenta i dati:
l=, cioè 30° di latitudine Nord
d=10, cioè 10 cm d'acqua per anno che "restano" dopo l'evaporazione.

2. Le coordinate cartesiane

Oggi, come abbiamo detto nel paragrafo precedente, i grafici compaiono nei settori più vari della scienza e della tecnica. Tuttavia, la storia della geometria analitica ci dice che non è stato un interesse applicativo a spingere Cartesio a "creare" la geometria analitica. L'idea principale di Cartesio era quella di studiare per mezzo dell'algebra le proprietà geometriche stabilite da Euclide.

E siccome Euclide pone a fondamento della geometria la nozione di punto, la geometria analitica ha inizio con la «traduzione di un punto in numeri». Ecco come si procede:

a) si disegnano sul piano due rette perpendicolari (fig. 8); una delle rette è detta **asse delle x o asse delle ascisse**[1], l'altra retta è detta **asse delle y o asse delle ordinate**. Il loro punto di intersezione O è detto origine del piano cartesiano. Le due rette dividono il piano in quattro **quadranti**, che sono numerati come in fig. 8;

b) si sceglie come unità di misura delle lunghezze il segmento OU (fig. 9);

c) si fissa su ogni asse un verso di percorrenza (fig. 10).
In questo modo si stabilisce sul piano un **riferimento cartesiano**.

Scelto ora un qualunque punto P del piano, possiamo associare ad esso una coppia di numeri, che prendono il nome di ascissa ed ordinata. Ecco come si procede.

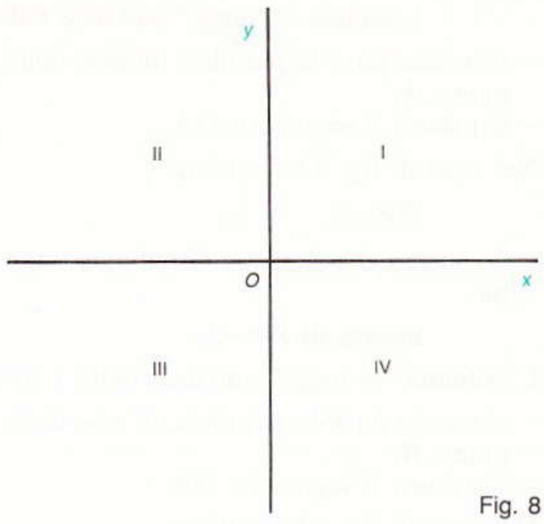


Fig. 8

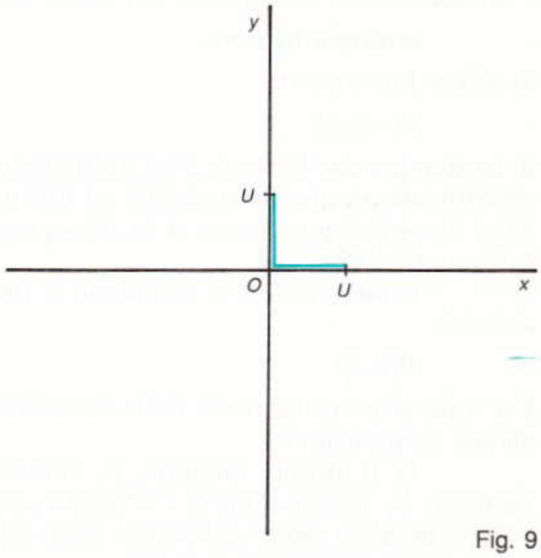


Fig. 9

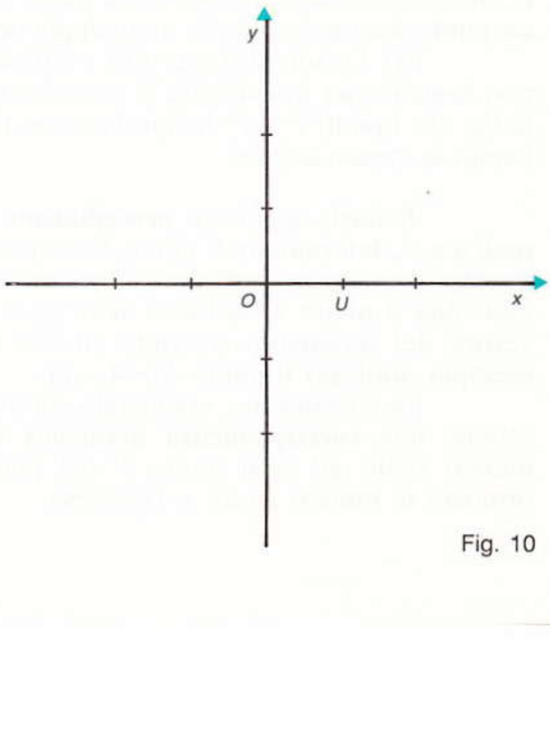


Fig. 10

[1] Il termine *ascissa* viene dal latino "*ab-scindere*", che vuol dire tagliare, dividere.

L'ascissa "si legge" sull'asse delle x nel modo seguente (fig. 11):
- si traccia da P la parallela all'asse delle y, che incontra l'asse delle x nel punto A;
- si misura il segmento OA.

Nel caso di fig. 13 si ottiene

$\overline{OA}=3$;

- si osserva che A segue O nel verso opposto a quello stabilito e quindi si ha

ascissa di $P=-3$.

L'ordinata "si legge" sull'asse delle y in modo analogo (fig. 12):
- si traccia da P la parallela all'asse delle x, che incontra l'asse delle y nel punto B;
- si misura il segmento OB.

Nel caso di fig. 14 si ottiene

$\overline{OB}=2$;

- si osserva che B segue O nel verso stabilito e quindi si ha:

ordinata di $P=2$.

Si scrive brevemente:

$P(-3,2)$.

Si ha dunque che l'ascissa a e l'ordinata b di un punto P (fig. 13) indicano, rispettivamente, le distanze $\overline{OA}$ ed $\overline{OB}$ precedute da un segno convenzionale; il segno è positivo se A (o B) segue O nel verso scelto e negativo nel caso contrario.

I numeri a e b si chiamano le **coordinate cartesiane** del punto P e si scrive

$P(a,b)$.

Per valersi correttamente delle coordinate è opportuno tenere presenti alcune osservazioni.

I) Il primo numero, a, indica sempre l'ascissa e il secondo numero, b, indica sempre l'ordinata; perciò, se si scambia a con b, si ottiene un altro punto del piano. Ecco un esempio: la fig. 14 mostra, sullo stesso piano cartesiano, i punti

$P(-3,2)$ e $Q(2,-3)$.

È immediato osservare che i due punti non coincidono! Le coordinate di un punto formano dunque una **coppia ordinata di numeri**.

II) Le sole distanze $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ di un punto P dagli assi cartesiani non bastano per individuare le coordinate del punto; osserviamo, infatti, la fig. 15: i punti P e P' hanno la stessa distanza dall'asse delle y, ma non hanno la stessa ascissa!

È facile seguire **il procedimento inverso** e cioè: dati due numeri reali a e b, determinare il punto P del piano che ha le coordinate (a, b). Si ha che l'ascissa a individua il punto A sull'asse delle x, l'ordinata b individua il punto B sull'asse delle y; si ottiene il punto P come quarto vertice del rettangolo costruito su OA e OB. In fig. 16 abbiamo, per esempio, indicato il punto $P(-4,-1)$.

In conclusione, stabilendo sul piano un riferimento cartesiano, si ottiene una **corrispondenza biunivoca** fra punti e coppie ordinate di numeri reali: ad ogni punto P del piano corrisponde un'unica coppia ordinata di numeri (a,b), e viceversa.

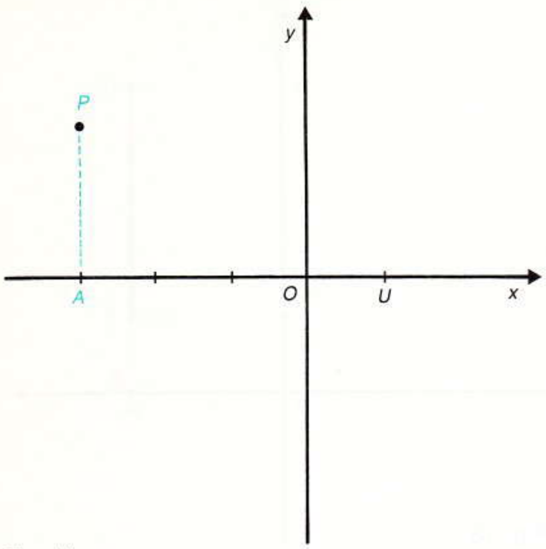


Fig. 11

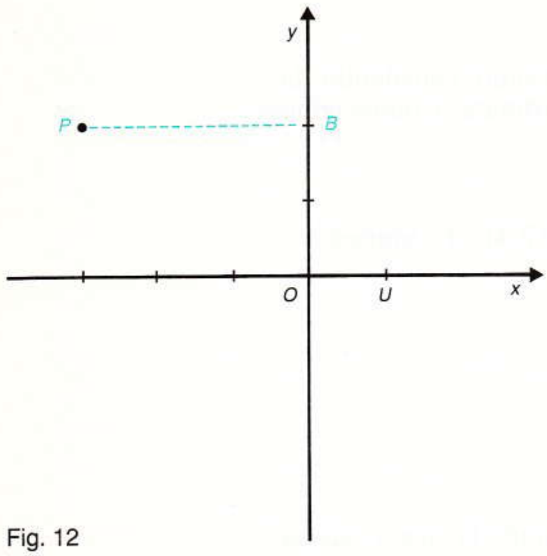


Fig. 12

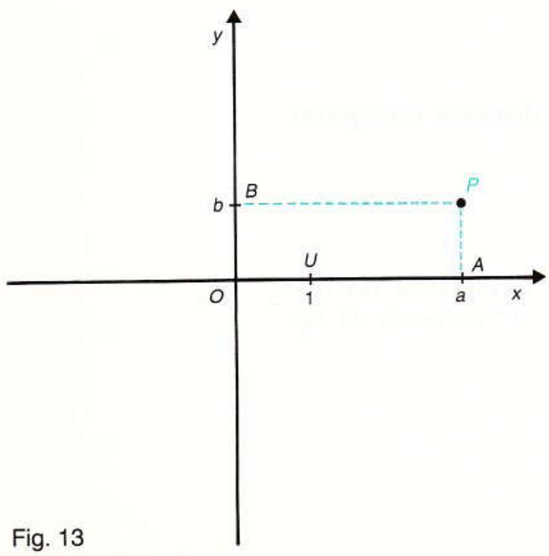


Fig. 13

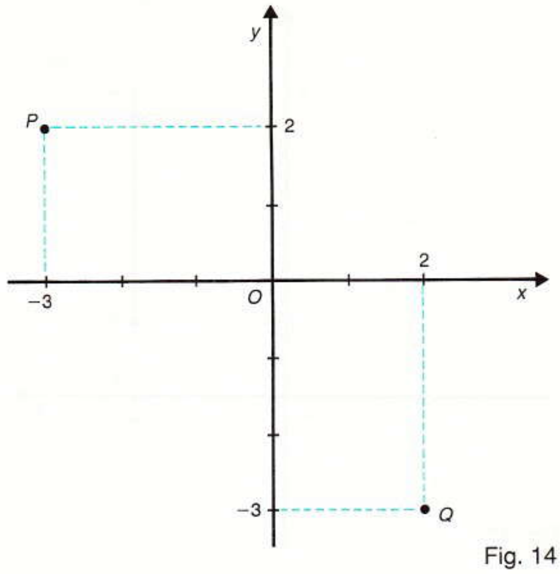


Fig. 14

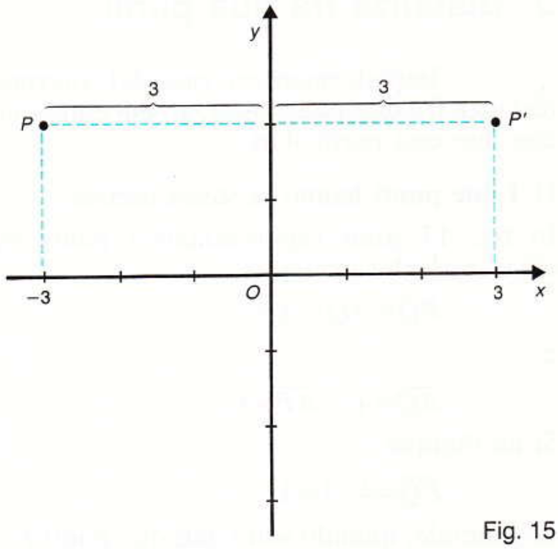


Fig. 15

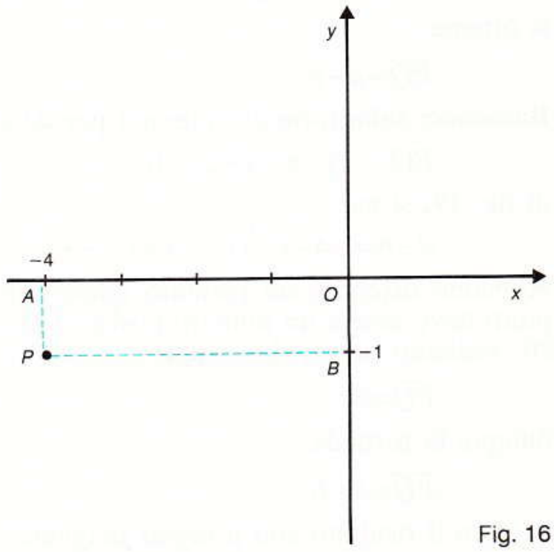


Fig. 16

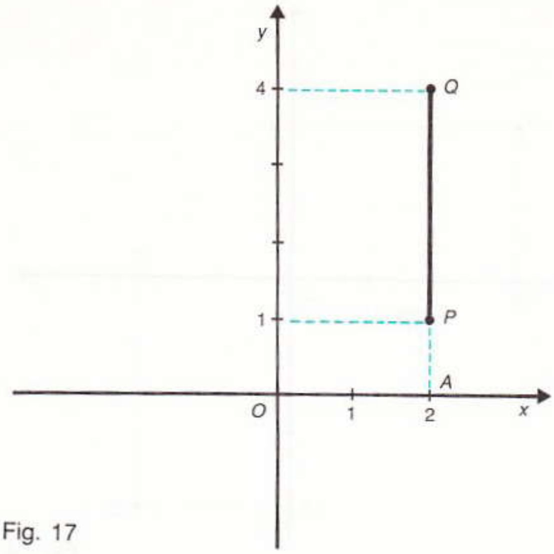


Fig. 17

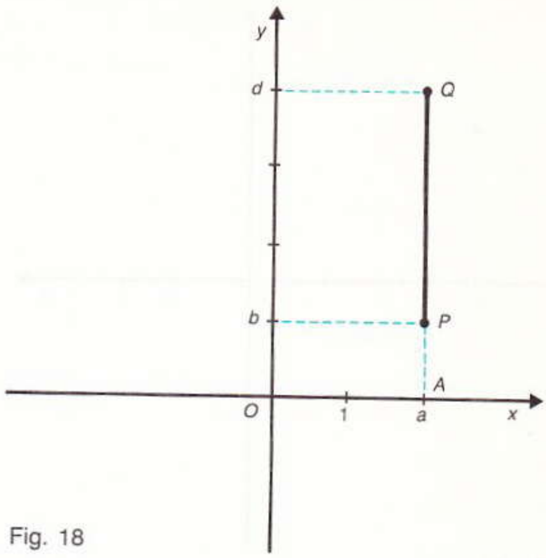


Fig. 18

3. Distanza fra due punti

Impadroniamoci ora del riferimento cartesiano calcolando la distanza fra due punti P e Q di cui conosciamo le coordinate. Cominciamo con due casi particolari.

I) **I due punti hanno la stessa ascissa**

In fig. 17 sono rappresentati i punti $P(2,1)$ e $Q(2,4)$. È immediato constatare che risulta:

$$PQ = AQ - AP$$

e

$$\overline{AQ} = 4, \quad \overline{AP} = 1.$$

Si ha dunque:

$$\overline{PQ} = 4 - 1 = 3.$$

In generale, quando sono dati due punti P e Q, che hanno la stessa ascissa a (fig. 18),

$$P(a,b) \quad \text{e} \quad Q(a,d),$$

si ottiene

$$\overline{PQ} = d - b.$$

Basiamoci sulla formula ottenuta per determinare la distanza fra i punti

$$P(2,-1) \quad \text{e} \quad Q(2,-4)$$

di fig. 19; si ha:

$$d - b = -4 - (-1) = -4 + 1 = -3.$$

Abbiamo ottenuto un risultato inaccettabile, perché la distanza fra due punti deve essere un numero positivo! Dov'è l'errore? Osservando la fig. 20, vediamo subito che risulta

$$\overline{PQ} = 3;$$

dunque la formula

$$\overline{PQ} = d - b$$

ha dato il risultato con il segno sbagliato!

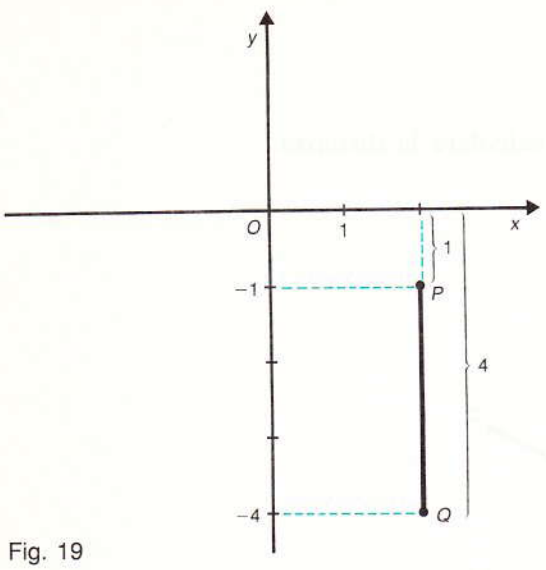


Fig. 19

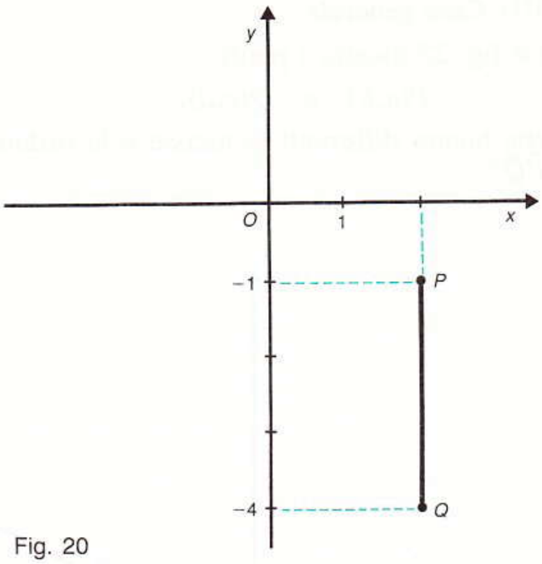


Fig. 20

Questo è dovuto al fatto che in fig. 19 i punti P e Q sono in ordine opposto rispetto a quello di fig. 18. È proprio per evitare di dover prestare attenzione all'ordine in cui si susseguono i punti che si scrive

$$\overline{PQ}=|d-b|,$$

dove il simbolo $|d-b|$ si legge **valore assoluto** della differenza $d-b$ o anche **modulo** di $d-b$. Con questa notazione si intende ricordare che $\overline{PQ}$ è sempre un numero positivo; perciò, se la differenza $d-b$ risulta negativa, deve essere cambiata di segno. Così, nel caso di fig. 19 si ha

$$\overline{PQ}=|-4-(-1)|=|-3|=3.$$

II) **I due punti hanno la stessa ordinata**

Si ripetono le considerazioni precedenti relativamente a due punti che hanno la stessa ordinata b, ma differenti ascisse; se sono dati i punti

$$P(a,b) \quad \text{e} \quad Q(c,b),$$

si ottiene (fig. 21)

$$\overline{PQ}=|c-a|.$$

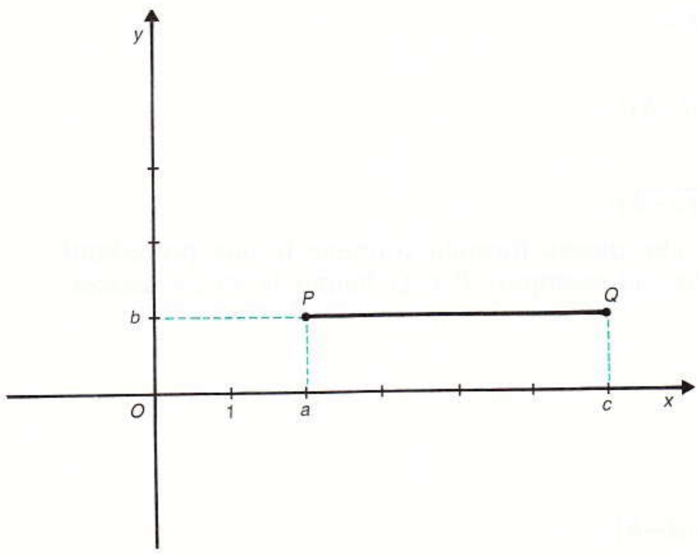


Fig. 21

III) **Caso generale**

La fig. 22 mostra i punti

$$P(a,b) \quad \text{e} \quad Q(c,d),$$

che hanno differenti le ascisse e le ordinate. Come calcolare la distanza $\overline{PQ}$?

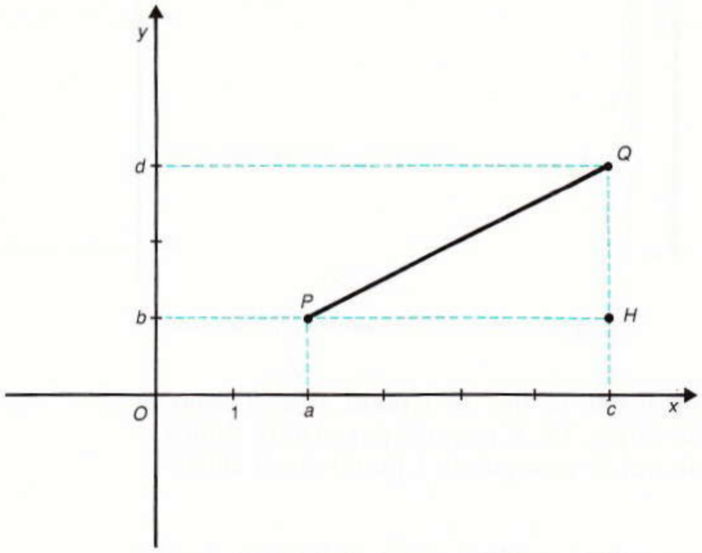


Fig. 22

Cerchiamo di ricondurci ai due casi precedenti, tracciando da P la parallela all'asse delle x e da Q la parallela all'asse delle y. Si ottiene così il punto

$$H(c,b).$$

Osservando la fig. 22, vediamo subito che sappiamo calcolare le distanze

$$\overline{PH}=|c-a| \quad \text{e} \quad \overline{QH}=|d-b|.$$

Una volta calcolate queste distanze, potremo ottenere $\overline{PQ}$, basandoci sul teorema di Pitagora. Si ha

$$PQ^2=PH^2+HQ^2,$$

ossia

$$\overline{PQ}^2=(c-a)^2+(d-b)^2$$

e, infine,

$$\overline{PQ}=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}.$$

È interessante osservare che questa formula contiene le due precedenti come caso particolare. Se, ad esempio, P e Q hanno la stessa ascissa, risulta

$$c=a;$$

cioè

$$c-a=0$$

e

$$\overline{PQ}=\sqrt{(d-b)^2}=|d-b|.$$

4. Un esercizio sulla formula della distanza fra due punti

Le relazioni finora ottenute permettono di trattare molte questioni di geometria elementare. Ecco un esempio: in fig. 23 è disegnato il triangolo di vertici:

$$A(0{,}3), \qquad B(-3{,}1), \qquad C(-1,-2).$$

Quali particolarità presenta il triangolo? Se ne può calcolare il perimetro e l'area?

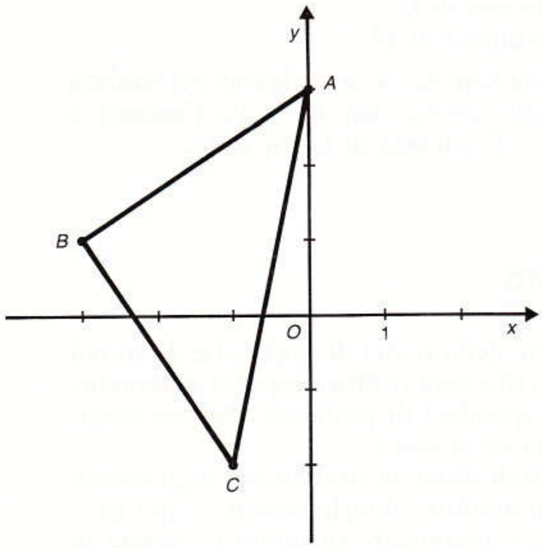


Fig. 23

Osservando la figura, "sembra" che il triangolo sia isoscele sulla base AC e che sia rettangolo in B. È facile verificare se valgono queste proprietà, calcolando la lunghezza dei lati del triangolo. Si ha:

$$\overline{AB}=\sqrt{[0-(-3)]^2+(3-1)^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{[-1-(-3)]^2+(-2-1)^2}=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}.$$

Abbiamo così verificato che il triangolo è isoscele, dato che ha due lati di uguale lunghezza.

Per verificare, poi, se il triangolo è rettangolo possiamo valerci del teorema di Pitagora: il triangolo è rettangolo se risulta

$$AC^2=AB^2+BC^2.$$

Ora, conoscendo la lunghezza di AB e BC, sappiamo che risulta

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=(\sqrt{13})^2+(\sqrt{13})^2=13+13=26.$$

Rimane da calcolare quanto vale AC^2. Si ha

$$\overline{AC}=\sqrt{[0-(-1)]^2+[3-(-2)]^2}=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$$

e, dunque, risulta

$$\overline{AC}^2=26.$$

Abbiamo così verificato che il triangolo ABC è rettangolo in B. Calcoliamone ora l'area S e il perimetro p. Si ha:

$$p=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=\sqrt{13}+\sqrt{13}+\sqrt{26}\cong 12{,}3$$

$$S=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{2}\sqrt{13}\sqrt{13}=\frac{1}{2}(\sqrt{13})^2=\frac{13}{2}=6{,}5.$$

Un'osservazione

Svolgendo i calcoli precedenti, ci si rende conto che, per valersi correttamente della formula

$$\overline{PQ}=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2},$$

occorre ricordare con chiarezza il significato delle lettere che vi compaiono:

a è il numero che indica l'ascissa di P
b » » » » » l'ordinata di P
c » » » » » l'ascissa di Q
d » » » » » l'ordinata di Q.

È più facile ricordare il significato delle lettere, se si scelgono dei simboli più espressivi; per questo si indicano spesso con x_P e y_P l'ascissa e l'ordinata di P, con x_Q e y_Q l'ascissa e l'ordinata di Q. Si scrive:

$$\overline{PQ}=\sqrt{(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2}.$$

5. Pendenza di un segmento

La geometria analitica fa parte della realtà di oggi – si è detto nel paragrafo 1 – ma finora ne abbiamo visto soprattutto l'aspetto matematico. Torniamo dunque alla realtà, occupandoci di problemi che diventano ogni giorno più importanti: i problemi economici.

Spesso si legge sui quotidiani di indagini di mercato organizzate dalle grandi industrie di detersivi, automobili, abbigliamento,... per prevedere le vendite di una certa merce e pianificare in modo razionale la produzione. La maggior parte delle ricerche in questo settore ha, fra l'altro, un duplice scopo:

I) chiarire le relazioni fra il prezzo di una data merce e la quantità di merce che l'industria è disposta ad immettere sul mercato, quantità che viene spesso chiamata *offerta*;

II) chiarire le relazioni fra il prezzo di una data merce e la quantità di merce acquistata dai consumatori, quantità che viene detta *domanda*.

Ecco due esempi.

I) Secondo un'indagine statistica, un'industria di calcolatori ha introdotto sul mercato 2000 calcolatori quando il prezzo di vendita era di L. 1.000.000; ma quando il prezzo di vendita è salito a L. 1.200.000, l'offerta è diventata di 2300 calcolatori.

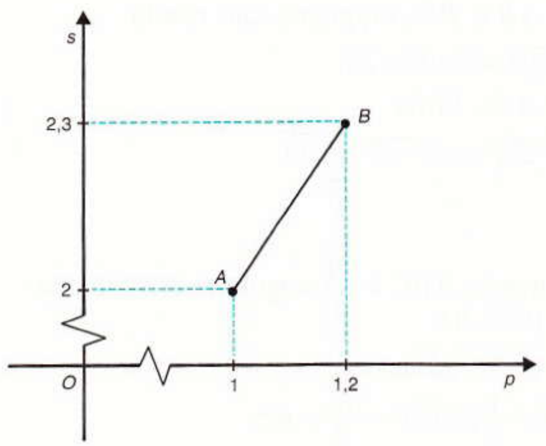


Fig. 24

La situazione diventa più chiara se si riportano questi dati su un piano cartesiano come quello di fig. 24 in cui sono stati indicati su un asse i prezzi p (in milioni di lire) e sull'altro l'offerta s (dall'inglese *supply*) in migliaia di calcolatori: si ottengono i punti A e B.

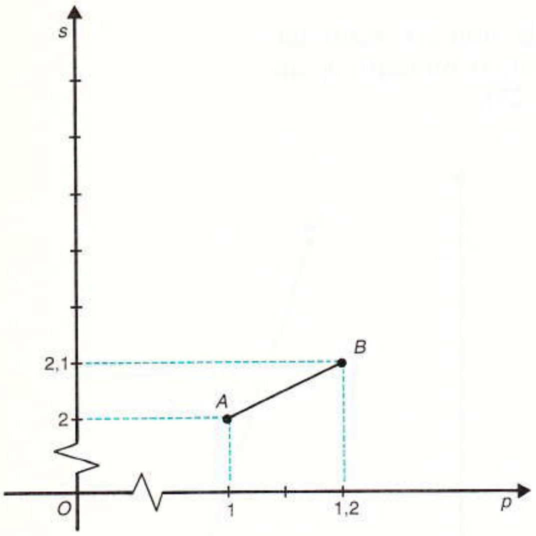
Il modo più semplice di analizzare questi dati è quello di congiungere i punti con un segmento di retta e di valutare *l'elasticità dell'offerta*, cioè il rapporto m, dato da

$$m = \frac{\text{aumento di offerta}}{\text{aumento di prezzo}}.$$

Nel nostro caso si ha:

$$m = \frac{2{,}3-2}{1{,}2-1} = 1{,}5.$$

È chiaro che lo stesso aumento di prezzo potrebbe produrre un aumento più grande o più piccolo di offerta della merce, e il rapporto m dà, appunto, un'indicazione di quanto la variazione di prezzo influenzi la produzione della merce.



$m=0{,}5$

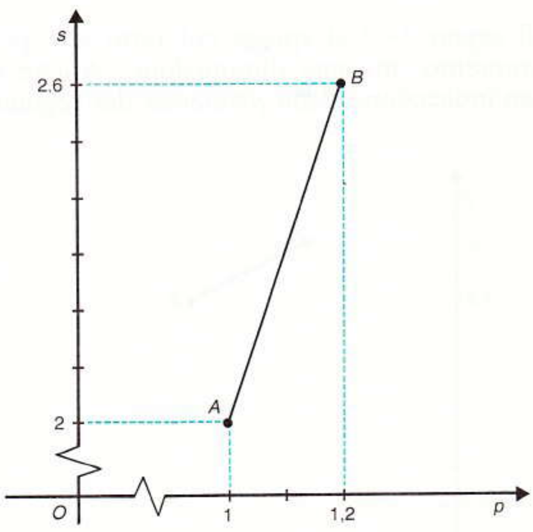


Fig. 25

$m=3$

Confrontando poi i due grafici della fig. 25, si nota che il rapporto m ha anche un immediato significato geometrico: misura la *pendenza* di un segmento.

II) La stessa indagine statistica ha rilevato che sono stati acquistati 1900 calcolatori quando il prezzo era di L. 1.000.000, ma quando il prezzo è passato a L. 1.200.000, le vendite sono diminuite e sono stati acquistati solo 1700 calcolatori.

Abbiamo rappresentato i dati in fig. 26: su un asse sono stati riportati i prezzi p e sull'altro la quantità d venduta. In questo caso si valuta *l'elasticità della domanda*, cioè il rapporto m, dato da

$$m = \frac{\text{aumento della domanda}}{\text{aumento di prezzo}}.$$

Si ottiene

$$m = \frac{1{,}7-1{,}9}{1{,}2-1} = -1,$$

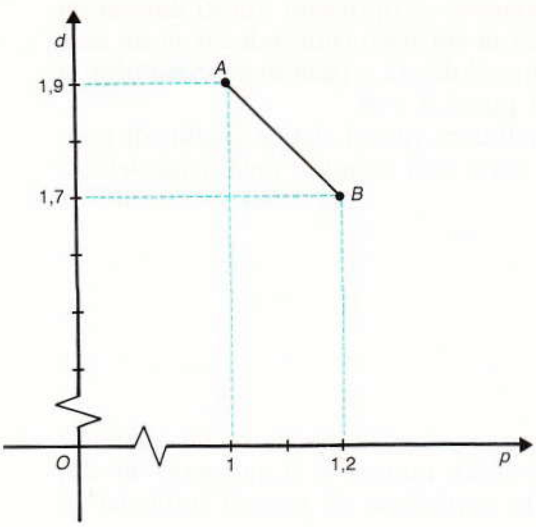
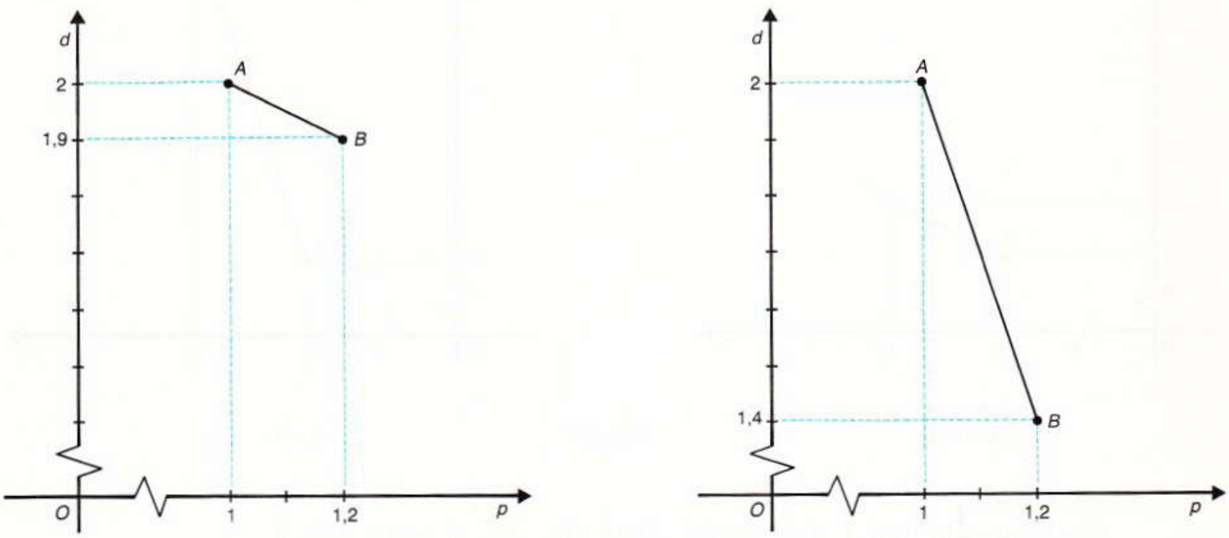


Fig. 26

il segno "$-$" si spiega col fatto che per la domanda non c'è stato un aumento, ma una diminuzione. Anche in questo caso, il numero m da un'indicazione della *pendenza* del segmento AB (fig. 27).



$m=-0,5$ Fig. 27 $m=-3$

Dalle considerazioni svolte possiamo ora trarre una conclusione di carattere geometrico: la pendenza del segmento AB che congiunge due punti

$$A(a,b) \quad \text{e} \quad B(c,d),$$

come quelli di fig. 28, è data dal rapporto

$$m=\frac{\text{aumento di ordinata}}{\text{aumento di ascissa}}=\frac{d-b}{c-a}.$$

La pendenza m è espressa da un numero positivo quando il segmento AB è "in salita" (fig. 29) e da un numero negativo quando il segmento AB è "in discesa" (fig. 30); si ha un segmento con pendenza $m=0$, quando il segmento AB è "orizzontale" (fig. 31).

È chiaro che, invece, non ha senso valutare la pendenza di un segmento AB "verticale", cioè parallelo all'asse delle y (fig. 32). Se, infatti, i due punti hanno la stessa ascissa, cioè risulta

$$c=a,$$

si ottiene

$$m=\frac{d-b}{0};$$

non possiamo dunque calcolare m, dato che non si può eseguire la divisione di un numero per zero.

In conclusione, la relazione

$$m=\frac{d-b}{c-a}$$

ha significato solo se risulta

$$c \neq a.$$

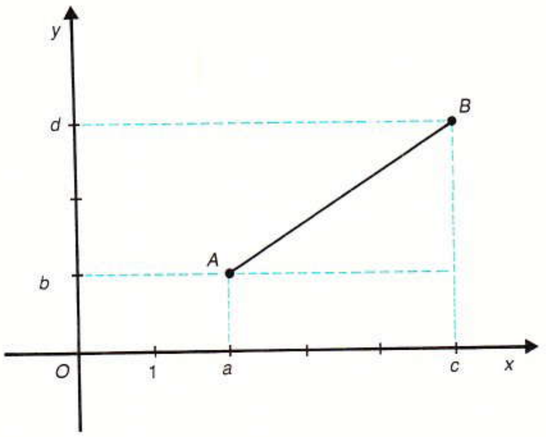


Fig. 28

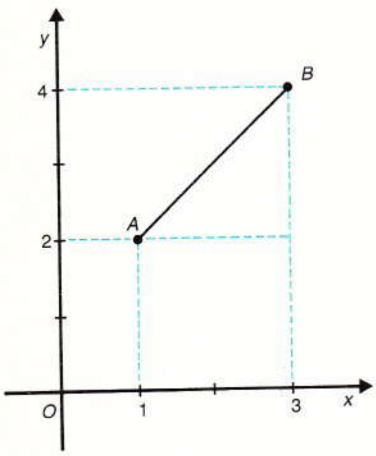


Fig. 29

$m=1$

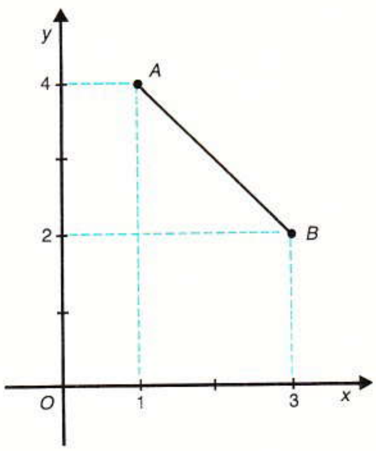
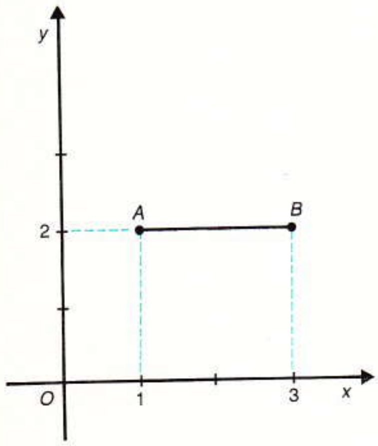


Fig. 30

$m=-1$



$m=0$

Fig. 31

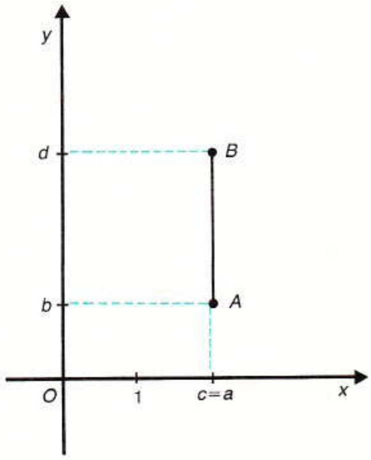


Fig. 32

1. Parte seconda

Curve e funzioni

1. Equazioni di rette parallele agli assi

Dopo aver interpretato il punto come coppia ordinata di numeri, vediamo che cosa si può dire della retta, la più semplice delle curve.

Il fatto che per due punti passa una ed una sola retta conduce a pensare la retta come "costituita da infiniti punti allineati". Interpretiamo questa proprietà sul piano cartesiano cominciando da qualche caso particolare.

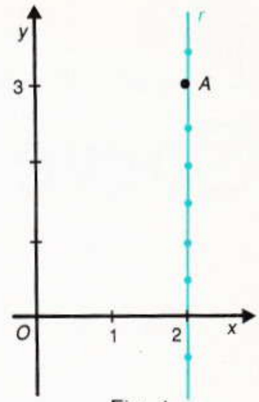


Fig. 1

A) La retta è parallela all'asse delle y.

In fig. 1 abbiamo disegnato la retta r parallela all'asse delle y e passante per $A(2,3)$. Si osserva subito una proprietà caratteristica dei punti che "formano" la retta: hanno tutti la stessa ascissa che vale 2; ossia, in formula:

$$x=2.$$

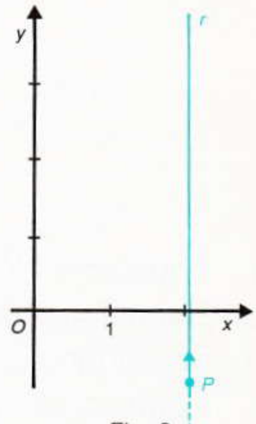


Fig. 2

Questa formula diventa più espressiva se immaginiamo un punto P che "si muove" sul piano: le coordinate di P variano mentre il punto si muove; le indichiamo con x e y. È chiaro (fig. 2) che $P(x,y)$ percorre proprio la retta r solo se la sua ascissa x vale sempre 2, ossia se risulta

$$x=2.$$

Si dice perciò che $x=2$ è **l'equazione della retta *r*.**

È importante riflettere sul significato che ha ora il termine equazione: scrivendo

$$x=2,$$

non si intende sostituire all'incognita x il numero 2; si indicano, invece, tutti i punti che hanno l'ascissa x sempre uguale a 2.

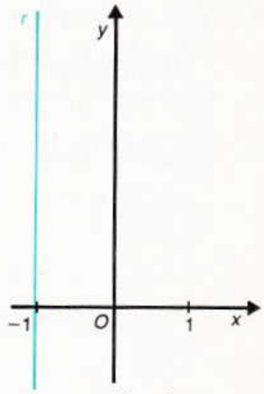


Fig. 3

Analogamente, un punto $P(x,y)$ percorre la retta r di fig. 3 solo se la sua ascissa x vale sempre -1. Perciò l'equazione della retta r è

$$x=-1.$$

In generale, un punto $P(x,y)$ percorre la retta r, parallela all'asse delle y e passante per $A(a,b)$ (fig. 4), solo se la sua ascissa vale sempre a; l'equazione della retta r è dunque

$$x=a.$$

In particolare, l'asse delle y, costituito da tutti i punti che hanno l'ascissa nulla, ha equazione

$$x=0.$$

B) La retta è parallela all'asse delle x.

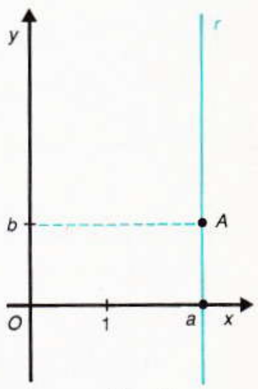


Fig. 4

È facile scrivere l'equazione della retta r parallela all'asse delle x e passante per $A(2,3)$ (fig. 5): un punto $P(x,y)$ percorre la retta r solo se la sua ordinata y rimane sempre uguale a 3. L'equazione della retta r è dunque

$$y=3.$$

In generale, la retta r parallela all'asse delle x e passante per $A(a,b)$ (fig. 6) ha equazione

$$y=b;$$

in particolare, l'asse delle x, costituito da tutti i punti che hanno l'ordinata nulla, ha equazione

$$y=0.$$

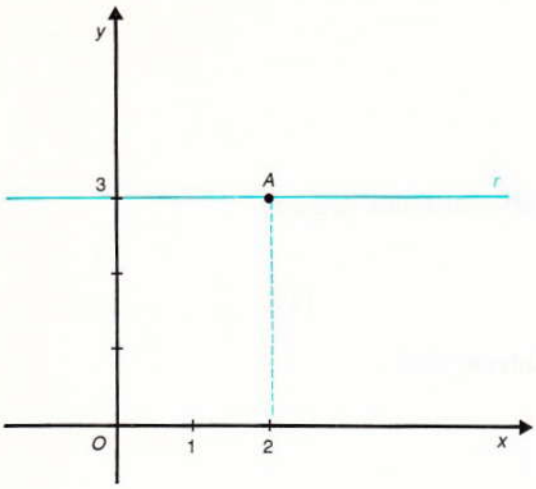


Fig. 5

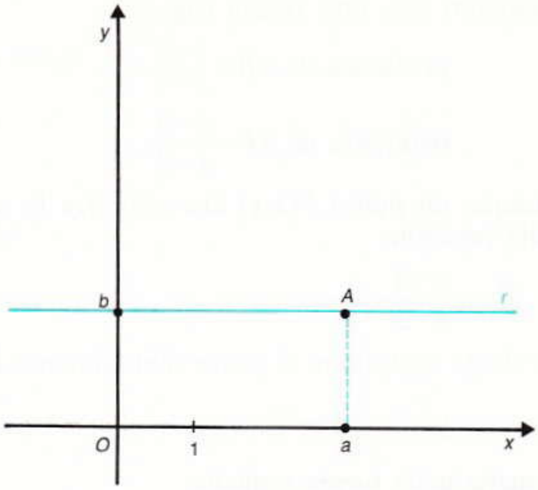


Fig. 6

2. Equazione della retta per due punti

Cominciamo a lavorare su un esempio numerico: in fig. 7 abbiamo tracciato il grafico della retta r che passa per i punti $A(2,3)$ e $B(5,4)$. Ci chiediamo: qual è la proprietà che caratterizza le coordinate (x,y) di un punto P che percorre la retta r?

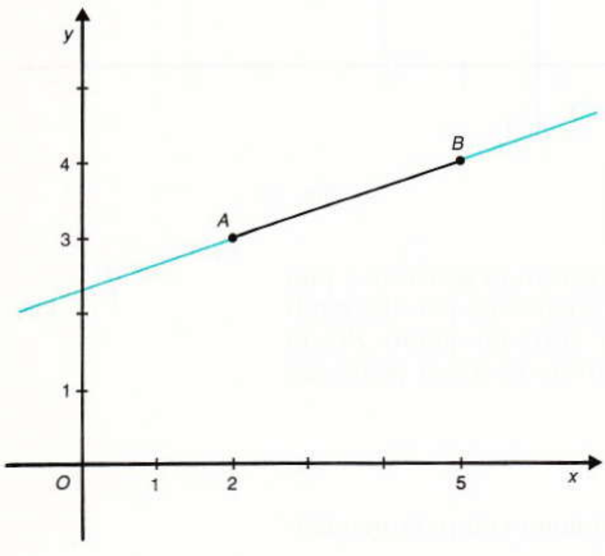


Fig. 7

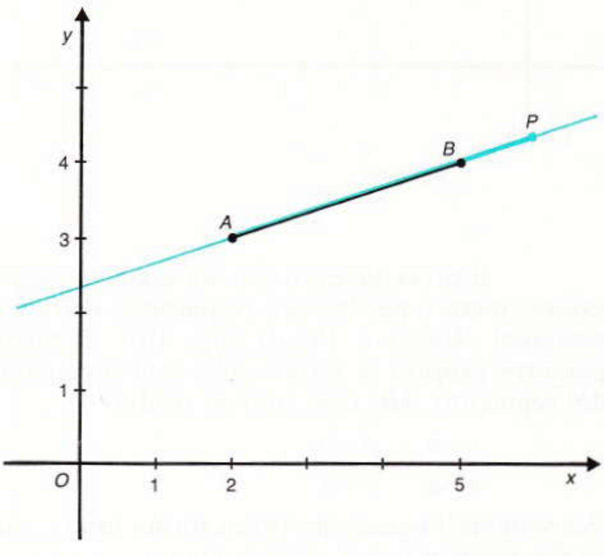


Fig. 8

La fig. 8 suggerisce una prima risposta: il punto $P(x,y)$ percorre proprio la retta r **solo se** il segmento AP ha la stessa pendenza del segmento AB. Ora risulta (fig. 9):

$$\text{pendenza di } AB=\frac{4-3}{5-2}=\frac{1}{3}$$

$$\text{pendenza di } AP=\frac{y-3}{x-2}.$$

Dunque un punto $P(x,y)$ che percorre la retta r ha le coordinate legate dalla relazione

$$\frac{y-3}{x-2}=\frac{1}{3}. \tag{1}$$

La stessa equazione si scrive abitualmente **in forma intera**, cioè

$$y-3=\frac{1}{3}(x-2); \tag{2}$$

o anche nella **forma esplicita**

$$y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}. \tag{3}$$

Quest'equazione assicura che il punto P percorre la retta r, andando a coincidere, eventualmente, con A o B.

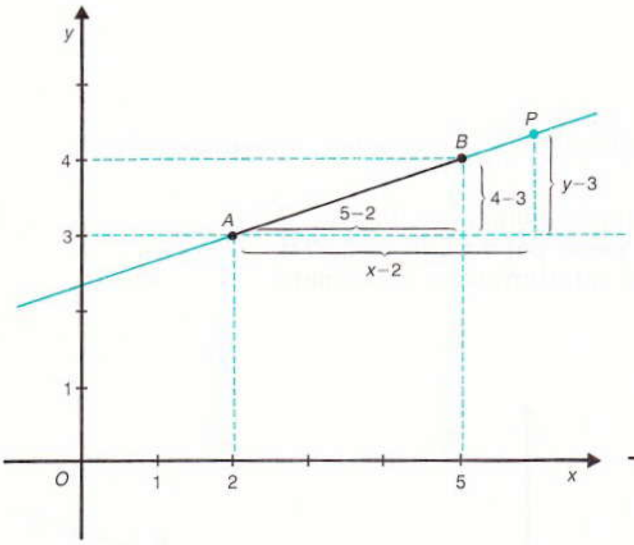


Fig. 9

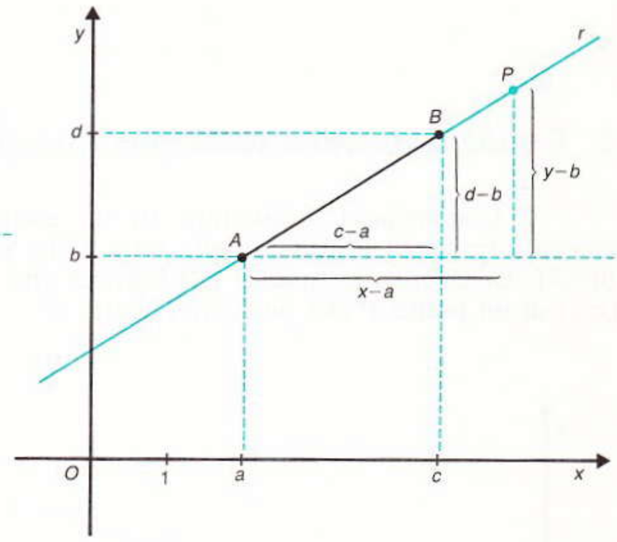


Fig. 10

Il procedimento che abbiamo seguito ha carattere generale e può essere ripetuto per trovare l'equazione della retta r passante per due punti assegnati $A(a,b)$ e $B(c,d)$ (fig. 10). Si ragiona così: un punto $P(x,y)$ percorre proprio la retta r solo se il segmento AP ha la stessa pendenza del segmento AB, cioè solo se risulta

$$\frac{y-b}{x-a}=\frac{d-b}{c-a}. \tag{4}$$

Per scrivere l'equazione (4) in forma intera, indichiamo con m la pendenza del segmento AB, cioè poniamo

$$\frac{d-b}{c-a}=m;$$

l'equazione diventa

$$y-b=m(x-a), \tag{5}$$

ossia

$$y=mx-ma+b.$$

Si ottiene, dunque, sempre un'equazione di 1° grado del tipo

$$y=mx+n, \tag{6}$$

dove abbiamo scritto

$$n=-ma+b.$$

Due osservazioni sul risultato ottenuto.

A) Il procedimento seguito risulta valido anche quando i due punti hanno la stessa ordinata b. Infatti, in questo caso (fig. 11) il segmento AB ha pendenza 0 e la formula (5) diventa

$$y-b=0(x-a),$$

ossia

$$y-b=0$$

e cioè

$$y=b,$$

equazione che avevamo trovato nel paragrafo 1.

B) Il procedimento non risulta invece valido se i due punti A e B hanno la stessa ascissa a (fig. 12). Infatti, in tal caso, il segmento AB risulta parallelo all'asse delle y e non possiamo calcolarne la pendenza m, dato che *non si può eseguire la divisione*

$$\frac{d-b}{0}.$$

Ma noi sappiamo già (paragrafo 1) che l'equazione di una retta parallela all'asse delle y è

$$x=a.$$

Arriviamo così ad una conclusione di carattere generale: una retta è caratterizzata da un'equazione del tipo

$$y=mx+n$$

oppure

$$x=a.$$

Queste equazioni esprimono in forma sintetica la condizione perché un punto $P(x,y)$ percorra proprio la retta disegnata sul piano.

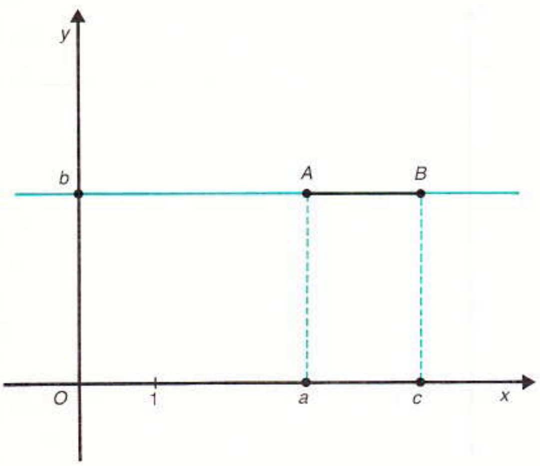


Fig. 11

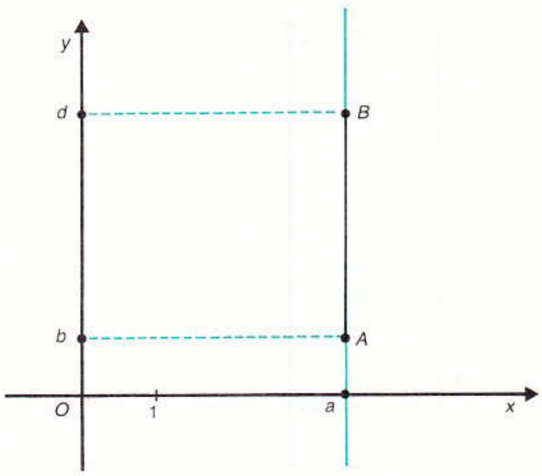


Fig. 12

3. Disegnare una retta d'equazione assegnata

Cominciamo ad esaminare qualche caso numerico; sono date le equazioni seguenti:

(a) $x=-2$,
(b) $y=4$,
(c) $y=2x-3$,
(d) $y=2x$

Si capisce subito che queste equazioni debbono rappresentare delle rette, dato che sono del tipo

$$x=a$$

oppure del tipo

$$y=mx+n.$$

È facile tracciare il grafico delle prime due: l'equazione a esprime il fatto che si debbono rappresentare tutti i punti con la stessa ascissa che vale -2 e dunque a è l'equazione della retta parallela all'asse delle y, che abbiamo disegnato in fig. 13; analogamente, esaminando l'equazione b, si è condotti a rappresentare tutti i punti con la stessa ordinata, che vale 4, e si ottiene così la retta parallela all'asse delle y di fig. 14.

Risulta meno immediato disegnare il grafico della retta c, di equazione

$$y=2x-3,$$

sulla quale si trovano tutti i punti che hanno "l'ordinata y data dal doppio dell'ascissa x meno 3".

In questo caso bisogna determinare due punti, A e B, che si trovino sulla retta ed unirli. Per determinare questi due punti, basta assegnare due valori qualunque alla x e ricavare i corrispondenti valori di y. Per la retta c si ha, per esempio, dando ad x i valori 0 e 1:

x	y
0	$2\cdot 0-3=0-3=-3$
1	$2\cdot 1-3=2-3=-1$

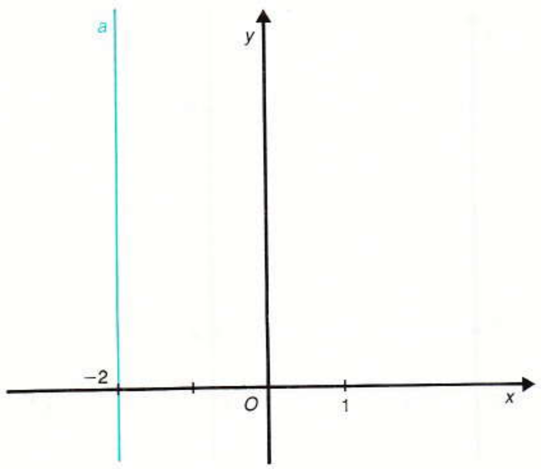


Fig. 13

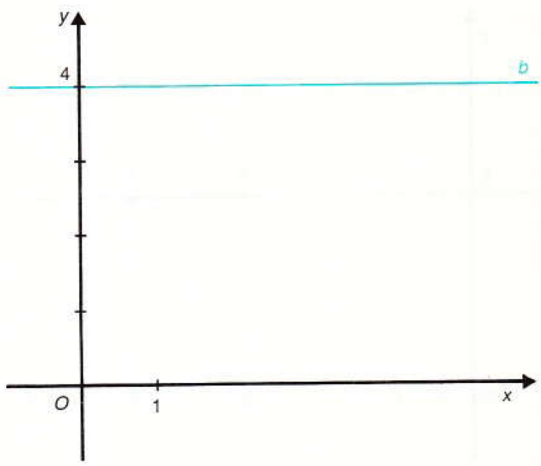


Fig. 14

Si ottengono i punti seguenti:

$$A(0,-3) \quad \text{e} \quad B(1,-1);$$

la retta (c), che congiunge i punti A e B, è disegnata in fig. 15.

In modo del tutto analogo si può procedere per rappresentare la retta d, d'equazione

$$y=2x;$$

si ha, assegnando per esempio ad x ancora i valori 0 e 1:

x	y
0	$2\cdot 0=0$
1	$2\cdot 1=1$.

Si ottengono i punti $O(0,0)$ e $C(1,2)$; congiungendo O e C si ottiene la retta di fig. 16.

Confrontando i grafici delle figg. 15 e 16, con le relative equazioni, è immediato rendersi conto che le due rette

$$(d)\ y=2x \qquad \text{e} \qquad (c)\ y=2x-3$$

hanno la stessa pendenza (2), ma incontrano l'asse delle y in due punti, O ed A, di diversa ordinata (fig. 17):

$$O(0,0) \quad \text{e} \quad A(0,-3).$$

Possiamo estendere queste considerazioni a qualunque retta d'equazione

$$y=mx+n,$$

osservando che la retta ha pendenza m ed incontra l'asse delle y nel punto A, che ha le coordinate date da

$$A(0,n).$$

Il procedimento seguito conduce a due conclusioni di carattere generale.

I) Per disegnare una retta d'equazione

$$\boldsymbol{y=mx+n,}$$

basta unire due punti che hanno le coordinate legate dalla proprietà espressa dall'equazione.

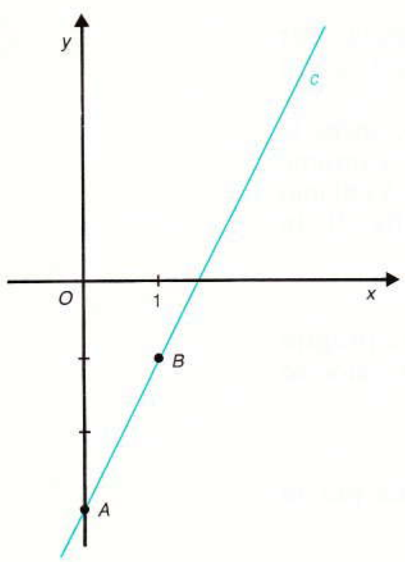


Fig. 15

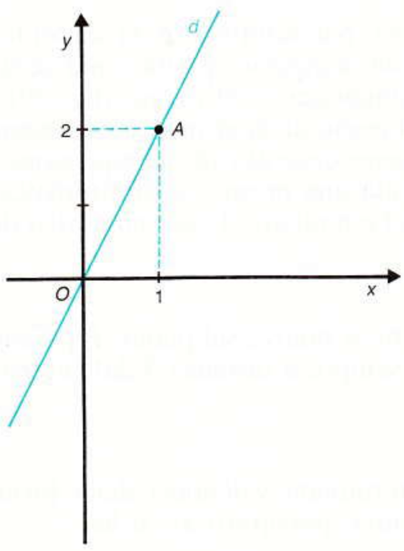


Fig. 16

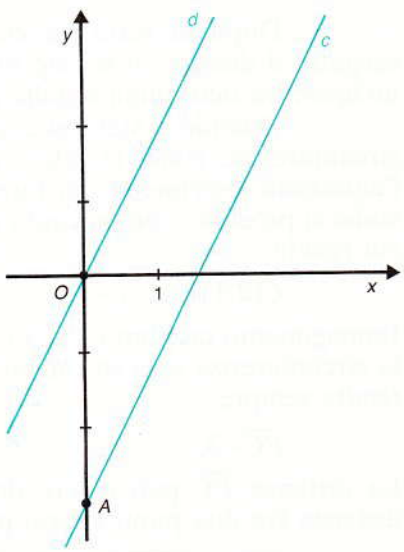


Fig. 17

II) Nell'equazione

$$y=mx+n,$$

***m* indica la pendenza della retta,**
***n* indica l'ordinata del punto *A* in cui la retta incontra l'asse delle *y*.**

In fig. 18 sono rappresentate delle rette di uguale pendenza (-2), mentre in fig. 19 sono rappresentate delle rette che incontrano l'asse delle y nello stesso punto $A(0,-2)$.

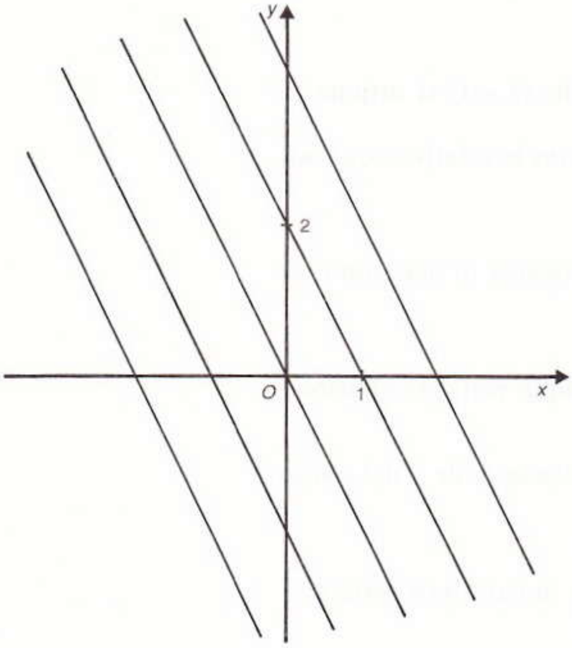


Fig. 18

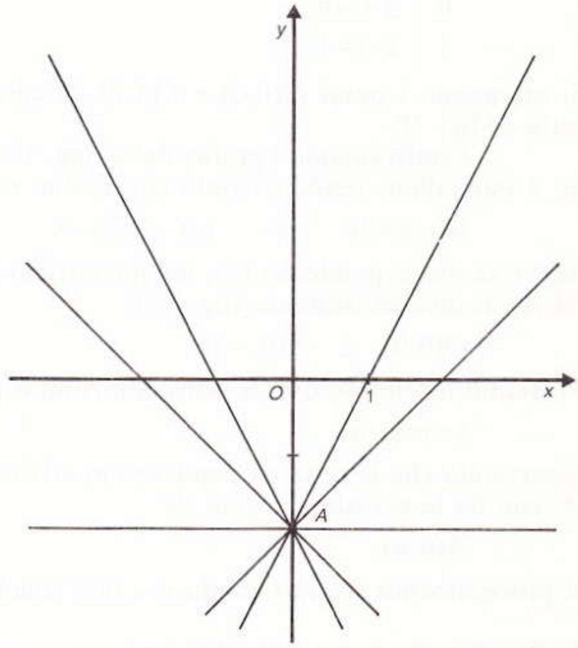


Fig. 19

4. Equazione della circonferenza

Dopo la retta, la curva più semplice è la circonferenza. Per eseguire il disegno ci si vale di un compasso, puntato nel centro C e con un'apertura determinata dalla lunghezza r del raggio (fig. 20).

Quando si stabilisce sul piano un riferimento cartesiano, anche la circonferenza, come la retta, viene descritta da un'equazione; si ottiene l'equazione esprimendo in formula una proprietà caratteristica. Vediamo come si procede, cominciando ad esaminare il caso numerico di fig. 21, in cui risulta

$$C(2,1) \quad \text{e} \quad r=3.$$

Immaginiamo un punto $P(x,y)$ che si muove sul piano: P percorre proprio la circonferenza solo se rimane sempre a distanza 3 dal centro C, cioè se risulta sempre

$$\overline{PC}=3.$$

La distanza $\overline{PC}$ può essere determinata valendosi della formula per la distanza fra due punti (Parte prima, paragrafo 3); si ha:

$$\overline{PC}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}.$$

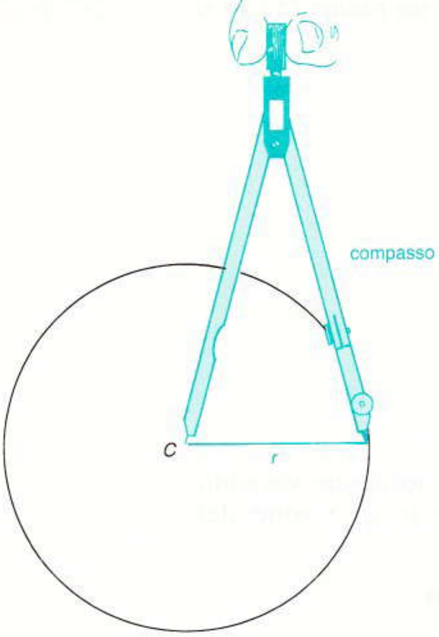


Fig. 20

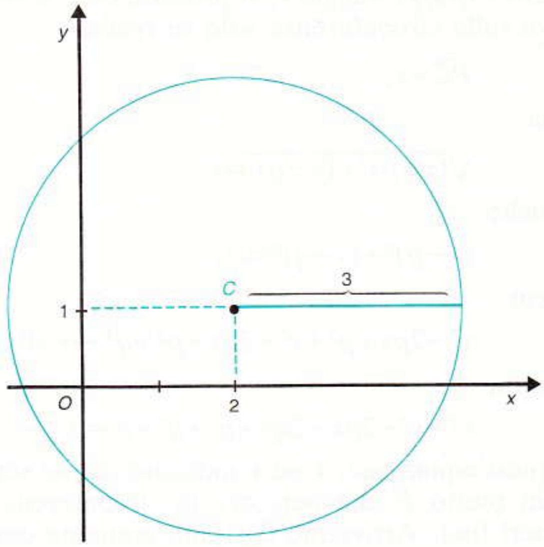


Fig. 21

Dunque P si trova proprio sulla circonferenza solo se risulta (fig. 22)

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=3. \qquad (1)$$

Questa è l'equazione della circonferenza. Abitualmente la si scrive in forma razionale (cioè in una forma in cui le variabili x ed y non compaiono sotto il segno di radice quadrata); perciò si elevano i due membri della (1) al quadrato, ottenendo:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=3^2.$$

Svolgendo i calcoli indicati, si ottiene:

$$x^2-4x+4+y^2-2y+1=9,$$

ossia

$$x^2+y^2-4x-2y-4=0.$$

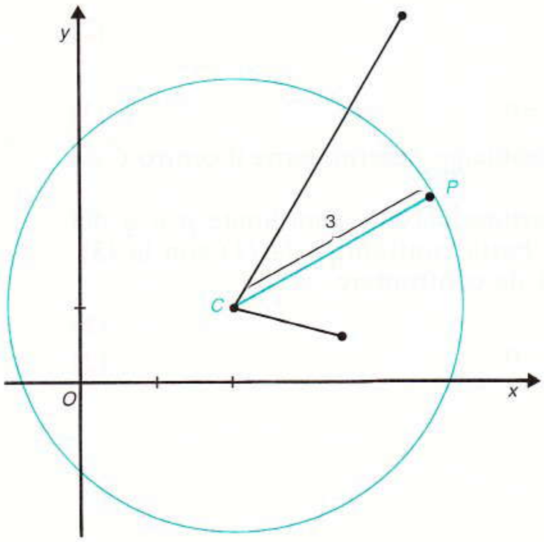


Fig. 22

Il procedimento seguito ha carattere generale. Per una circonferenza di centro $C(p,q)$ e raggio r, si procede così: si osserva che un punto $P(x,y)$ si trova sulla circonferenza solo se risulta

$$\overline{PC}=r,$$

ossia

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2}=r$$

o anche

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2,$$

da cui

$$x^2-2px+p^2+y^2-2qy+p^2+q^2-r^2=0$$

e, infine

$$x^2+y^2-2px-2qy+p^2+q^2-r^2=0.$$

In quest'equazione, x ed y indicano, come sempre, le coordinate variabili di un punto P che percorre la circonferenza, mentre p, q, r sono dei numeri fissi. Arriviamo così alla seguente conclusione:

l'equazione di una circonferenza si presenta nella forma

$$\boldsymbol{x^2+y^2+ax+by+c=0,}$$

dove le lettere a, b, c hanno il seguente significato:

$$\boldsymbol{a=-2p}$$
$$\boldsymbol{b=-2q}$$
$$\boldsymbol{c=p^2+q^2-r^2.}$$

Si tratta dunque di un'**equazione di 2° grado** nelle variabili x ed y, che presenta **due** caratteristiche:

I) **compare sempre** il binomio x^2+y^2,

II) **non compare mai** un monomio del tipo dxy.

5. Disegnare una circonferenza d'equazione assegnata

Cominciamo ad esaminare un caso numerico: l'equazione

$$x^2+y^2+8x+4y-5=0. \tag{1}$$

Riconosciamo subito che si tratta dell'equazione di una circonferenza, dato che è proprio del tipo

$$x^2+y^2+ax+by+c=0, \tag{2}$$

ossia del tipo

$$x^2+y^2-2px-2qy+p^2+q^2-r^2=0. \tag{3}$$

Per disegnare questa circonferenza, dobbiamo determinarne il centro C ed il raggio r.

Ora, per "risalire" dall'equazione (1) alle coordinate p e q del centro e alla lunghezza r del raggio, basta confrontare la (1) con la (3). Riscriviamo dunque le due equazioni da confrontare; si ha:

$$x^2+y^2+8x+4y-5=0 \qquad (1)$$
$$x^2+y^2-2px-2qy+p^2+q^2-r^2=0. \qquad (3)$$

Si osserva subito che risulta:

$$\begin{cases} 8=-2p \\ 4=-2q \\ -5=p^2+q^2-r^2 \end{cases}$$

Ricavando p, q ed r, si ottiene:

$$\begin{cases} p=\dfrac{8}{-2}=-4 \\ q=\dfrac{4}{-2}=-2 \\ r^2=(-4)^2+(-2)^2+5=25 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} p=-4 \\ q=-2 \\ r=5. \end{cases}$$

Dunque la circonferenza ha

centro $C(-4,-2)$ e raggio $r=5$;

possiamo quindi disegnarla (fig. 23)

Il procedimento ora esposto si può sempre seguire per tracciare il grafico di una circonferenza quando ne è data l'equazione

$$x^2+y^2+ax+by+c=0.$$

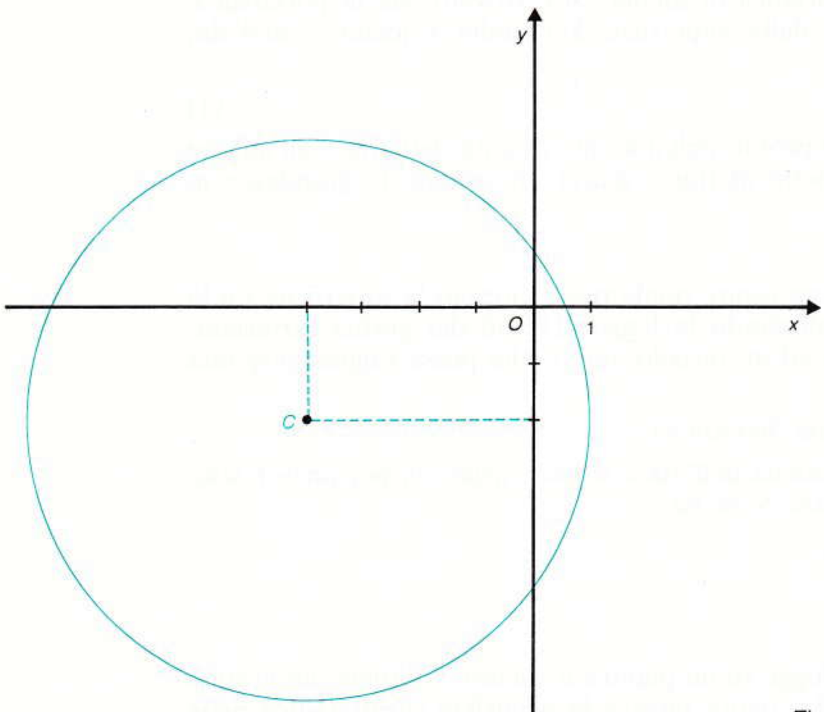


Fig. 23

Infatti, confrontando quest'equazione con la (3), si trova che le coordinate p e q del centro C e la lunghezza r del raggio sono tre numeri tali che risulta, come abbiamo già detto nel paragrafo 4,

$$\begin{cases} a=-2p \\ b=-2q \\ c=p^2+q^2-r^2. \end{cases}$$

Da queste tre condizioni si ricava

$$p=-\frac{a}{2} \qquad q=-\frac{b}{2} \qquad r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}.$$

Trovati così il centro $C(p,q)$ ed il raggio r, è facile disegnare la circonferenza valendosi del compasso.

6. Visualizzare leggi matematiche sul piano cartesiano. Parabola e iperbole

Abbiamo finora tradotto in termini analitici, cioè in equazioni, alcune curve tracciate sul piano cartesiano (rette e circonferenze). Ora, nelle applicazioni si incontra molto spesso il problema inverso: è data una legge matematica che lega due grandezze variabili e si vuole visualizzare questa legge con un grafico. Ecco qualche esempio.

I) Sembra veramente impossibile che un "Jumbo", un oggetto così mastodontico, possa volare; viene spontaneo chiedersi: "come si tiene in aria un aereo?".

La fig. 24 spiega brevemente questo interessante fenomeno: quando un'ala si muove con una certa velocità, si genera sompra l'ala una zona di bassa pressione e sotto l'ala una zona di alta pressione. Al gioco di queste due pressioni è dovuta la *portanza*, una forza che si oppone al peso dell'aereo; è chiaro che l'aereo si mantiene in volo solo se la portanza bilancia proprio il suo peso.

Così, per progettare un aereo, è indispensabile sapere da quali grandezze dipende la portanza di un'ala. Si è trovato che la portanza F dipende essenzialmente dalla superficie S e dalla velocità v dell'ala, secondo la legge

$$F=kSv^2 \qquad (1)$$

La costante k è legata al profilo dell'ala, alla densità dell'aria e all'angolo di incidenza dell'ala rispetto al flusso d'aria; misurando le grandezze in unità opportune[1], si ha:

$$k=0{,}08.$$

È interessante ora capire quale ruolo giocano la superficie S e la velocità v dell'ala, visualizzando la legge (1) con dei grafici cartesiani. Pensiamo prima di tutto ad un piccolo aereo, che possa raggiungere una velocità

$$v=100 \text{ m/s} \quad (\text{cioè } 360 \text{ km/h});$$

in tal caso è fissata la velocità dell'ala e si può variare la portanza F solo variando la superficie alare S. Si ha:

$$F=0{,}08\cdot 100^2\cdot S,$$

cioè

$$F=800S.$$

Rappresentando questa legge su un piano cartesiano, si ottiene un grafico come quello di fig. 25. La figura mostra **la proprietà caratteristica delle grandezze direttamente proporzionali: il grafico è una retta per O,** e questo corrisponde al fatto che **si mantiene costante il rapporto** $\frac{F}{S}$.

Se, invece, l'aereo ha una superficie alare fissa, per esempio

$$S=13 \text{ m}^2,$$

la portanza F varia solo al variare della velocità v. In questo caso si ottiene la legge

$$F=v^2.$$

[1] F si misura in chilogrammi peso (kg_p), S si misura in metri quadrati (m^2), v si misura in metri al secondo (m/s); k viene così misurata in $kg_p s^2/m^4$.

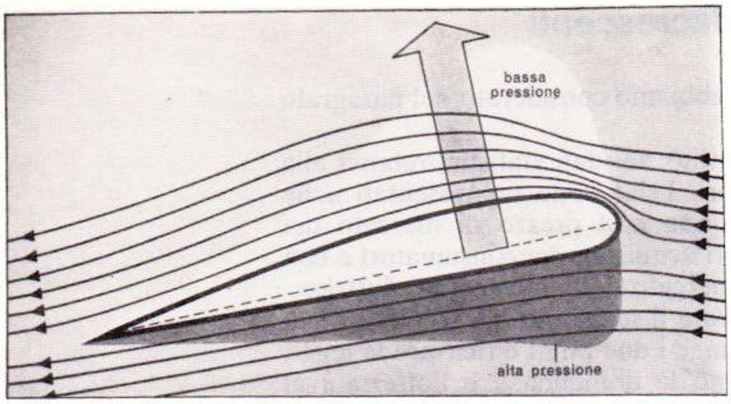


Fig. 24

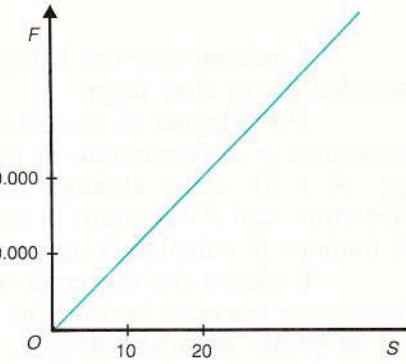


Fig. 25

Se traduciamo questa legge in grafico, non otteniamo certo una retta dato che la variabile v è presente al 2° grado; e non otteniamo nemmeno una circonferenza. Si ha, invece, un arco di **parabola** (fig. 26). Accade anche ora che F cresce se aumenta il valore della variabile a 2° membro (in questo caso v), ma la crescita è di tipo diverso dal caso precedente: se raddoppia v, F non raddoppia ma diventa 4 volte maggiore, e cioè F e v *non sono due grandezze direttamente proporzionali*. ***F* e *v* sono legate da una legge parabolica**.

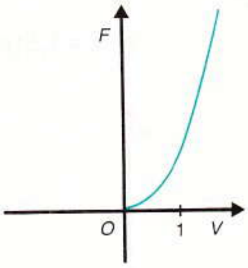


Fig. 26

II) In fig. 27 si vede la fotografia di una sequoia, una conifera che può superare l'altezza di 100 metri. Ci si chiede: come può l'acqua, assorbita dalle radici, raggiungere un'altezza così grande? Una spiegazione elementare del fenomeno si basa sul principio di capillarità, illustrato in fig. 28: l'acqua sale lungo un tubo molto sottile e raggiunge un'altezza h, che è inversamente proporzionale al diametro d del tubo. Si ha la legge:

$$h=\frac{k}{d} \qquad (2)$$

dove k è una costante che dipende dalle caratteristiche del capillare e del liquido. Questa legge si può anche esprimere nella forma

$$d \cdot h=k,$$

si osserva così che **rimane costante il prodotto $d \cdot h$**, caratteristica, questa delle grandezze inversamente proporzionali.
In fig. 29 abbiamo rappresentato la legge

$$h=\frac{1}{d}$$

valendoci della tabella riportata nella stessa figura. La curva ottenuta è un ramo di **iperbole equilatera**.

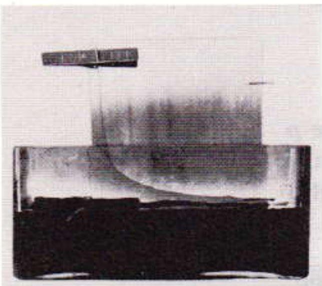
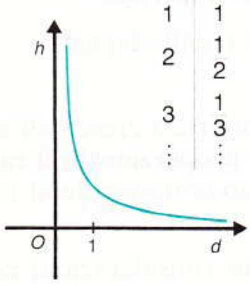


Fig. 27

Fig. 28



d	h
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
⋮	⋮

Fig. 29

7. Curve crescenti e curve decrescenti

Confrontiamo ora le leggi che abbiamo considerato nel paragrafo precedente con altre leggi.

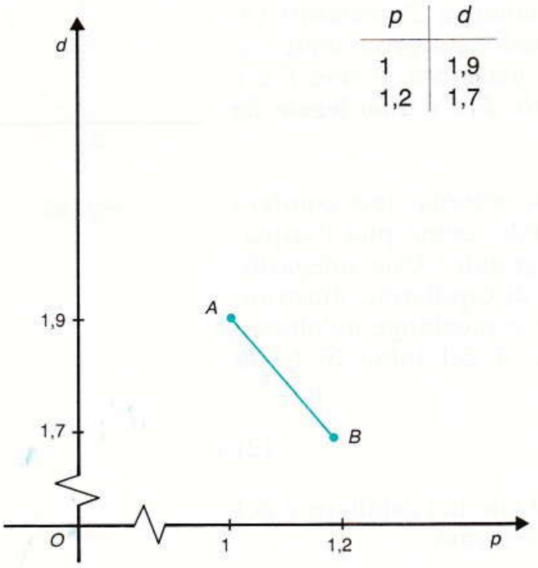
Un'indagine di mercato ha fornito dei dati statistici relativi alla produzione e al commercio di calcolatori. I dati sono rappresentati nelle figg. 30 e 31, dove abbiamo indicato con p il prezzo di mercato dei calcolatori, con d il numero di calcolatori acquistati dai consumatori e con s il numero di calcolatori immessi sul mercato dall'industria produttrice.

È chiaro che invece di considerare il segmento AB (o CD), è più interessante tracciare la retta che congiunge i due punti e ricavare le leggi, che, in prima approssimazione, regolano la domanda d e l'offerta s al variare del prezzo p (figg. 32 e 33). Si ottengono le equazioni seguenti:

$$d-1{,}9=-1(p-1) \qquad \text{ossia} \qquad d=-p+2{,}9$$

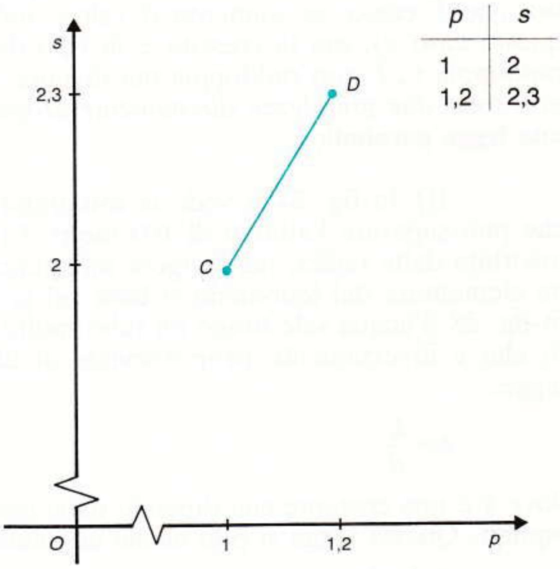
e

$$s-2=1{,}5(p-1) \qquad \text{ossia} \qquad s=1{,}5p+0{,}5.$$



p	d
1	1,9
1,2	1,7

Fig. 30



p	s
1	2
1,2	2,3

Fig. 31

È interessante confrontare le leggi ora trovate con quelle esaminate prima. La legge

$$d=-p+2{,}9$$

e il relativo grafico (fig. 32) mostrano che la quantità d di prodotto acquistata dai consumatori decresce all'aumentare del prezzo p, ma certamente **d e p non sono inversamente proporzionali: il prodotto** delle due grandezze **non si mantiene costante**, e ciò corrisponde al fatto che **il grafico non è un ramo d'iperbole**.

Dalla fig. 33 e dalla legge

$$s=1{,}5p+0{,}5$$

risulta, invece, che l'offerta s cresce all'aumentare del prezzo p, ma **s e p non sono direttamente proporzionali: il rapporto delle due grandezze non si mantiene costante**, e ciò corrisponde al fatto che **il grafico non è una retta passante per $O(0,0)$.**

Queste ultime considerazioni conducono a riesaminare le leggi presentate in questo paragrafo da un particolare punto di vista: **distinguere le curve crescenti da quelle decrescenti**.

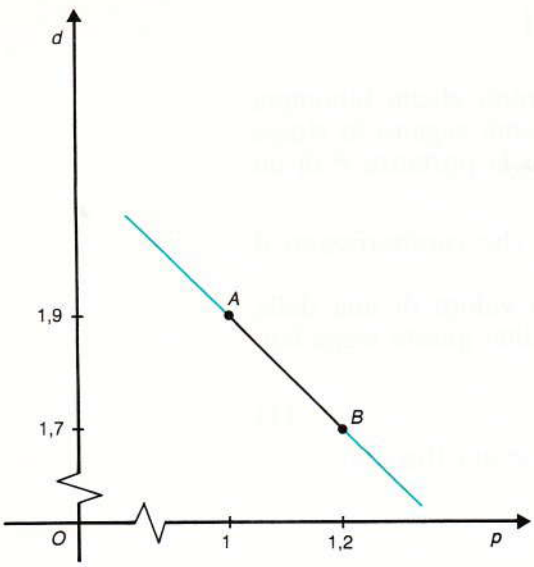


Fig. 32

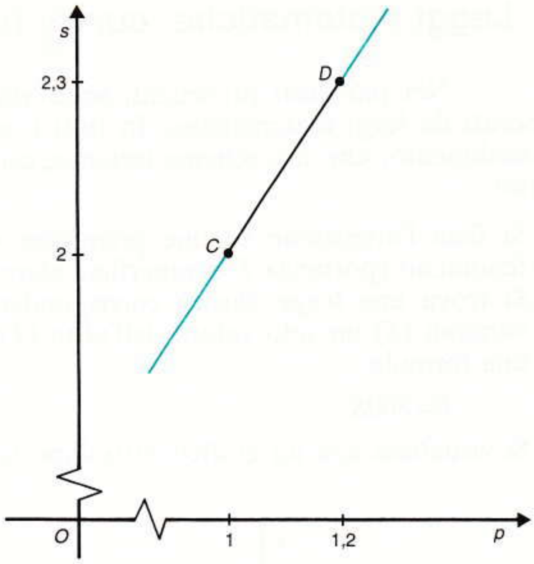


Fig. 33

In fig. 34 sono rappresentate delle curve crescenti. In tutti e tre i casi, se immaginiamo di "percorrere una delle curve", troviamo la stessa situazione: quando ci si allontana da O verso destra, "si sale". Questo vuol dire che, all'aumentare di una grandezza, cresce anche l'altra.

In fig. 35 abbiamo, invece, rappresentato i due grafici decrescenti. Se ora immaginiamo di percorrere una delle curve, allontanandoci da O verso destra, osserviamo che "si scende". Questo vuol dire che quando una delle grandezze aumenta, l'altra decresce.

Teniamo dunque presente che **la legge di proporzionalità diretta è un caso particolare di legge rappresentata da una curva crescente, mentre quella di proporzionalità inversa è un caso particolare di legge che ha un grafico decrescente**.

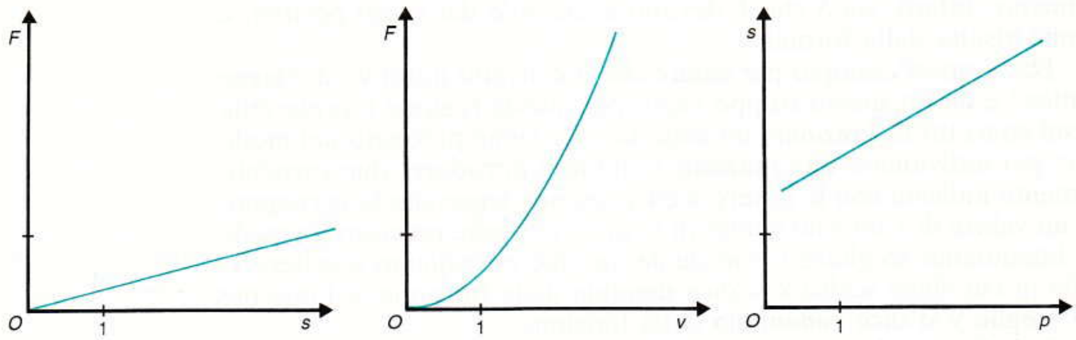


Fig. 34

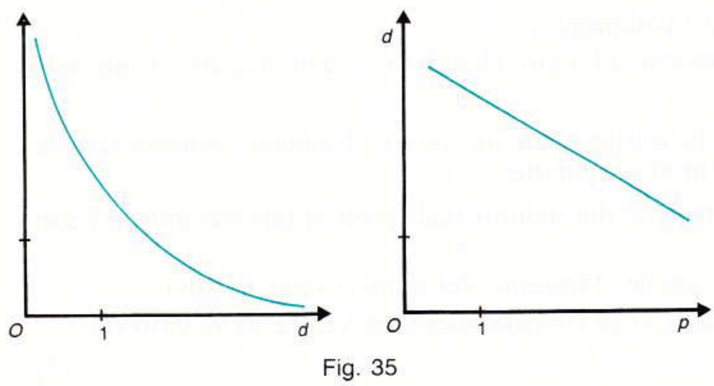


Fig. 35

8. Leggi matematiche, curve, funzioni

Nei paragrafi precedenti sono stati presentati alcuni fenomeni descritti da leggi matematiche. In tutti i casi, abbiamo seguito lo stesso procedimento, che ora schematizziamo, esaminando la portanza F di un aereo.

1) Si fissa l'attenzione su due grandezze variabili che caratterizzano il fenomeno (portanza F e superficie alare S).
2) Si trova una legge che fa corrispondere ad un valore di una delle variabili (S) un solo valore dell'altra (F); si esprime questa legge con una formula

$$F=800S. \qquad (1)$$

3) Si visualizza con un grafico cartesiano la legge trovata (fig. 36).

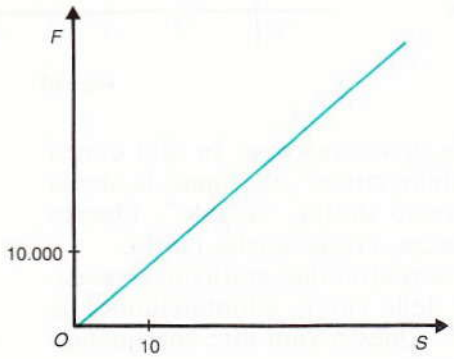


Fig. 36

È proprio confrontando il grafico di fig. 36 con la legge (1) che ci rendiamo conto che la formula (1) non esprime tutto quello che sappiamo sul fenomeno. Infatti, sia S che F devono avere *solo* dei valori positivi, e questo non risulta dalla formula.

Basta quest'esempio per capire che il concetto intuitivo di "legge matematica" è molto spesso troppo vago; per questa ragione è preferibile basarsi sul concetto di **funzione**, un concetto che viene precisato nel modo seguente: per individuare una funzione non basta introdurre due variabili, generalmente indicate con le lettere x ed y, ed una legge che fa corrispondere ad un valore di x un solo valore di y; occorre anche precisare in quale insieme intendiamo scegliere x e in quale insieme intendiamo scegliere y. L'insieme in cui viene scelto x si dice **dominio** della funzione, e l'insieme in cui si sceglie y si dice **codominio** della funzione.

Si individua dunque una funzione quando sono dati:

1°) un insieme A, detto dominio;
2°) un insieme B detto codominio;
3°) una legge che associa ad ogni elemento x dell'insieme A **un solo** elemento y di B.

Così, per descrivere la portanza di un aereo, dobbiamo considerare la funzione definita nel modo seguente:

1°) il dominio A è l'insieme dei numeri reali positivi (spesso indicato con il simbolo R^+);
2°) il codominio B è, anche, l'insieme dei numeri reali positivi;
3°) ad ogni x scelto in A si fa corrispondere un valore di y, dato da

$$y=800x. \qquad (2)$$

La fig. 37 visualizza questa funzione, perché sulla semiretta Or si trovano tutti i punti $P(x,y)$ che hanno le seguenti caratteristiche:

1°) l'ascissa x appartiene all'insieme A, dominio della funzione;

2°) l'ordinata y appartiene all'insieme B, codominio della funzione;

3°) x ed y sono legate dalla relazione (2).

Osserviamo che la fig. 38 rappresenta un tratto di una retta, descritta da un'equazione del tipo

$$y=mx;$$

si tratta dunque di un grafico di cui si è parlato nel paragrafo 2 (fig. 38). Tuttavia, un esame più attento delle figg. 37 e 38 fa emergere una differenza fra le due situazioni: in geometria analitica, quando si considera l'equazione della retta di fig. 37, si scelgono sia x che y nell'insieme dei numeri reali; invece, descrivendo un fenomeno naturale regolato da una legge di proporzionalità diretta, si arriva spesso ad una funzione che ha per dominio il solo insieme dei reali positivi.

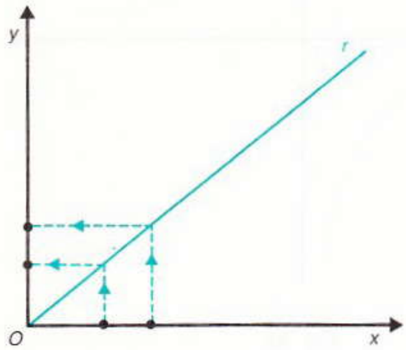


Fig. 37

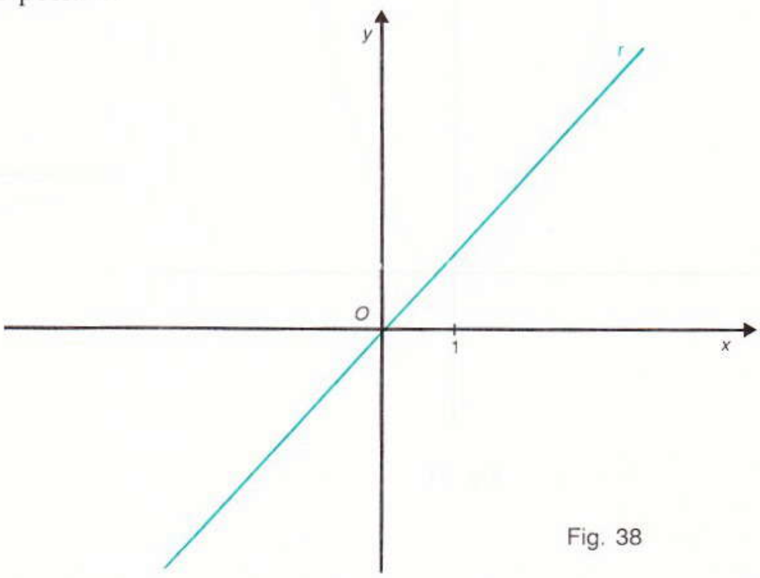


Fig. 38

Considerazioni analoghe a quelle ora svolte si possono ripetere a partire dalle altre leggi presentate nel paragrafo precedente.

In particolare, esaminando le due leggi della domanda e dell'offerta, rappresentate in fig. 39, vi riconosciamo ancora l'equazione di una retta, già studiata nel paragrafo 2, dove si era scelto sia come dominio che come codominio l'insieme dei numeri reali (fig. 40).

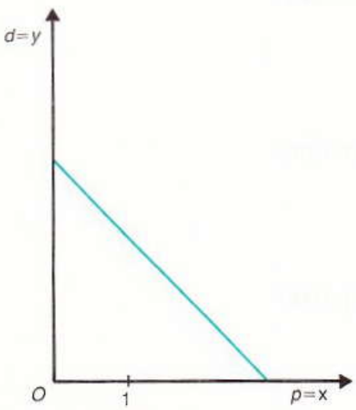
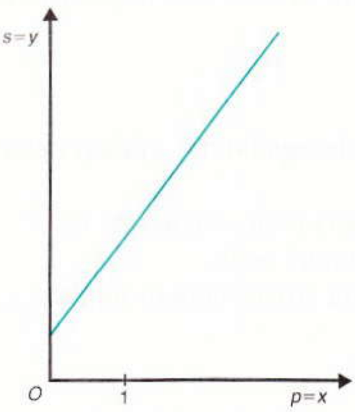


Fig. 39. dominio A: R^+
codominio B: R^+
$y=-x+2{,}9$



dominio A: R^+
codominio B: R^+
$y=-1{,}5x+0{,}5$

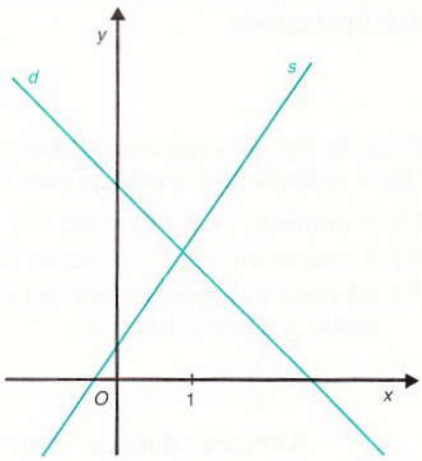


Fig. 40

Le altre due leggi (iperbolica e parabolica), di cui abbiamo parlato a proposito di problemi reali, conducono ad introdurre nuove curve sul piano cartesiano e nuove funzioni. In fig. 41 abbiamo rappresentato la funzione seguente:

1°) il dominio A è l'insieme dei reali;

2°) il codominio B è l'insieme dei reali;

3°) ad ogni x, appartenente ad A si fa corrispondere un solo y, appartenente a B; y è dato da:

$$y=x^2$$

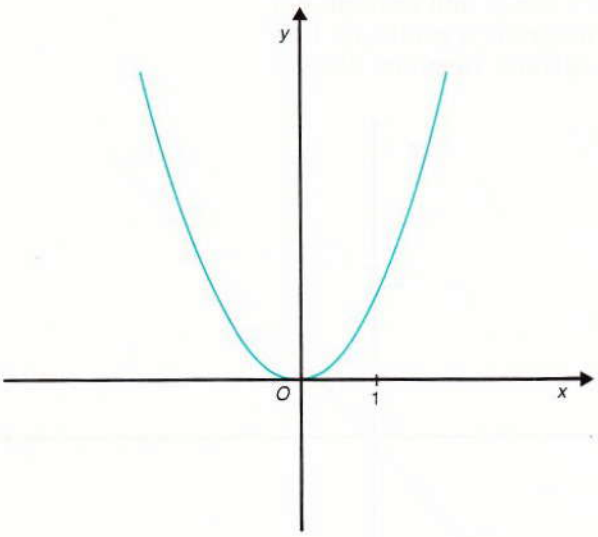


Fig. 41

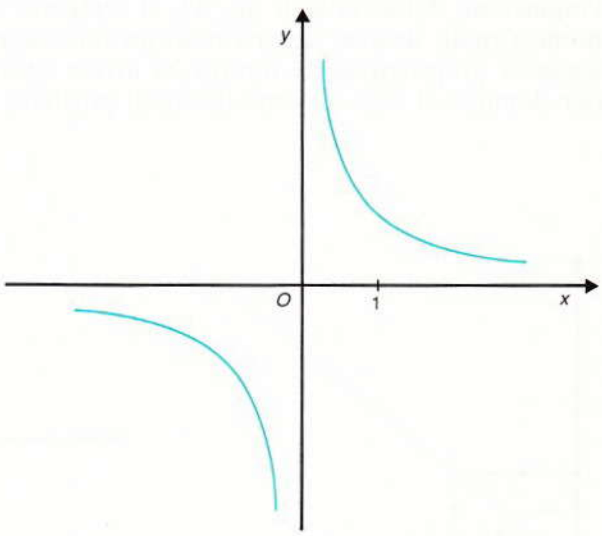


Fig. 42

La curva ottenuta è una parabola che ha il vertice in O e l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle y.

La legge iperbolica, invece, obbliga a riflettere prima di estendere il dominio all'insieme dei reali. Infatti, si osserva subito che, scrivendo

$$y=\frac{1}{x},$$

non possiamo sostituire alla x il valore 0, dato che non esiste il risultato dell'operazione

$$\frac{1}{0}.$$

Così, la fig. 42 rappresenta un'iperbole equilatera, grafico della funzione che è definita nel modo seguente:

1°) il dominio A è l'insieme dei numeri reali, escluso lo 0;

2°) il codominio B è l'insieme dei numeri reali;

3°) ad ogni x, appartenente ad A, si fa corrispondere un solo y, appartenente a B; y è dato da

$$y=\frac{1}{x}.$$

Abbiamo dunque visto come, rappresentando sul piano particolari funzioni, si possono ottenere nuove curve. Viceversa – ci chiediamo –

una curva tracciata sul piano cartesiano è sempre il grafico di una funzione? Per trovare la risposta, esaminiamo qualche situazione particolare.

La circonferenza rappresentata in fig. 43 ha centro $O(0,0)$ e raggio $r=2$. In questo caso, per descrivere l'intera circonferenza, non basta una sola funzione. Infatti una caratteristica fondamentale di una funzione è quella di far corrispondere ad un valore di x un solo valore di y. Invece, è immediato osservare che, nel caso della circonferenza, fissato un valore di x, possono esistere, in corrispondenza, due valori di y (fig. 44).

Possiamo tuttavia descrivere la circonferenza per mezzo della sua equazione cartesiana, cioè

$$x^2+y^2=4, \qquad (3)$$

o per mezzo di due funzioni ottenute ricavando y dalla (3); si ha:

$$y^2=4-x^2,$$

ossia

$$y=\sqrt{4-x^2} \quad \text{e} \quad y=-\sqrt{4-x^2}.$$

Quest'ultima scrittura mette in evidenza il fatto che otteniamo valori reali di y solo se risulta positiva l'espressione

$$4-x^2,$$

di cui dobbiamo estrarre la radice quadrata. E questo corrisponde al fatto che i punti della circonferenza hanno sempre l'ascissa x che soddisfa le seguenti disuguaglianze:

$$-2\leq x\leq 2.$$

Otteniamo dunque due funzioni. La prima è così definita:

1°) il dominio A è l'insieme dei numeri reali che soddisfano le seguenti disuguaglianze

$$-2\leq x\leq 2;$$

2°) il codominio B è l'insieme dei numeri reali;

3°) ad ogni x, appartenente ad A corrisponde, nell'insieme B, un solo y, dato da

$$y=\sqrt{4-x^2}.$$

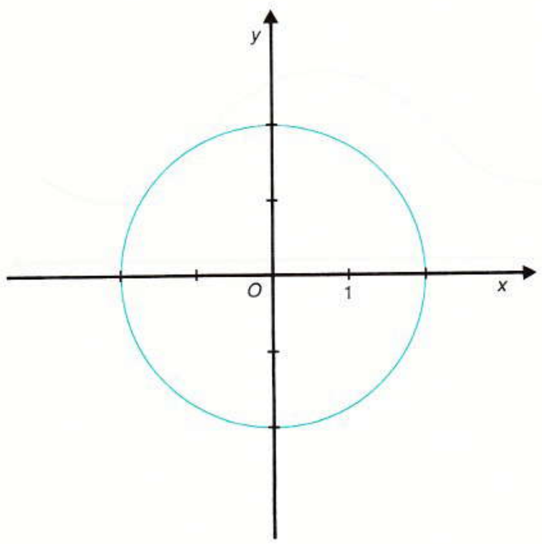


Fig. 43

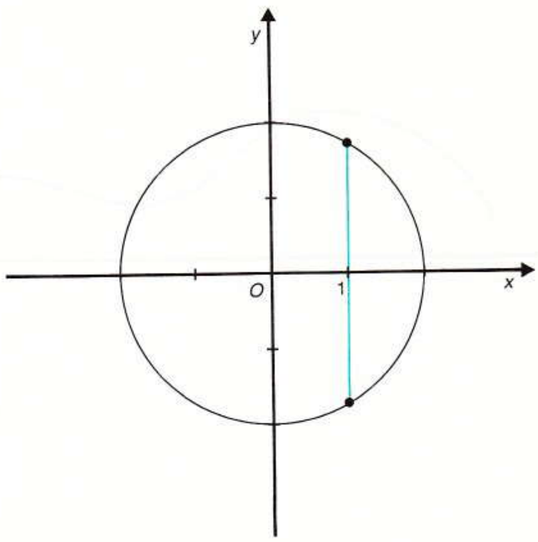


Fig. 44

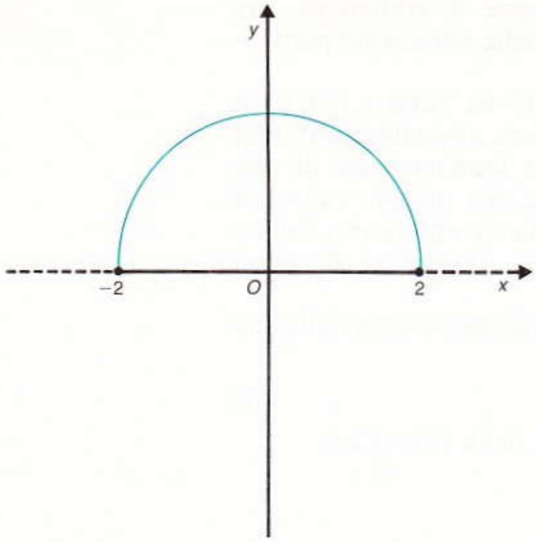


Fig. 45

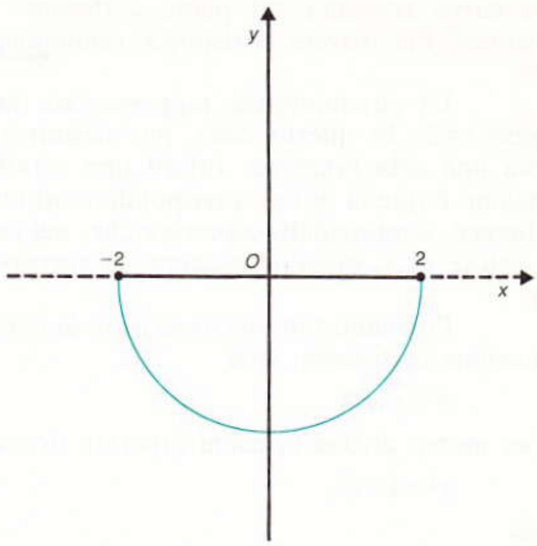


Fig. 46

La fig. 45 rappresenta il grafico di questa funzione.

La seconda funzione, poi, ha come dominio e come codominio gli stessi insiemi A e B considerati prima, ma cambia la legge che fa corrispondere ad ogni x una sola y; ora y è data da

$$y=-\sqrt{4-x^2}.$$

La fig. 46 rappresenta il grafico di quest'ultima funzione.

Ecco dunque **il criterio per riconoscere se una curva è il grafico di una funzione: una retta parallela all'asse delle *y* deve incontrare la curva al massimo in un punto**.

Perciò il grafico della fig. 47 rappresenta una funzione anche se, ora, non sappiamo esprimere con una formula la legge che fa corrispondere ad un valore di x un solo valore di y.

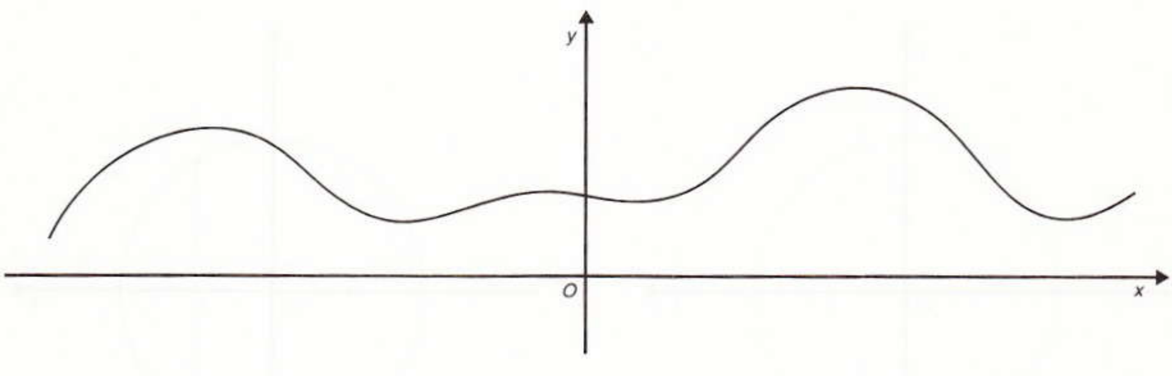


Fig. 47

1. Parte terza

Trasformazioni del piano

In queste pagine studieremo le trasformazioni che possono subire le figure piane quando vengono sottoposte a particolari "azioni". Se la figura – poligono, curva... – è "immersa" in un piano cartesiano, questo studio si tradurrà nel cambiamento di coordinate e, quindi, in operazioni algebriche sull'equazione delle curve.

Diciamo subito che nell'uso del computer grafico (cioè del calcolatore che ha la possibilità di mostrare sullo schermo dei disegni) si è molte volte costretti a ridurre o a cambiare la forma e la posizione delle figure per far in modo che "siano contenute" entro lo schermo. Di questi problemi grafici ci occuperemo dettagliatamente nell'Appendice dedicata al calcolatore.

1. Trasformare il piano con stiramenti lungo gli assi. Trasformazioni affini

È un esperimento che ci fa cogliere il significato di trasformazione del piano. Disegnamo gli assi cartesiani su una tela elastica e fissiamo l'attenzione su un punto di questo piano, per esempio $P(2,3)$ (fig. 1).

Stiriamo ora la tela nella direzione dell'asse delle x, fino a raddoppiarne la lunghezza (fig. 2): il piano si è trasformato e la scala sull'asse delle x risulta dilatata; si intuisce che sono cambiate le coordinate di P rispetto al riferimento presentato in fig. 1... Ma la situazione iniziale è scomparsa sotto i nostri occhi!

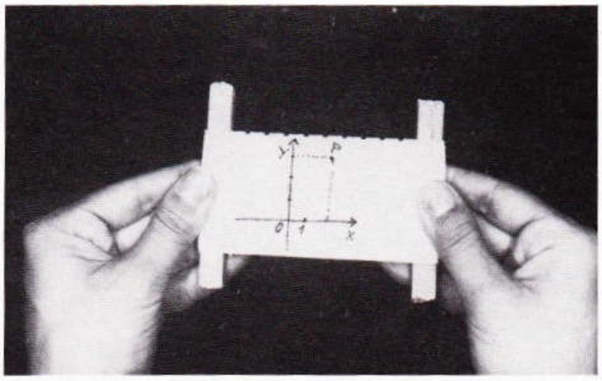


Fig. 1

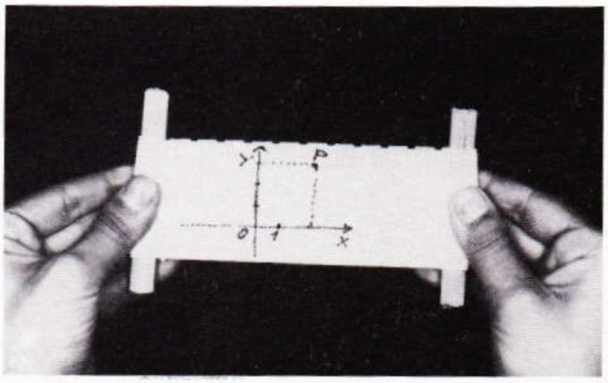


Fig. 2

È più facile capire che cosa è successo se fissiamo su una lastra di vetro il riferimento nella situazione iniziale, indicandolo con $O'x'y'$ (in nero in fig. 3). Inizialmente avremo dunque il piano elastico perfettamente sovrapposto al piano di vetro. Ma quando operiamo lo stiramento lungo l'asse delle x (fig. 4), il punto P, che aveva le coordinate (2,3), si trasforma nel punto $P'(4,3)$. Dunque il punto P' ha la stessa ordinata di P, ma l'ascissa è raddoppiata.

È chiaro che hanno subito la stessa sorte tutti i punti della tela elastica: qualunque punto P che aveva inizialmente le coordinate

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y, \end{cases}$$

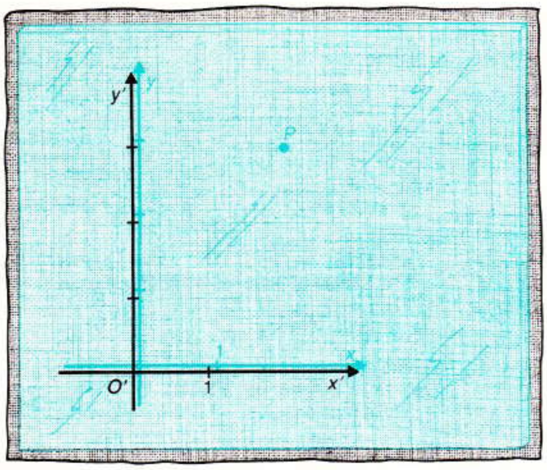


Fig. 3

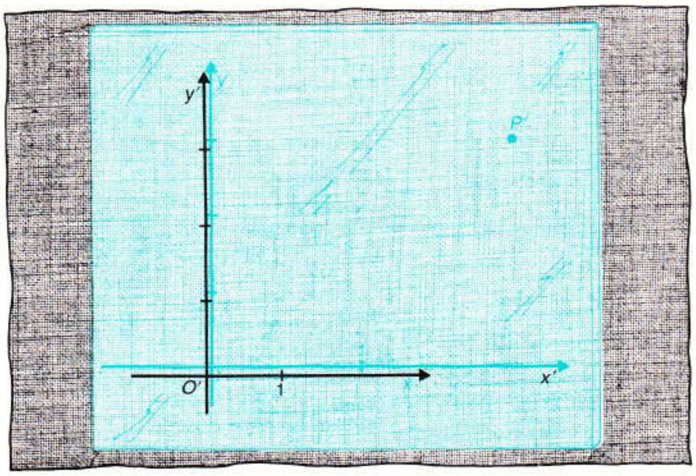


Fig. 4

si trasforma, in seguito allo stiramento, nel punto P' che ha le coordinate (x',y') date da

$$\begin{cases} x'=2x \\ y'=y. \end{cases}$$

Se poi stiriamo la tela sempre lungo l'asse delle x ma con maggior forza, fino a triplicare, quadruplicare... le ascisse, accadrà che le x verranno moltiplicate per un coefficiente $m>1$; si avrà dunque:

$$\begin{cases} x'=mx \\ y'=y. \end{cases}$$

Se, invece, si opera uno stiramento lungo l'asse delle y (fig. 5), le ascisse di tutti i punti rimangono inalterate, mentre le ordinate risultano moltiplicate per un numero n. Dunque, un qualunque punto $P(x,y)$ si trasforma in un punto P', che ha le coordinate (x',y') date da

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=ny. \end{cases}$$

con il coefficiente $n>1$.

Infine, *se si opera uno stiramento in direzione dell'asse delle x con coefficiente m e poi* (o contemporaneamente) *uno stiramento lungo l'asse delle y con coefficiente n* (fig. 6), *un punto $P(x,y)$ si porta in un punto P'*, che ha le coordinate (x',y') date da

$$\begin{cases} x'=mx \\ y'=ny', \end{cases} \qquad (1)$$

dove, in generale, m ed n non hanno lo stesso valore.

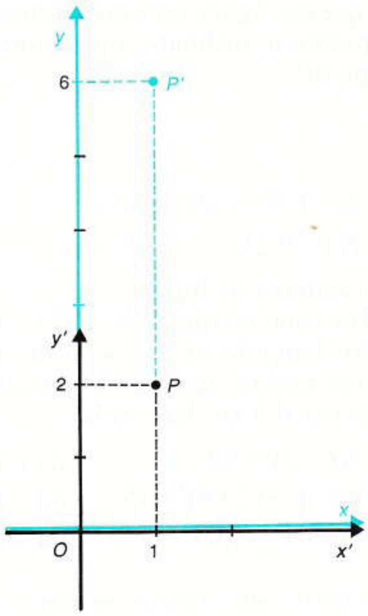


Fig. 5. Con la trasformazione descritta dalle equazioni

$x'=x$

$y'=3y$,

si passa da $P(1,2)$ a $P'(1,6)$.

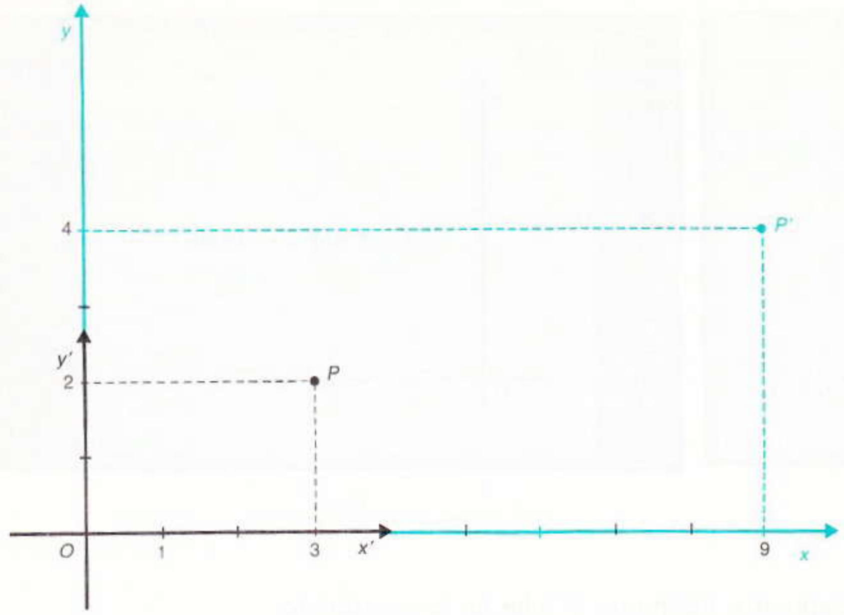


Fig. 6. Con la trasformazione descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} x'=3x \\ y'=2y \end{cases}$$

si passa da $P(3,2)$ a $P'(9,4)$.

Viceversa, possiamo immaginare di disegnare il riferimento cartesiano su una tela elastica che sia tenuta in stiramento lungo i due assi: se "allentiamo la tensione", il piano "si restringe", come se fosse stato compresso lungo i due assi. A questa esperienza fisica corrisponde il fatto che nelle equazioni (1) i coefficienti m ed n assumono valori minori di 1 (ma sempre positivi). Le trasformazioni del piano descritte dalle equazioni

$$\begin{cases} x'=mx \\ y'=ny \end{cases}$$

(con m ed n numeri reali positivi) prendono il nome **di trasformazioni affini o affinità**[1].

Per cogliere meglio il significato di trasformazioni di questo tipo, conviene operare su una figura, per esempio su un poligono di cui sono assegnate le coordinate dei vertici. Riferiamoci al triangolo ABC (fig. 7), di vertici

$$A(0,3),\quad B(-3,1),\quad C(-1,-2).$$

Abbiamo già esaminato questo triangolo nel paragrafo 4 della Parte prima ed abbiamo visto che si tratta di un triangolo rettangolo e isoscele. Trasformiamo ora questa figura con un'affinità; per esempio triplichiamo le ascisse e raddoppiamo le ordinate, operando la trasformazione descritta dalle equazioni seguenti:

$$\begin{cases} x'=3x \\ y'=2y. \end{cases}$$

Si ottiene il triangolo $A'B'C'$ di vertici

$$A'(0,6),\quad B'(-9,2),\quad C'(-3,-4),$$

che abbiamo rappresentato in fig. 8.

Si nota subito che il triangolo $A'B'C'$ non solo risulta ingrandito, ma anche deformato: l'angolo in B' "sembra" non essere più retto e i tre lati "sembrano" non essere uguali. Verifichiamo queste osservazioni, calcolando la lunghezza dei tre lati; si ha:

$$\overline{A'B'}^2=9^2+(6-2)^2=97 \quad \text{da cui} \quad \overline{A'B'}=\sqrt{97}$$
$$\overline{B'C'}^2=(-9+3)^2+(2+4)^2=45 \quad \text{da cui} \quad \overline{B'C'}=\sqrt{45}$$
$$\overline{A'C'}^2=3^2+(6+4)^2=109 \quad \text{da cui} \quad \overline{A'C'}=\sqrt{109}.$$

[1] Per maggiori notizie sulle trasformazioni affini, vedi volume 2, cap. 2.

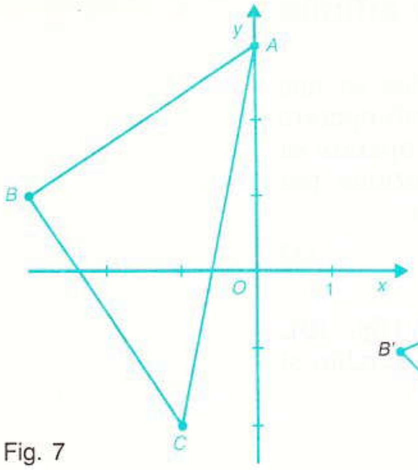


Fig. 7

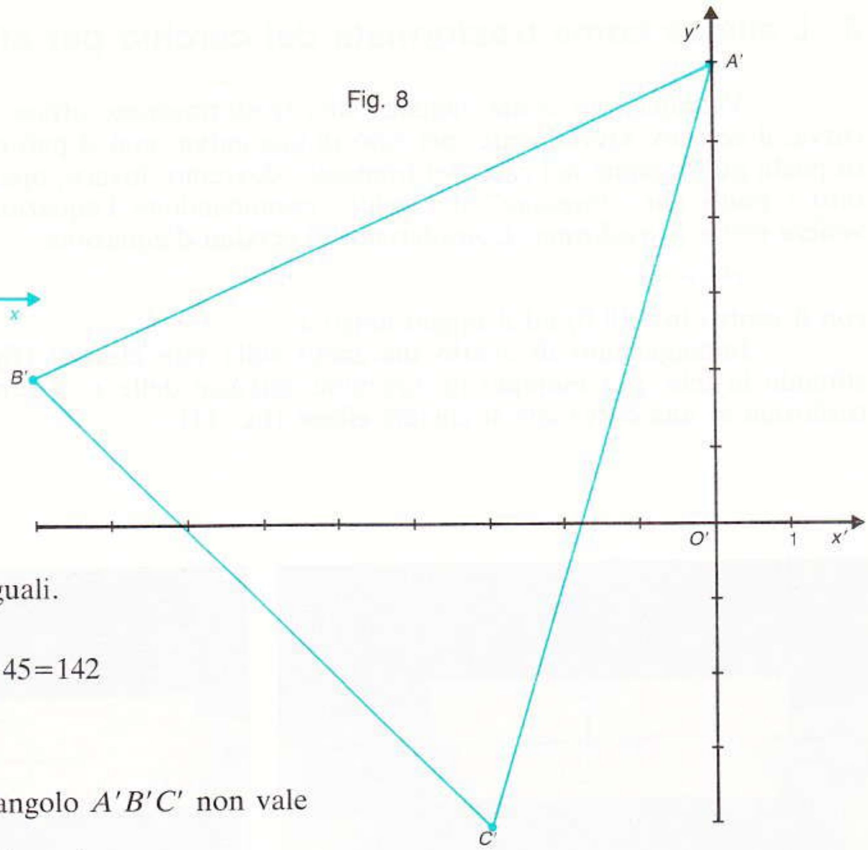


Fig. 8

I tre lati sono dunque disuguali.
Risulta inoltre:

$$\overline{A'B'}^2=\overline{B'C'}^2=97+45=142$$

e

$$\overline{A'C'}^2=109.$$

Si scopre così che per il triangolo $A'B'C'$ non vale il teorema di Pitagora; perciò il triangolo non è rettangolo.

È bene osservare che, se sul triangolo ABC si opera con equazioni in cui i due coefficienti m ed n sono uguali, il triangolo trasformato $A'B'C'$ ha la stessa forma del triangolo ABC, cioè il triangolo $A'B'C'$ **è simile** al triangolo ABC.
In fig. 9 abbiamo, per esempio, rappresentato il triangolo ABC, già disegnato in fig. 7, e il triangolo simile $A'B'C'$ che si ottiene operando con la trasformazione descritta dalle equazioni seguenti

$$\begin{cases} x'=2x \\ y'=2y. \end{cases}$$

La similitudine è dunque **un caso particolare di affinità**; le equazioni della similitudine sono del tipo

$$\begin{cases} x'=mx \\ y'=my. \end{cases}$$

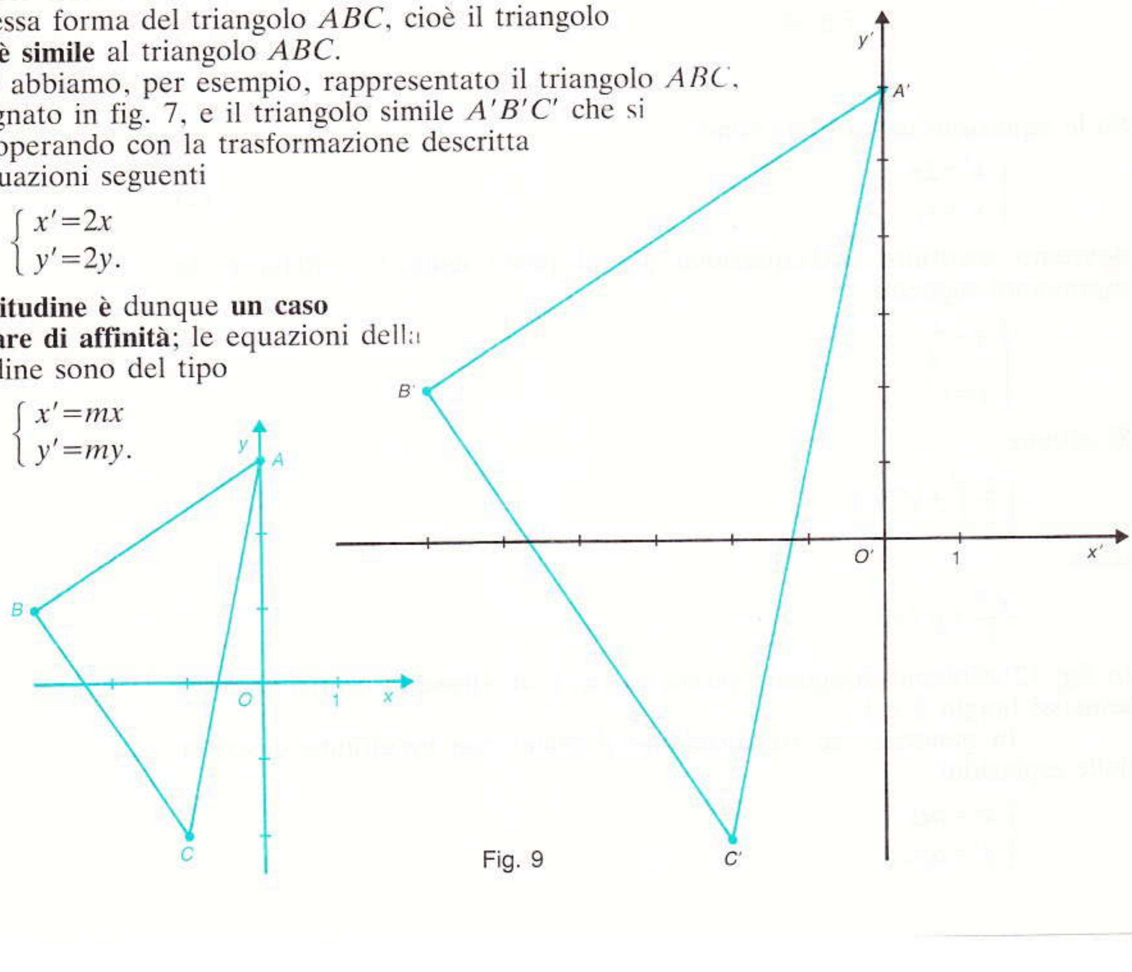


Fig. 9

2. L'ellisse come trasformata del cerchio per affinità

Vediamo ora come "agisce" una trasformazione affine su una curva: il cerchio. Ovviamente, nel caso di una curva, non si può operare su pochi punti, come nel caso del triangolo; dovremo, invece, operare su tutti i punti che "formano" il cerchio, esaminandone l'equazione per vedere come si trasforma. Consideriamo il cerchio d'equazione

$$x^2+y^2=1. \tag{1}$$

con il centro in $O(0,0)$ ed il raggio lungo 1.

Immaginiamo di averlo disegnato sulla tela elastica (fig. 10); stirando la tela, per esempio in direzione dell'asse delle x, il cerchio si trasforma in una curva che si chiama **ellisse** (fig. 11).

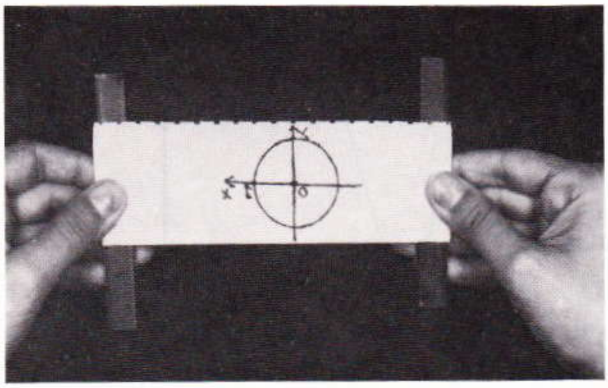


Fig. 10

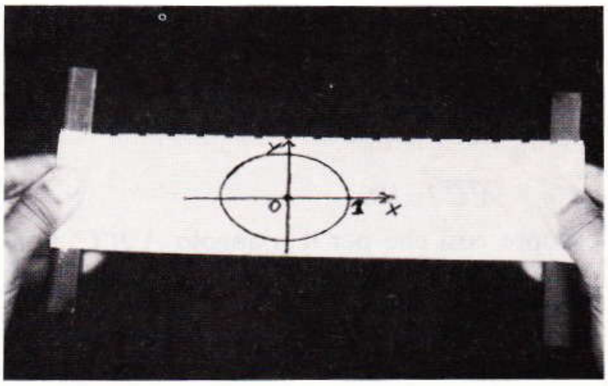


Fig. 11

Se le equazioni dell'affinità sono

$$\begin{cases} x'=2x \\ y'=y, \end{cases} \tag{2}$$

dovremo sostituire nell'equazione (1) al posto della x e della y, le espressioni seguenti:

$$\begin{cases} x=\dfrac{x'}{2} \\ y=y'. \end{cases}$$

Si ottiene

$$\left(\frac{x'}{2}\right)^2+y'^2=1,$$

ossia

$$\frac{x'^2}{4}+y'^2=1.$$

In fig. 12 abbiamo disegnato questa curva: è un'ellisse di centro O con i semiassi lunghi 2 e 1.

In generale, se trasformiamo il piano con un'affinità descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} x'=mx \\ y'=ny, \end{cases}$$

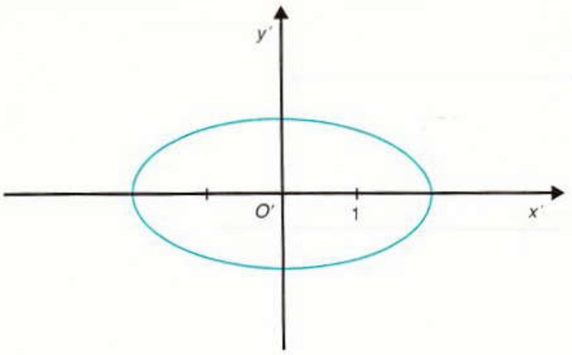


Fig. 12

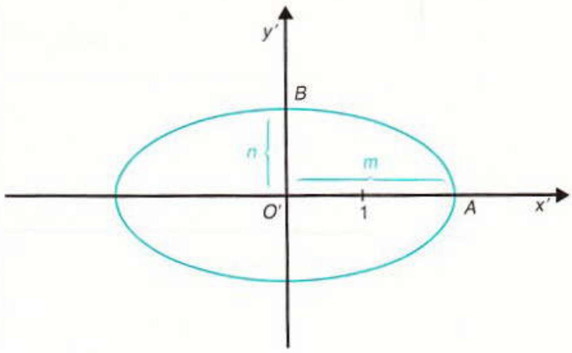


Fig. 13

la circonferenza di centro $O(0,0)$ e raggio 1 si trasforma nell'ellisse d'equazione

$$\frac{x'^2}{m^2}+\frac{y'^2}{n^2}=1,$$

che ha i semiassi OA e OB lunghi m ed n (fig. 13).

È importante osservare che se la trasformazione considerata è una similitudine descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} x'=mx \\ y'=my, \end{cases}$$

si ottiene ancora un cerchio; l'equazione è:

$$x'^2+y'^2=m^2.$$

Dunque, il cerchio si può considerare come una particolare ellisse con i semiassi uguali

Indicando, per semplicità di scrittura, le coordinate sempre con x ed y, possiamo arrivare ad una conclusione di carattere generale: **un'equazione del tipo**

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$$

rappresenta un'ellisse che ha centro in $O(0,0)$ e semiassi lunghi m e n (fig. 13).

3. Dalle equazioni di un'affinità alle equazioni di una simmetria

Finora abbiamo esaminato le trasformazioni descritte dalle equazioni

$$\begin{cases} x'=mx \\ y'=ny \end{cases} \tag{1}$$

considerando i coefficienti m ed n sempre positivi. Vediamo che cosa succede se i coefficienti m ed n sono negativi; è chiaro che, ora, il nostro supporto concreto – la tela elastica – perde di significato! Cominciamo con qualche caso particolare.

I) $m=-1$, $n=1$;

si ottiene la trasformazione descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases} \tag{2}$$

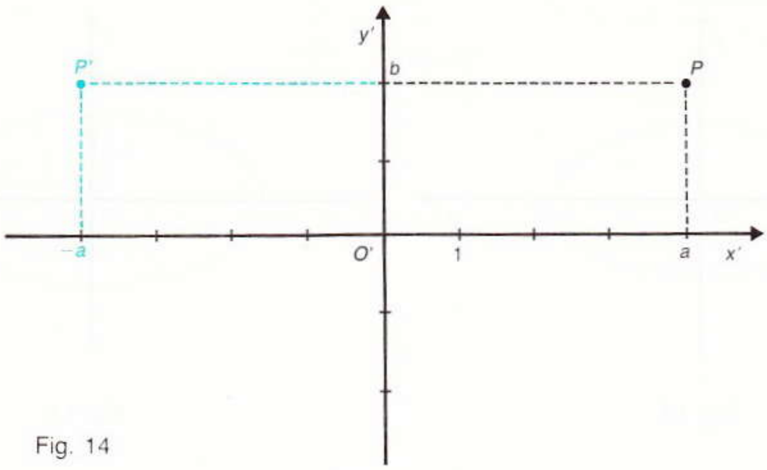
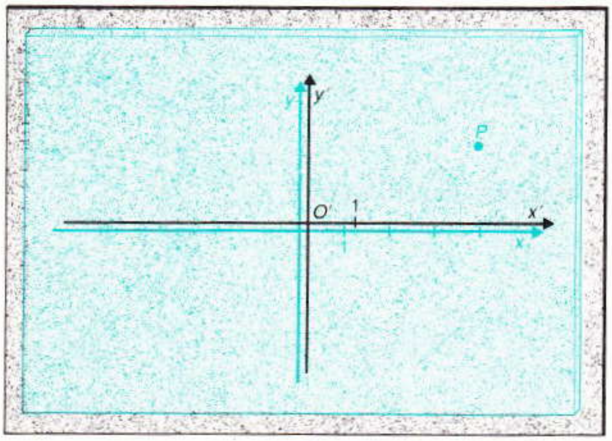


Fig. 14



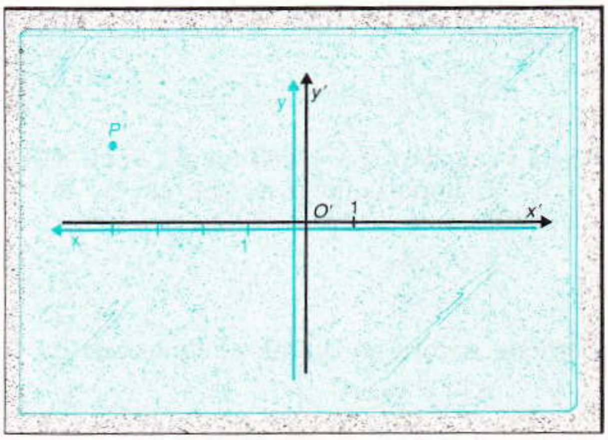


Fig. 15 Fig. 16

È facile prevedere l'effetto di questa trasformazione: le ordinate restano inalterate mentre le ascisse cambiano segno. Così, un qualunque punto P si porta in un punto P', che ha la stessa distanza dall'asse delle y, ma si trova nel semipiano opposto (fig. 14); P' è **il simmetrico** di P rispetto all'asse delle y. Nella *simmetria assiale*, rispetto all'asse delle y, ci sono dei punti che rimangono "fermi": sono tutti i punti che hanno ascissa nulla, cioè i punti che si trovano sull'asse delle y. È come se il riferimento Oxy fosse disegnato su una lastra trasparente che viene "ribaltata" intorno all'asse delle y; ora conviene fissare su un cartoncino il riferimento nella situazione iniziale, indicandolo sempre $O'x'y'$ (figg. 15 e 16)

II) $m=1$, $n=-1$;

si ha la trasformazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases} \tag{3}$$

È facile capire, basandosi anche sulla fig. 17, che le equazioni (3) descrivono **una simmetria rispetto all'asse delle x**. È come se il piano Oxy fosse stato ribaltato intorno all'asse delle x (figg. 18 e 19).

III) $m=-1$, $n=-1$;

si ha la trasformazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y. \end{cases} \tag{4}$$

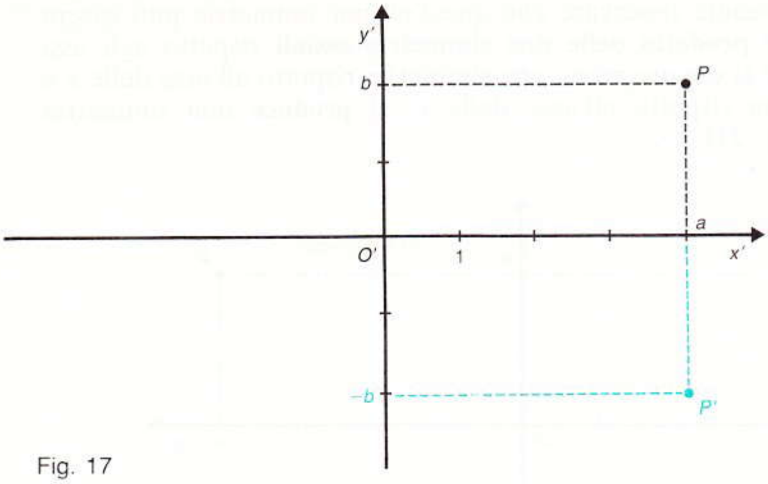
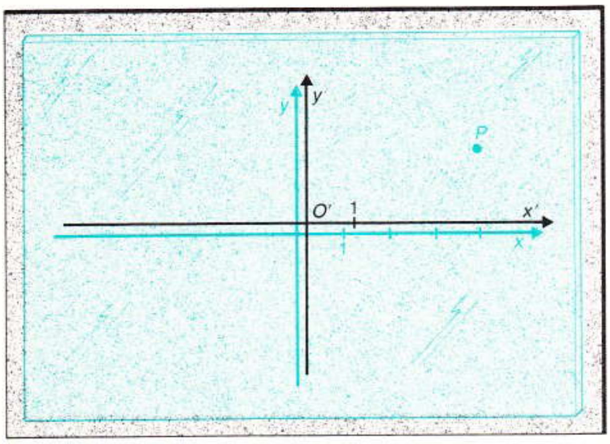


Fig. 17



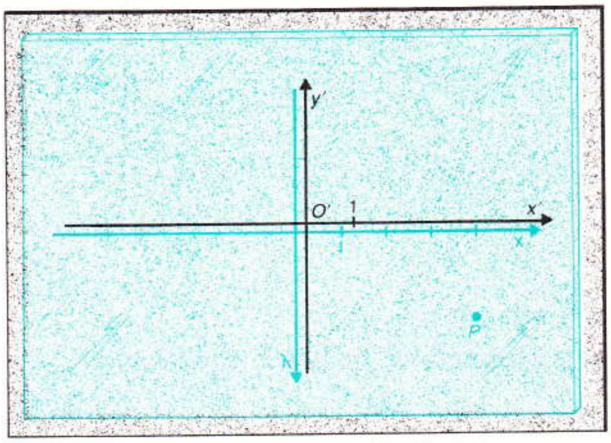


Fig. 18

Fig. 19

Ora un qualunque punto P si porta nel punto P' che ha le coordinate opposte (fig. 2): P e P' si trovano su una stessa retta per O e risulta

$$\overline{PO} = \overline{P'O};$$

perciò P' è il simmetrico di P rispetto ad O. Dunque le equazioni (4) descrivono **la simmetria rispetto all'origine O**, unico punto che rimane fisso.

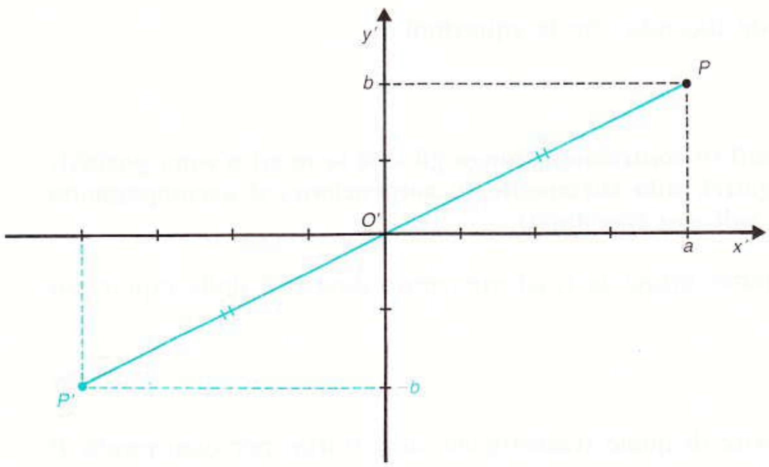


Fig. 20

È interessante osservare che quest'ultima simmetria può essere interpretata **come prodotto delle due simmetrie assiali** rispetto agli assi coordinati, cioè se si esegue prima una simmetria rispetto all'asse delle x e poi una simmetria rispetto all'asse delle y, **si produce** una simmetria rispetto ad O (fig. 21).

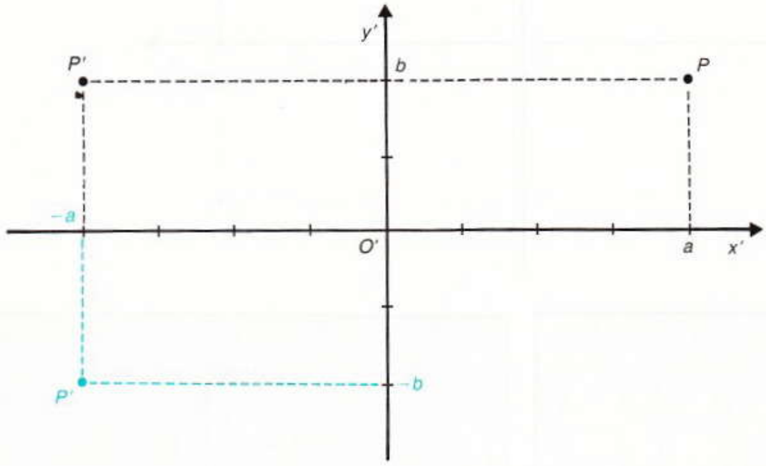


Fig. 21

IV) $m=-3$, $n=-2$;

la trasformazione ha ora le equazioni:

$$\begin{cases} x'=-3x \\ y'=-2y. \end{cases} \tag{5}$$

È facile capire quale effetto produrrà questa trasformazione, se si tiene presente l'idea di prodotto di trasformazioni: la trasformazione (5) può essere realizzata in due tempi, eseguendo un'affinità descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} x'=3x \\ y'=2y, \end{cases}$$

seguita da una simmetria rispetto all'origine, che cambia segno alle coordinate.

Si conclude dicendo che **le equazioni**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=mx} \\ \boldsymbol{y'=ny} \end{cases}$$

descrivono stiramenti (o contrazioni) lungo gli assi se m ed n sono positivi; se m o n sono negativi, allo stiramento (o contrazione) si accompagnano simmetrie rispetto agli assi coordinati.

Consideriamo infine la trasformazione descritta dalle equazioni seguenti

$$\begin{cases} x'=y \\ y'=x. \end{cases} \tag{6}$$

Cerchiamo di scoprire di quale trasformazione si tratta: per ogni punto P del piano scambiamo l'ascissa con l'ordinata, ottenendo il punto P' (fig. 22). Si osserva subito che, in questo caso, rimangono "fermi" tutti i punti che hanno le coordinate uguali fra loro: si tratta dei punti che si trovano

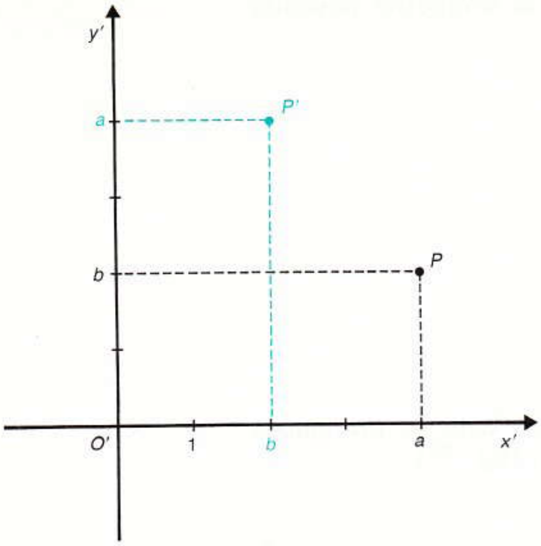


Fig. 22

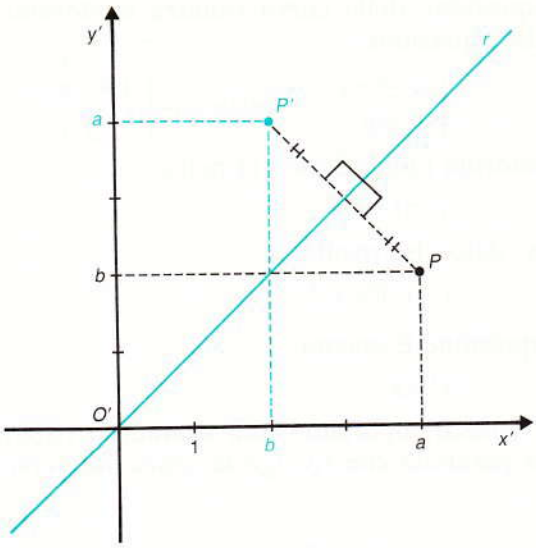


Fig. 23

sulla bisettrice r del I e III quadrante, bisettrice che ha equazione

$$y=x.$$

Se tracciamo questa retta (fig. 23), si nota che P e P' risultano simmetrici rispetto ad r. Dunque le equazioni (6) descrivono **la simmetria rispetto alla bisettrice r del I e III quadrante**.

4. Trasformare una parabola con simmetrie e affinità

Consideriamo la parabola d'equazione

$$y=x^2 \tag{1}$$

e operiamo su di essa con simmetrie. Osserviamo subito che la curva ha come asse di simmetria l'asse delle y, e perciò la simmetria rispetto a questo asse lascerà inalterato il suo grafico (fig. 24). È chiaro che anche

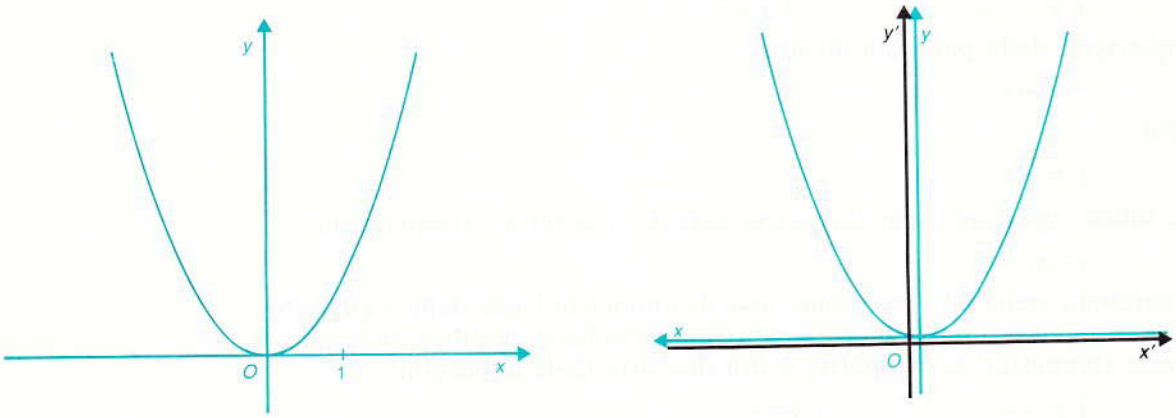


Fig. 24

l'equazione della curva rimarrà inalterata. Infatti la simmetria descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x=-x' \\ y=y', \end{cases}$$

trasforma l'equazione (1) nella

$$y'=(-x')^2.$$

Ma, dato che risulta

$$(-x')^2=x'^2,$$

l'equazione è ancora

$$y'=x'^2.$$

Se, invece, operiamo una simmetria rispetto all'asse delle x, otteniamo una parabola che rivolge *la concavità* verso il basso (fig. 25).

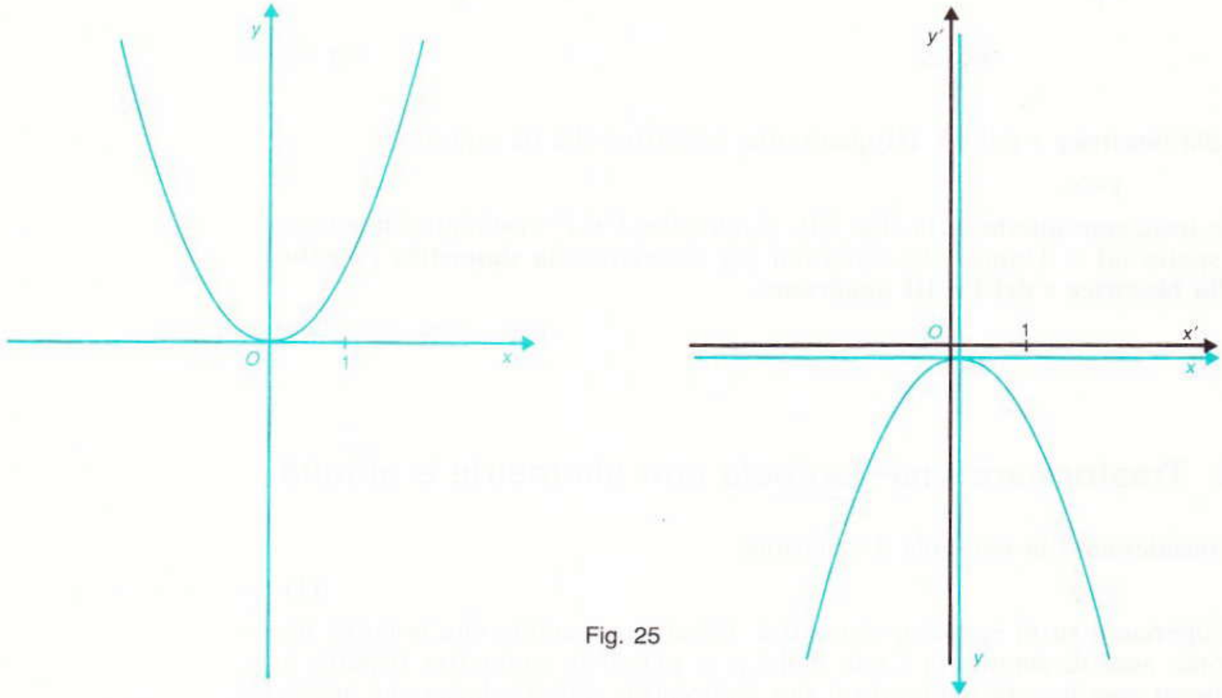


Fig. 25

Ora, anche l'equazione della curva si modifica in seguito a questa simmetria; si ha, infatti, che se si opera la simmetria d'equazioni

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x=x' \\ y=-y' \end{cases}$$

l'equazione della parabola diventa

$$-y'=x'^2$$

ossia

$$y'=-x'^2.$$

Se, infine, operiamo una simmetria rispetto alla retta r d'equazione

$$y=x,$$

la parabola viene ad avere come asse di simmetria l'asse delle x (fig. 26).

L'equazione della curva ancora una volta si modifica, in seguito a questa simmetria; la simmetria è ora descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} y=x' \\ x=y', \end{cases}$$

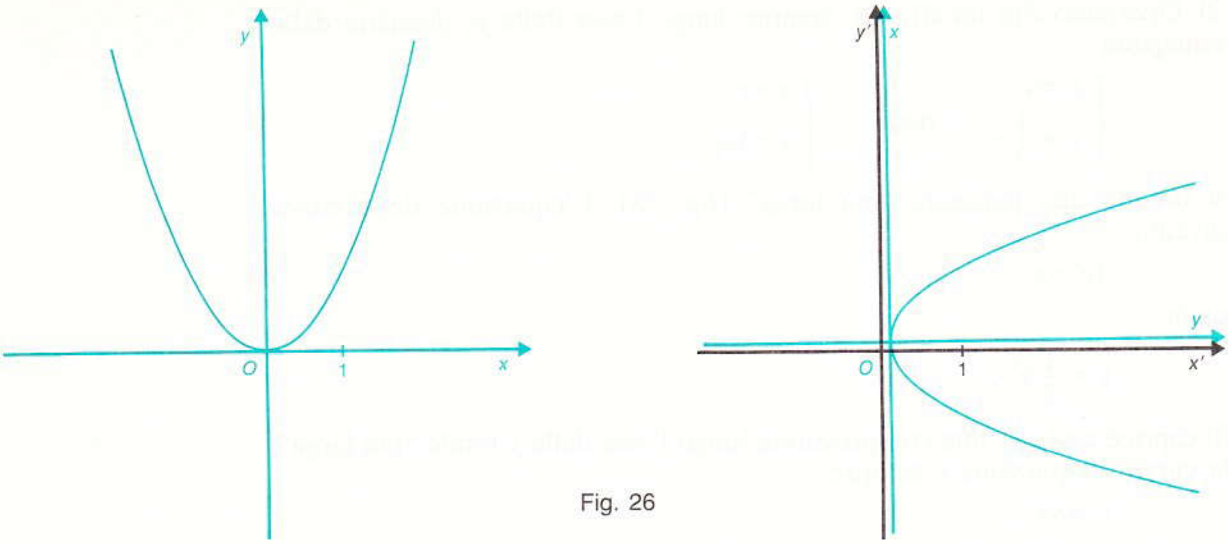


Fig. 26

perciò l'equazione della parabola è:

$$x'=y'^2.$$

Teniamo presente che queste simmetrie non hanno alterato la forma della parabola, ma solo la sua posizione nel riferimento $O'x'y'$.

Se vogliamo, invece, modificare la forma della curva, dobbiamo operare con delle affinità. Ecco qualche esempio.

1) Operiamo uno stiramento in direzione dell'asse delle y, descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=2y \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x=x' \\ y=\frac{1}{2}y'; \end{cases}$$

si ottiene una parabola "più stretta" (fig. 27). L'equazione della curva risulta:

$$\frac{1}{2}y'=x'^2,$$

ossia

$$y'=2x'^2.$$

Si capisce dunque che uno stiramento lungo l'asse delle y rende "più stretta" la curva; l'equazione diventa

$$y'=ax'^2,$$

con $a>1$.

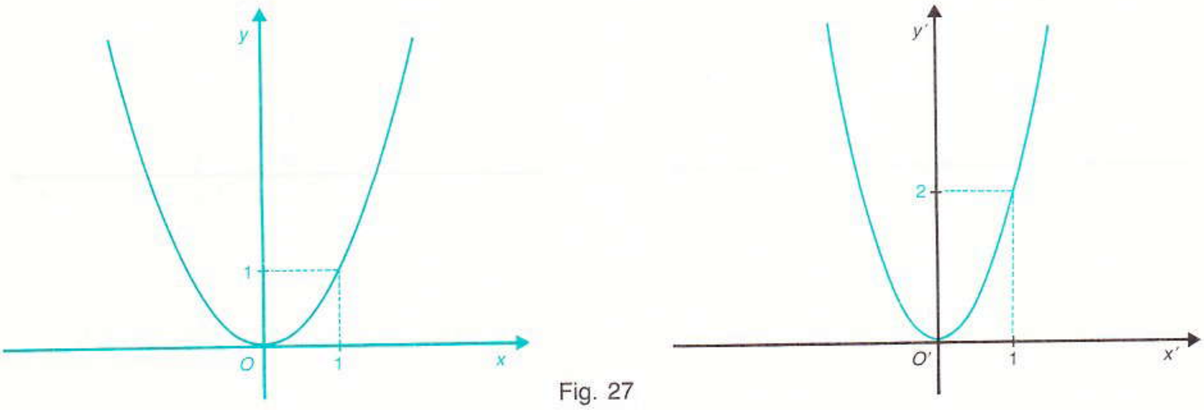


Fig. 27

2) Operiamo ora un'affinità, sempre lungo l'asse delle y, descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{3}y \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x=x' \\ y=3y'; \end{cases}$$

si ottiene una parabola "più larga" (fig. 28). L'equazione della curva diventa:

$$3y'=x'^2$$

ossia

$$y'=\frac{1}{3}x'^2.$$

Si capisce così che una compressione lungo l'asse delle y rende "più larga" la curva; l'equazione è sempre

$$y'=ax'^2,$$

ma, ora, con $0<a<1$.

Se, poi, insieme ad uno stiramento (o compressione) in direzione dell'asse delle y, operiamo anche una simmetria rispetto all'asse delle x, otteniamo una curva come quella disegnata in fig. 29, con la concavità rivolta verso il basso. L'equazione sarà sempre

$$y'=ax'^2,$$

ma con $a<0$.

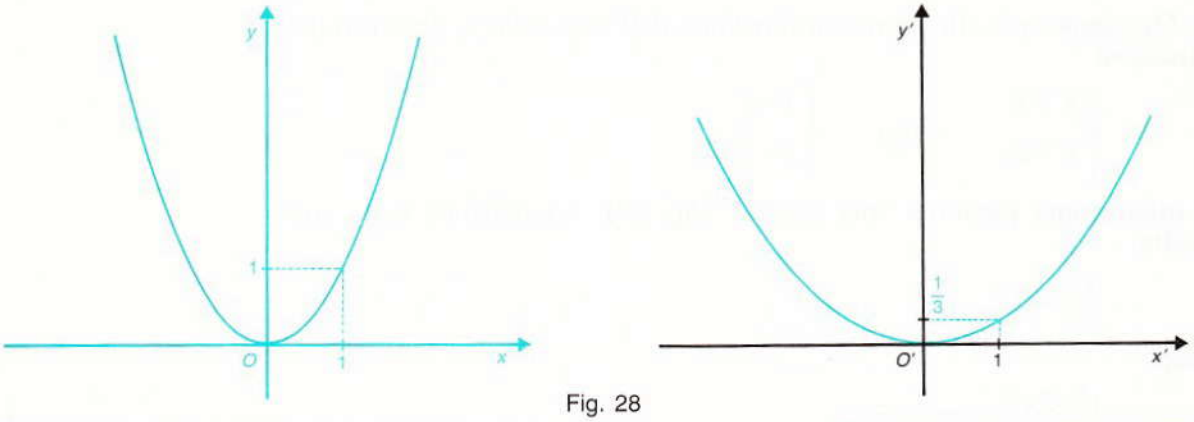


Fig. 28

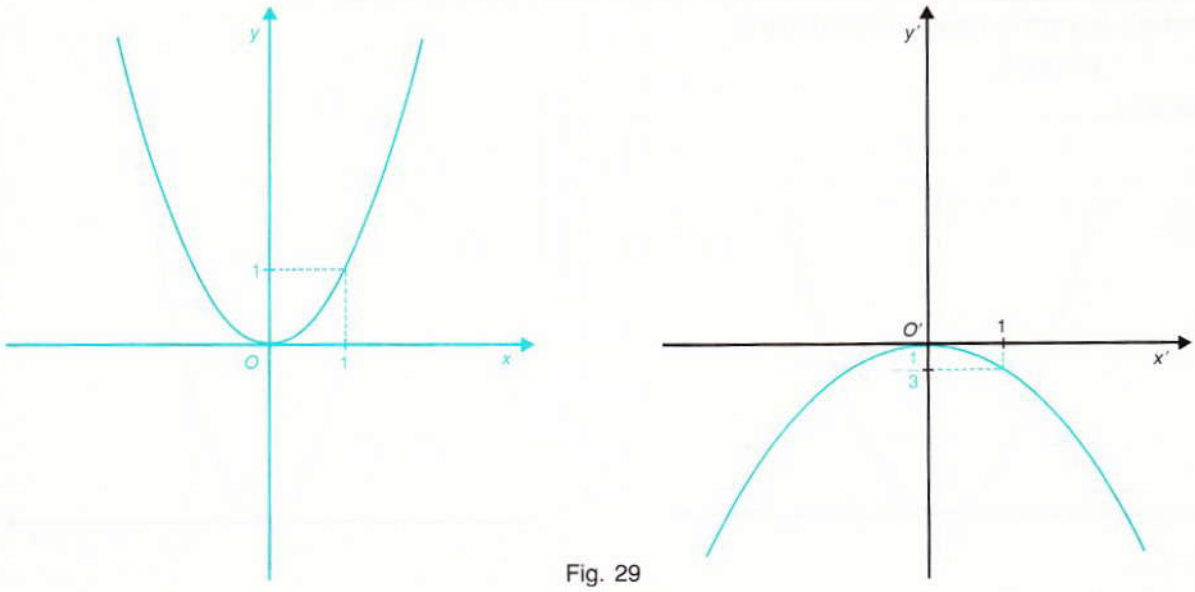


Fig. 29

Si osserva che, in tutti questi casi, la parabola mantiene l'asse delle y come asse di simmetria e il vertice V coincidente con l'origine $O(0,0)$; l'equazione è sempre del tipo

$$y'=ax'^2.$$

Indicando ora per semplicità di scrittura le coordinate con x ed y, possiamo arrivare ad una conclusione di carattere generale:
un'equazione del tipo

$$y=ax^2$$

rappresenta una parabola che ha l'asse delle y come asse di simmetria e il vertice nell'origine O.
I casi che si possono presentare sono riassunti nella fig. 30.

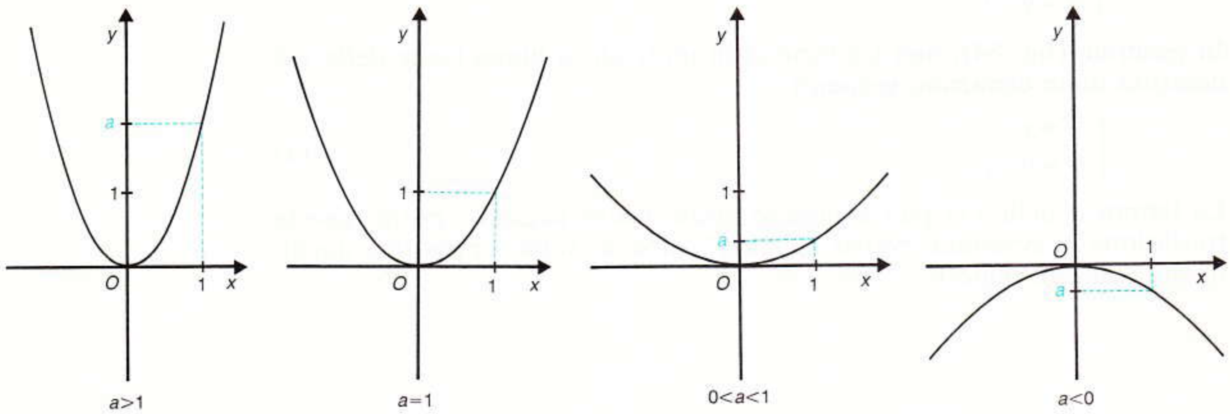


Fig. 30

5. Traslazioni nella direzione degli assi cartesiani

Esaminiamo un altro tipo di trasformazioni del piano: le traslazioni. Per rendersi conto di come queste trasformazioni si possano tradurre in equazioni basiamoci, anche in questo caso, su un supporto concreto: immaginiamo che il riferimento Oxy sia disegnato su una lastra trasparente che facciamo slittare lungo una direzione. Il riferimento $O'x'y'$, disegnato su un cartoncino (fig. 31), permetterà, ancora una volta, di confrontare la situazione iniziale con quella finale.

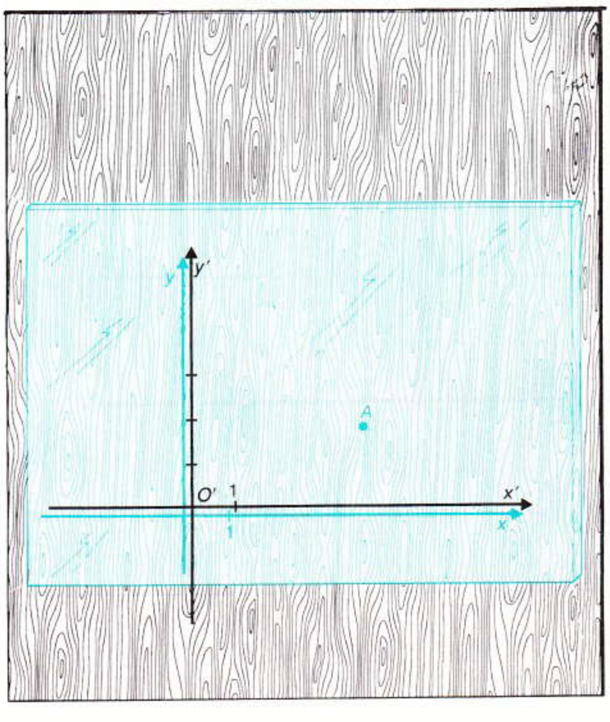


Fig. 31

In fig. 32 abbiamo fatto scivolare la lastra nella direzione dell'asse delle y di 3 unità verso l'alto. È chiaro che un qualunque punto A, che aveva inizialmente (fig. 31) le coordinate uguali sulla tavola e sulla lastra, e cioè

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y, \end{cases}$$

si porta nel punto A' (fig. 32), che ha le coordinate (x',y'), date da:

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y+3. \end{cases}$$

Se, invece, facciamo scivolare la lastra di 2 unità sempre lungo l'asse delle y, ma verso il basso (fig. 33), un punto A si porta in un punto A', che ha le coordinate (x',y'), date da

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y-2. \end{cases}$$

In generale (fig. 34), una traslazione di un tratto q lungo l'asse delle y è descritta dalle equazioni seguenti

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y+q. \end{cases} \tag{1}$$

La lettera q nelle (1) può assumere anche valori negativi: in tal caso la traslazione è avvenuta "verso il basso", cioè in verso opposto a quello fissato sull'asse delle y.

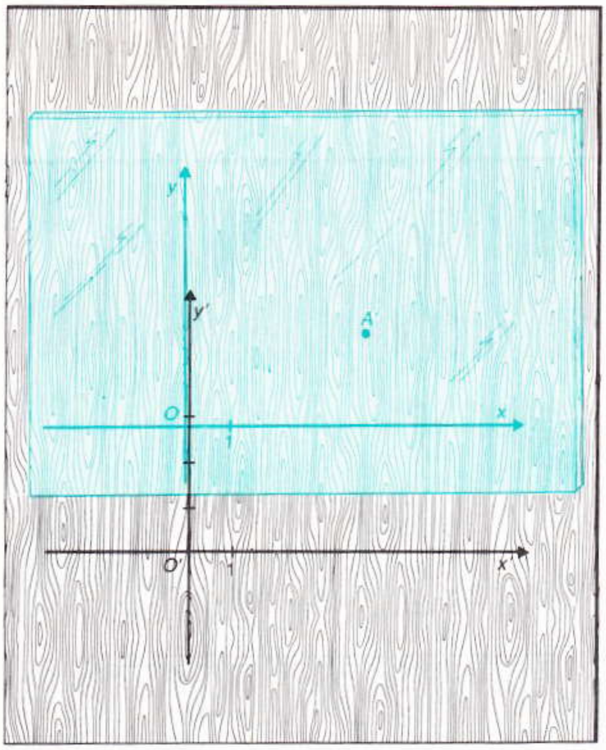


Fig. 32

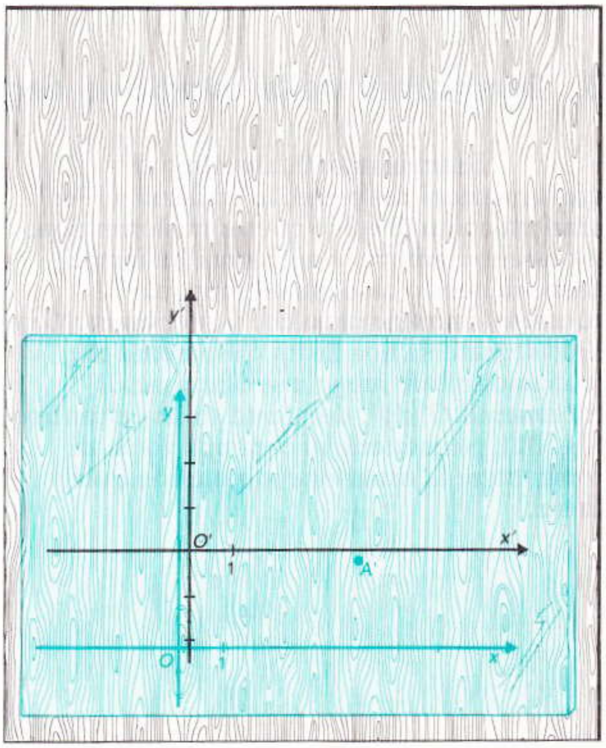


Fig. 33

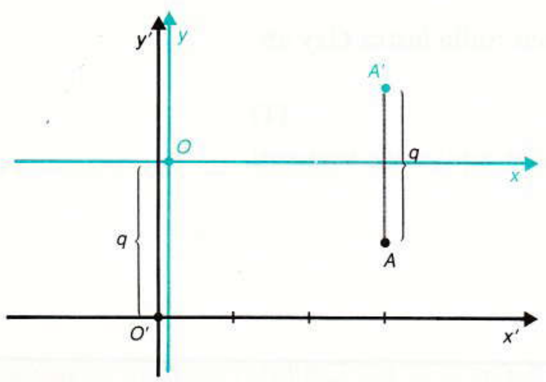


Fig. 34

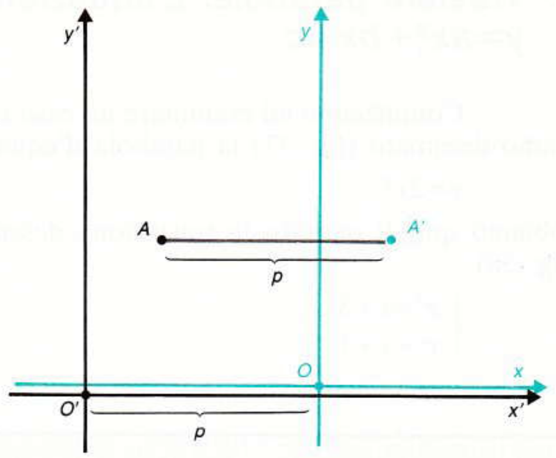


Fig. 35

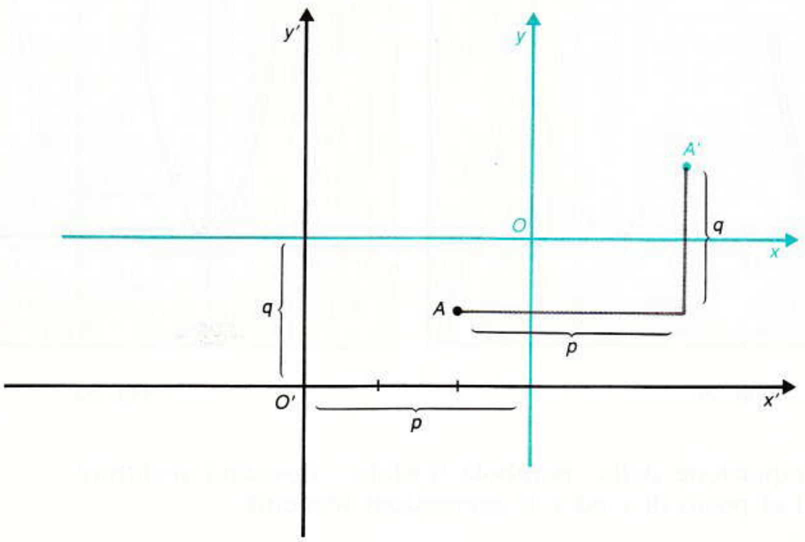


Fig. 36

Analogamente, è facile trovare le equazioni di una traslazione nella direzione dell'asse delle x; se trasliamo la lastra di un tratto p (fig. 35), un qualunque punto A si porta in un punto A', che ha le coordinate x',y' date da:

$$\begin{cases} x=x'+p \\ y=y'. \end{cases} \tag{2}$$

Anche in questo caso, valori negativi della costante p indicano traslazioni in verso opposto a quello fissato sull'asse delle x, cioè "verso sinistra".

È chiaro che le due traslazioni lungo gli assi si possono operare contemporaneamente (o successivamente); in tal caso si avrà una traslazione (fig. 36) descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} x'=x+p \\ y'=y+q. \end{cases} \tag{3}$$

6. Traslare parabole. L'equazione della parabola nella forma $y=ax^2+bx+c$

Cominciamo ad esaminare un caso numerico: sulla lastra Oxy abbiamo disegnato (fig. 37) la parabola d'equazione

$$y=2x^2; \qquad (1)$$

abbiamo quindi operato la traslazione descritta dalle equazioni seguenti (fig. 38):

$$\begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y+1. \end{cases}$$

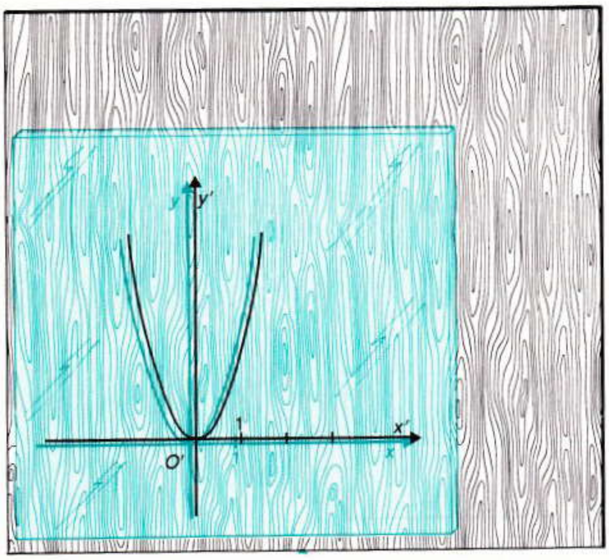


Fig. 37

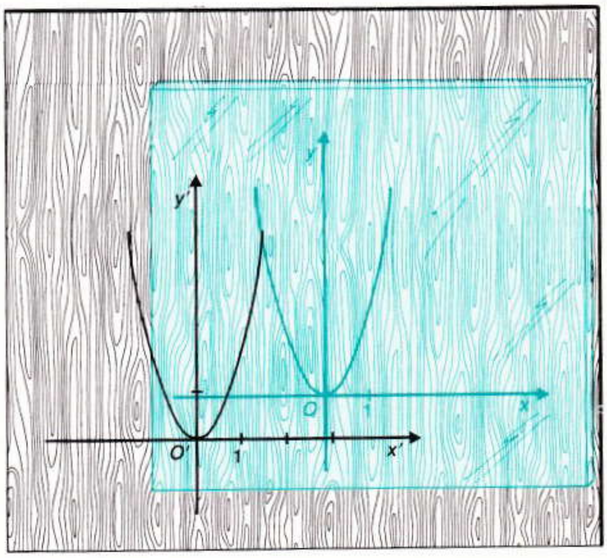


Fig. 38

Ora, per avere l'equazione della "parabola traslata", dovremo sostituire nell'equazione (1) al posto di x ed y le espressioni seguenti:

$$\begin{cases} x=x'-3 \\ y=y'-1. \end{cases}$$

Perciò l'equazione (1) diventa:

$$y'-1=2(x'-3)^2,$$

ossia

$$y'=2(x'-3)^2+1. \qquad (2)$$

Il vertice ha ora le coordinate (3,1) e l'asse di simmetria ha equazione

$$x'=3 \quad \text{ossia} \quad x'-3=0.$$

Svolgendo le operazioni indicate, l'equazione (2) assume la forma seguente:

$$y'=2(x'^2-6x'+9)+1,$$

ossia

$$y'=2x'^2-12x'+19.$$

Il procedimento che abbiamo seguito può essere ripetuto in generale: si disegna sul piano Oxy la parabola d'equazione

$$y=ax^2,$$

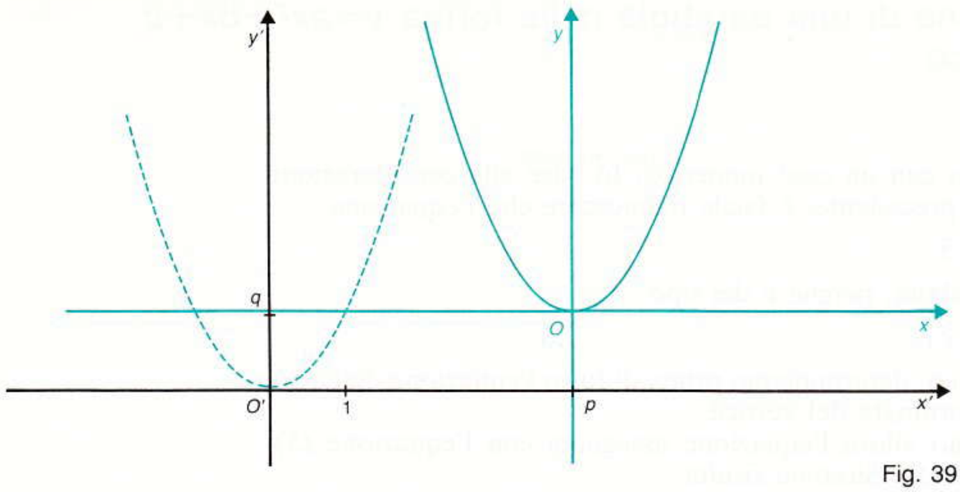


Fig. 39

che ha vertice in $O(0,0)$ e asse di simmetria d'equazione $x=0$ (fig. 39) e si effettua una traslazione descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} x'=x+p \\ y'=y+q. \end{cases}$$

In questo modo si ottiene una curva che ha, nel riferimento $O'x'y'$, l'equazione

$$y'-q=a(x'-p)^2,$$

ossia

$$y'=a(x'-p)^2+q. \tag{3}$$

La parabola ottenuta ha dunque, nel riferimento $O'x'y'$, come vertice il punto $V(p,q)$ e come asse di simmetria la retta d'equazione

$$x'=p \quad \text{ossia} \quad x'-p=0.$$

Svolgendo nell'equazione (3) le operazioni indicate, si ottiene:

$$y'=a(x'^2-2px'+p^2)+q,$$

ossia

$$y'=ax'^2-2apx'+ap^2+q. \tag{4}$$

Indicando ora, per semplicità di scrittura, con x ed y le coordinate, possiamo arrivare ad una conclusione di carattere generale:
un'equazione del tipo

$$\boldsymbol{y=ax^2-2apx+ap^2+q} \tag{5}$$

rappresenta sempre una parabola, che ha come asse di simmetria la retta d'equazione

$$\boldsymbol{x=p}$$

e come vertice il punto

$$\boldsymbol{V(p,q)}.$$

L'equazione (5) si può scrivere in una forma più semplice, ponendo

$$b=-2ap$$
$$c=ap^2+q.$$

Si conclude così che **un'equazione del tipo**

$$\boldsymbol{y=ax^2+bx+c},$$

rappresenta sempre una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y.

7. Dall'equazione di una parabola nella forma $y=ax^2+bx+c$ al suo grafico

Cominciamo con un caso numerico. In base alle considerazioni svolte nel paragrafo precedente, è facile riconoscere che l'equazione

$$y=3x^2-6x+5$$

rappresenta una parabola, perché è del tipo

$$y=ax^2+bx+c.$$

Per tracciarne il grafico, determiniamo prima di tutto l'equazione dell'asse di simmetria e le coordinate del vertice.

Confrontiamo allora l'equazione assegnata con l'equazione (5) del paragrafo precedente. Siccome risulta

$$a=3,$$

le equazioni da confrontare sono le seguenti

$$y=3x^2-6x+5$$
$$y=3x^2-6px+3p^2+q.$$

Confrontando, in particolare, i coefficienti dei termini in x, ci si accorge che risulta:

$$-6=-6p,$$

e dunque l'ascissa p del vertice è data da

$$p=1.$$

Ora, conoscendo l'ascissa del vertice, è facile calcolarne l'ordinata: basta sostituire il valore 1 al posto della x nell'equazione della curva. Si ha:

$$y=3\cdot 1^2-6\cdot 1+5=2$$

e quindi

$$q=2.$$

Il vertice della parabola è dunque il punto $V(1,2)$. L'asse di simmetria ha l'equazione

$$x=1.$$

Determiniamo, infine, qualche punto della curva, assegnando alla x dei valori scelti opportunamente e ricavando i corrispondenti valori di y. Si ha per esempio:

x	y
-1	$3(-1)^2-6(-1)+5=14$
$-0{,}5$	$3(-0{,}5)^2-6(-0{,}5)+5=8{,}75$
0	$3\cdot 0^2-6\cdot 0+5=5.$

Si ottengono così i tre punti $A(0,5)$, $B(-1,14)$ e $C(-0{,}5;8{,}75)$. Questi punti si trovano a sinistra dell'asse di simmetria e si può pertanto tracciare, approssimativamente, l'arco $VABC$ di parabola; si completa poi il disegno per simmetria (fig. 40).

Il procedimento che abbiamo seguito ha carattere generale e può essere sempre ripetuto quando si vuole disegnare una parabola, la cui equazione è del tipo

$$y=ax^2+bx+c.$$

Si confronta l'equazione assegnata con l'equazione

$$y=ax^2-2apx+ap^2+q;$$

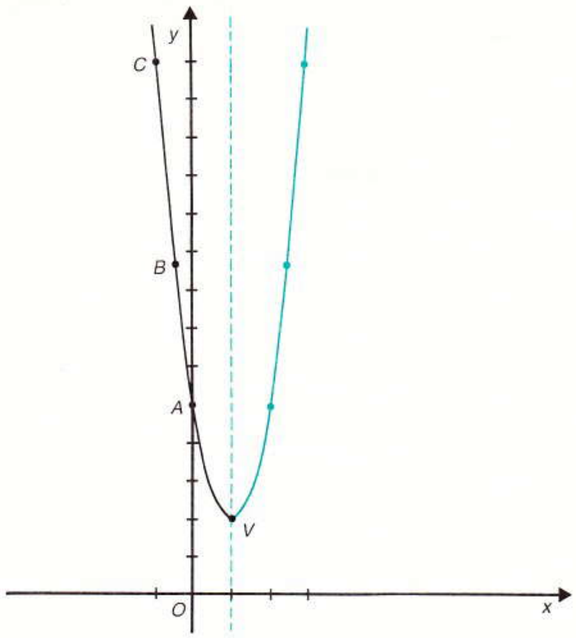


Fig. 40

risulta

$$b=-2ap,$$

e quindi l'ascissa del vertice è

$$p=-\frac{b}{2a}.$$

L'ordinata del vertice si calcola, poi, sostituendo l'ascissa p nell'equazione assegnata. In questo modo si può indicare sul piano il vertice V e l'asse di simmetria della parabola.

Per completare il disegno basta determinare qualche punto della parabola, assegnando opportuni valori ad x e ricavando i corrispondenti valori di y (fig. 41). È chiaro che il disegno diventa più preciso se si considerano parecchi punti della curva.

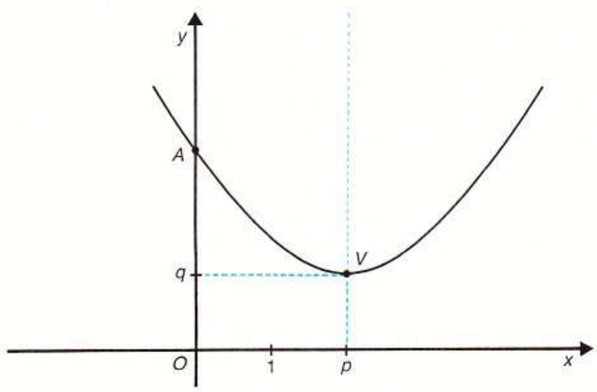


Fig. 41. Parabola d'equazione

$$y=ax^2+bx+c$$

$$\left.\begin{array}{l} p=-\dfrac{b}{2a} \\ q=ap^2+bp+c \end{array}\right\} V(p,q)$$

1. Parte quarta

Intersezione di curve

1. Una legge economica che conduce alla ricerca del punto d'intersezione fra due rette
2. Ancora sull'intersezione di due rette. Condizione di parallelismo
3. Condizione di perpendicolarità
4. Intersezioni di una retta con una circonferenza. Rette secanti, tangenti, esterne
5. Intersezioni di una retta con una conica. Ordine di una curva
6. Qualche caso particolare di intersezioni di una retta con una conica. Gli asintoti dell'iperbole
7. Intersezioni di due circonferenze
8. Intersezioni di due coniche

1. Una legge economica che conduce alla ricerca del punto d'intersezione fra due rette

Nel paragrafo 7 della Parte seconda, a proposito di ricerche di mercato, siamo arrivati a formulare due leggi che, in prima approssimazione, descrivono il "mercato dei calcolatori". Sono queste

$$d=-p+2{,}9 \quad (1) \qquad \text{e} \qquad s=1{,}5p+0{,}5 \quad (2),$$

dove p indica il prezzo in migliaia di lire, d indica la quantità di merce acquistata, e s la quantità immessa sul mercato.

La legge (1) mostra come la quantità d di merce acquistata dai consumatori (detta anche **domanda**) diminuisce all'aumentare del prezzo p. La legge (2) mostra come aumenta la quantità s di merce immessa sul mercato (detta anche **offerta**), quando p aumenta. Le equazioni (1) e (2) permettono di esprimere in una semplice forma matematica uno dei "meccanismi di formazione dei prezzi": **la legge della domanda e dell'offerta**[1].

Tracciamo il grafico delle leggi (1) e (2) sullo stesso piano cartesiano; si ottiene un disegno come quello di fig. 1. Si osserva subito che le due rette si incontrano in un punto A, che individua questa particolare situazione: la quantità s di merce introdotta sul mercato coincide con la quantità d acquistata dai consumatori.

La legge della domanda e dell'offerta afferma che **solo** in questa situazione il prezzo della merce si mantiene stabile. Se, infatti, il prezzo della merce è b, inferiore all'ascissa a del punto A (fig. 2), la domanda d supera l'offerta s ed il prezzo tenderà ad aumentare per la ragione seguente: si troveranno persone disposte a pagare un prezzo superiore a b, pur di acquistare una merce che è presente in quantità insufficiente sul mercato. Se, invece, il prezzo della merce è $c>a$, l'offerta supera la domanda e il prezzo tende a diminuire, perché dei produttori sono disposti a vendere ad un prezzo più basso, pur di liberarsi della merce che ingombra i magazzini.

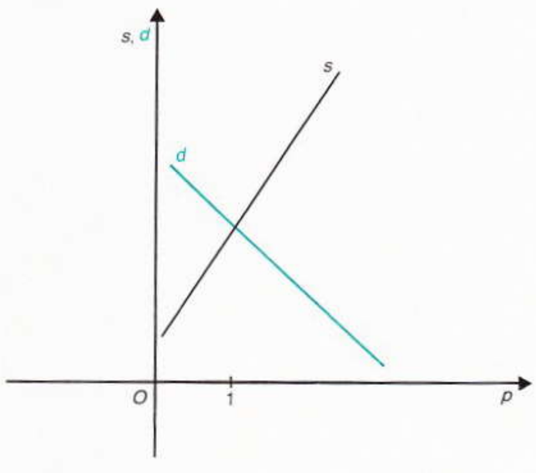


Fig. 1

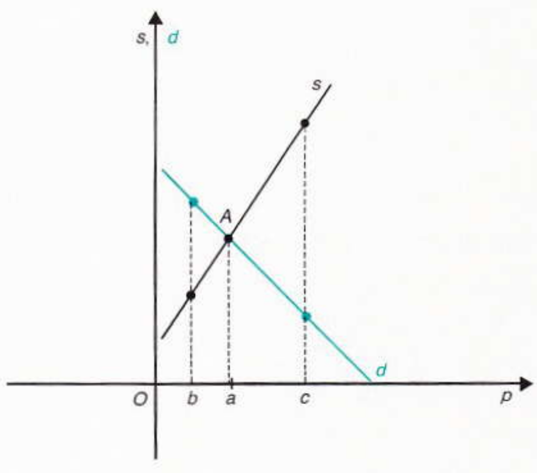


Fig. 2

[1] L'economista francese A.A. Cournot (1801-1877) è stato il primo a formulare matematicamente questa legge, che è stata poi universalmente adottata da tutti gli economisti.

Si capisce così l'importanza di determinare, in base alle ricerche di mercato, il prezzo a, chiamato anche **prezzo di equilibrio**.

Nel caso del mercato dei calcolatori, esaminando le leggi

$$d=-p+2{,}9 \qquad (1)$$

e

$$s=1{,}5p+0{,}5, \qquad (2)$$

si capisce che risulta

$$d=s,$$

se si ha

$$-p+2{,}9=1{,}5p+0{,}5. \qquad (3)$$

Il prezzo d'equilibrio si riesce dunque a determinare risolvendo l'equazione di 1° grado (3); si ottiene:

$$2{,}4=2{,}5p,$$

da cui

$$p=\frac{2{,}4}{2{,}5}=0{,}96.$$

In tal caso risulta:

$$d=-0{,}96+2{,}9=1{,}94$$

e

$$s=1{,}5\cdot 0{,}96+0{,}5=1{,}94.$$

In base ai dati rilevati, si può così prevedere che il prezzo d'equilibrio, di cui si è parlato, è di 960.000 lire; a questo prezzo i calcolatori acquistati risultano in numero di 1940 e altrettanti sono quelli immessi sul mercato.

Da questo esempio si capisce che, in generale, per trovare il punto A d'intersezione fra due curve basta ricordare che A si trova su una delle curve **solo se** le sue coordinate ne soddisfano l'equazione. Perciò A si trova su entrambe le curve **solo se** le sue coordinate sono una coppia di numeri che soddisfa, contemporaneamente, le equazioni delle due curve. Si conclude che: **per trovare le coordinate del punto A di intersezione fra due curve si deve risolvere il sistema formato dalle loro equazioni**.

2. Ancora sull'intersezione di due rette. Condizione di parallelismo

Determiniamo ora il punto d'intersezione di qualche coppia di rette.

A) Sono date le due rette a e b che hanno le equazioni seguenti:

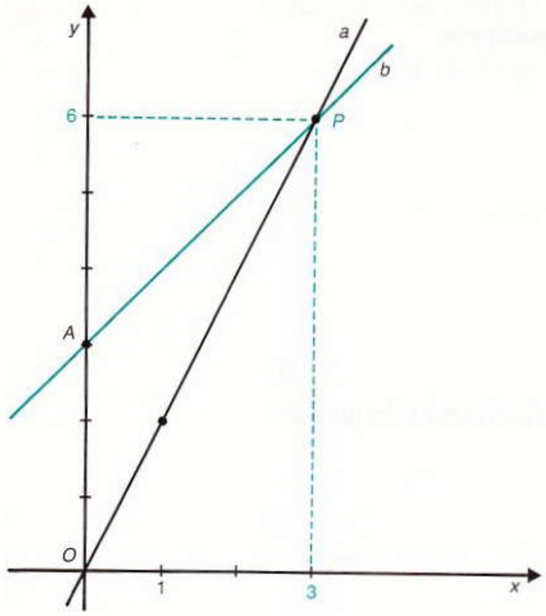
$$(a)\ y=2x \qquad \text{e} \qquad (b)\ y=x+3.$$

Per determinare il punto P, in cui le due rette si incontrano, bisogna risolvere il sistema formato dalle due equazioni; si ha:

$$\begin{cases} y=2x \\ y=x+3. \end{cases} \qquad (1)$$

Risolvendo il sistema, per esempio con il metodo di sottrazione, si ottiene:

$$\begin{cases} 0=x-3 \\ y=2x \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} x=3 \\ y=6. \end{cases}$$



(a)

x	y
0	0
1	2

(b)

x	y
0	3
1	4

Fig. 3

Si trova così il punto $P(3,6)$; la fig. 3 visualizza il risultato dei calcoli.

B) È data, insieme alla retta a, la retta c che ha l'equazione

$(c)\ y=2x+3.$

Se proviamo, anche in questo caso, a trovare il punto d'intersezione fra le due rette, siamo condotti a risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} y=2x \\ y=2x+3. \end{cases} \qquad (2)$$

Ma, ora, arriviamo subito a scrivere

$$\begin{cases} 0=3 \\ y=2x. \end{cases}$$

È chiaro che l'equazione

$$0=3$$

è impossibile, perciò **il sistema (2) non ha soluzione**. Questo vuol dire che **le due rette *a* e *c* non si incontrano in un punto, cioè sono parallele**. La fig. 4 conferma queste conclusioni.

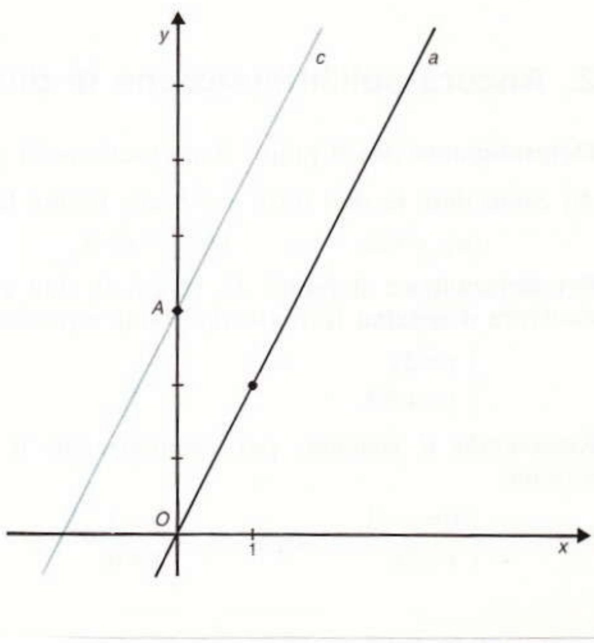


Fig. 4

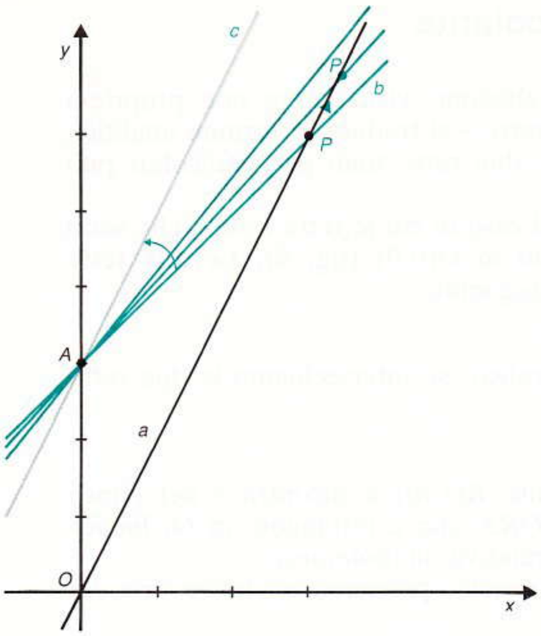


Fig. 5

È anche interessante confrontare i risultati dei due sistemi esaminandoli in modo dinamico (fig. 5): teniamo fissa la retta a e facciamo ruotare la retta b intorno al punto $A(0,3)$ fino a sovrapporla alla retta c.

Si osserva che, mentre la pendenza della retta b aumenta, il punto d'intersezione P si allontana lungo la retta a; si intuisce così che, quando la retta b si sovrappone alla retta c, il punto P "scompare all'infinito". Le due rette non hanno più in comune un punto, ma hanno la stessa pendenza (o la stessa direzione).

Si ha, in generale, che se nelle equazioni di due rette del tipo

$y=mx+n$ e $y=m'x+n'$

risulta

$m=m'$,

allora le due rette sono parallele.

Viceversa, se due rette sono parallele, i coefficienti m ed m' saranno certamente uguali perché due rette parallele hanno la stessa pendenza.

Quindi: **condizione necessaria e sufficiente perché due rette siano parallele è che siano uguali i coefficienti angolari delle loro equazioni.**

Ecco un altro esempio: sono parallele le due rette che hanno le equazioni seguenti:

$y=4x-2$ e $y=4x+6$;

non sono, invece, parallele le due rette che hanno le equazioni seguenti:

$y=4x-2$ e $y=-4x+3$,

dato che i coefficienti delle x non sono uguali.

3. Condizione di perpendicolarità

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come una proprietà geometrica – il parallelismo fra due rette – si traduce in termini analitici. Vedremo ora che anche il fatto che due rette sono perpendicolari può essere espresso analiticamente.

Cominciamo a considerare il caso in cui le rette r ed s, che sono perpendicolari fra loro, si incontrano in $O(0,0)$ (fig. 6). Le due rette avranno allora le equazioni del tipo seguente:

$$(r)\ y=mx \quad \text{e} \quad (s)\ y=m'x.$$

Possiamo visualizzare m ed m' sul grafico, se intersechiamo le due rette con la retta a d'equazione

$$x=1;$$

infatti la retta a incontra r nel punto $R(1,m)$ e incontra s nel punto $S(1,m')$. Si ottiene così il triangolo ORS, che è rettangolo in O, ha RS come ipotenusa e OU come altezza relativa all'ipotenusa.

Dato che il triangolo è rettangolo, possiamo applicare uno dei teoremi di Euclide; si ha

$$\overline{OU}^2=\overline{RU}\cdot\overline{US}, \tag{1}$$

dove

$$\overline{OU}=1, \qquad \overline{RU}=m, \qquad \overline{US}=-m'.$$

La relazione (1) si scrive dunque così:

$$1=m(-m') \qquad \text{ossia} \qquad 1=-mm',$$

o anche

$$mm'=-1.$$

Arriviamo così a un'importante conclusione: *due rette per O, perpendicolari fra loro, sono descritte da equazioni che hanno i coefficienti m, m' legati dalla relazione*

$$mm'=-1.$$

Perciò le rette di fig. 6 hanno equazioni del tipo

$$(r)\ y=mx, \qquad (s)\ y=-\frac{1}{m}x.$$

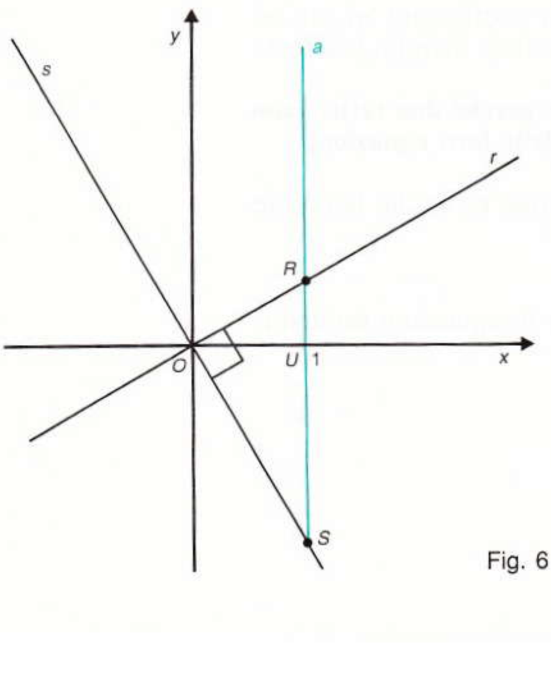


Fig. 6

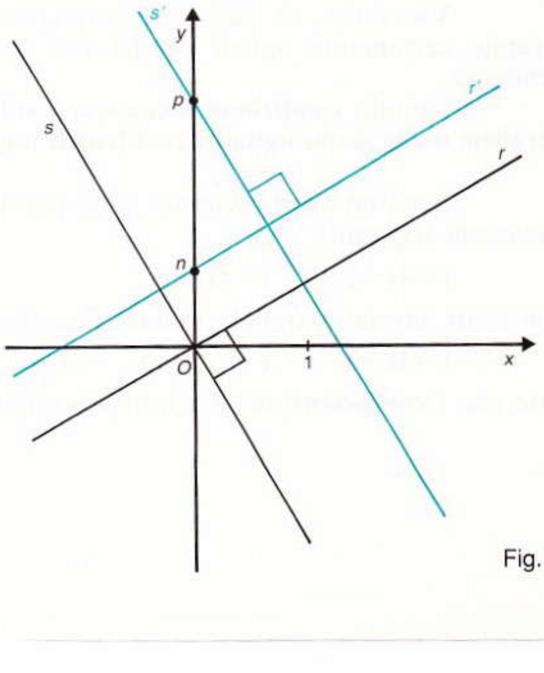


Fig. 7

Se ora trasliamo le rette r e s lungo l'asse delle y, si ottengono le rette r' e s' di fig. 7, e resta ovviamente invariata la loro pendenza. Le rette r' e s' avranno equazioni del tipo

$$(r')\ y=mx+n, \qquad (s')\ y=-\frac{1}{m}x+p.$$

Concludiamo dunque che: **se** due rette sono perpendicolari, **allora** i coefficienti m, m' che compaiono nelle loro equazioni sono legati dalla relazione

$$mm'=-1.$$

Vogliamo ora dimostrare **la proprietà inversa**, cioè che se nelle equazioni di due rette risulta $mm'=-1$, allora le due rette sono perpendicolari fra loro.

Cominciamo con un esempio numerico. Sono date le due rette d'equazione:

$$(a)\ y=-\frac{1}{2}x \qquad \text{e} \qquad (b)\ y=2x.$$

Le abbiamo disegnate in fig. 8. Per essere sicuri che le due rette sono perpendicolari, occorre dimostrare che l'angolo $a\hat{O}b$ è retto. Si può procedere così: si disegna la retta c d'equazione

$$x=1$$

e si considerano i punti A e B in cui la retta c incontra le rette a e b (fig. 9). Si ha:

$$A\left(1,-\frac{1}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad B(1,2).$$

Si osserva che i due triangoli rettangoli OUB, UAO sono simili fra loro (hanno infatti i cateti nello stesso rapporto). Si ha perciò:

$$O\hat{B}U=U\hat{O}A=\beta \qquad \text{e} \qquad B\hat{O}U=O\hat{A}U=\alpha.$$

Ora, dal triangolo rettangolo OUB si ha

$$\alpha+\beta=90°;$$

risulta quindi che nel triangolo BOA:

$$B\hat{O}A=\alpha+\beta=90°.$$

Le due rette sono dunque perpendicolari fra loro.

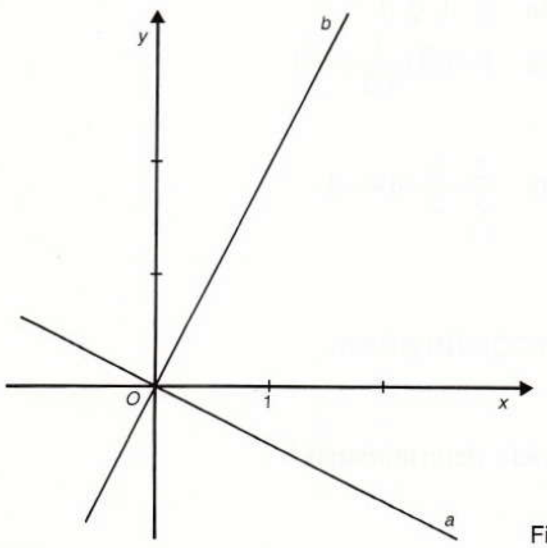


Fig. 8

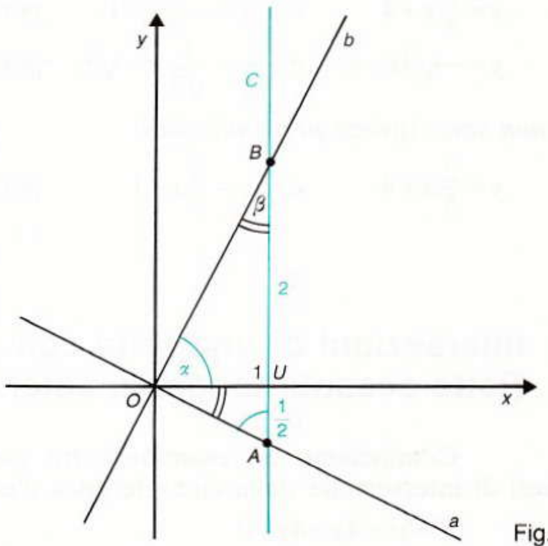


Fig. 9

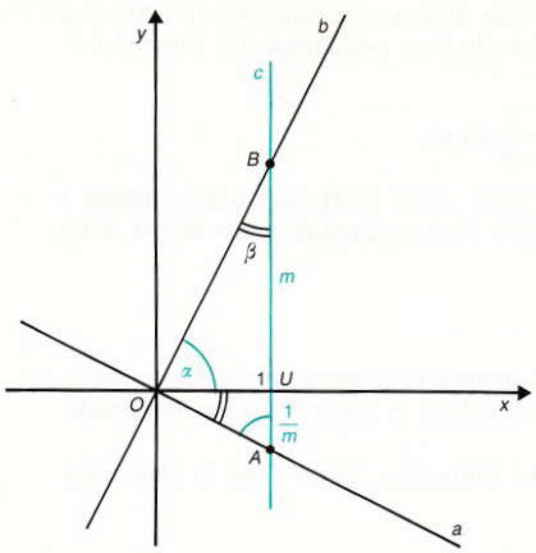


Fig. 10

Si capisce che si può ripetere una dimostrazione analoga quando siano date due rette d'equazione (fig. 10)

$$(a)\ y=mx \qquad \text{e} \qquad (b)\ y=-\frac{1}{m}x.$$

Se poi le rette non passano per l'origine, basta considerare le parallele ad esse per O.

In conclusione, *basta verificare che le equazioni di due rette presentino i coefficienti angolari legati dalla relazione*

$$mm'=-1,$$

per essere sicuri che le due rette sono perpendicolari.

Quindi: **condizione necessaria e sufficiente perché due rette siano fra loro perpendicolari è che i coefficienti angolari delle loro equazioni siano legati dalla relazione:**

$$\mathbf{mm'=-1.}$$

Ecco qualche esempio:

– *sono perpendicolari* le seguenti coppie di rette

$$y=\frac{2}{5}x+4 \qquad \text{e} \qquad y=-\frac{5}{2}x+1 \qquad \text{perché risulta} \quad \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{-5}{2}\right)=-1$$

$$y=-\sqrt{3}x-\pi \qquad \text{e} \qquad y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-\sqrt{5} \qquad \text{perché risulta} \quad (-\sqrt{3})\frac{1}{\sqrt{3}}=-1$$

– *non sono* invece *perpendicolari*

$$y=\frac{2}{5}x+4 \qquad \text{e} \qquad y=\frac{5}{2}x+1 \qquad \text{perché risulta} \quad \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}=1\neq-1.$$

4. Intersezioni di una retta con una circonferenza. Rette secanti, tangenti, esterne

Cominciamo ad esaminare tre casi numerici: determiniamo i punti di intersezione della circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-4x-4y=0$$

con una delle rette seguenti

$$(r)\ y=-x+4, \qquad (t)\ y=-x, \qquad (s)\ y=-x-1.$$

Si capisce che, in ciascuno di questi casi, si deve risolvere un sistema formato dalle equazioni della circonferenza e della retta, dato che si cercano le coordinate di punti che si trovano su ambedue le curve. Ecco i casi che si presentano.

I) $$\begin{cases} x^2+y^2-4x-4y=0 \\ y=-x+4. \end{cases}$$

Risolviamo il sistema con il metodo di sostituzione; si ha:

$$\begin{cases} x^2+(-x+4)^2-4x-4(-x+4)=0 \\ y=-x+4 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x^2+x^2-8x+16-4x+4x-16=0 \\ y=-x+4 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} 2x^2-8x=0 \\ x=-x+4 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} 2x(x-4)=0 < \begin{matrix} 2x=0 \rightarrow x_1=0 \\ x-4=0 \rightarrow x_2=4 \end{matrix} \\ y=-x+4 \end{cases}$$

Le due soluzioni del sistema sono dunque:

$$\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0+4=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=-4+4=0. \end{cases}$$

Abbiamo così individuato due punti di intersezione:

$$A(0,4) \quad \text{e} \quad B(4,0);$$

la retta r è secante, dato che interseca la circonferenza nei due punti A e B (fig. 11).

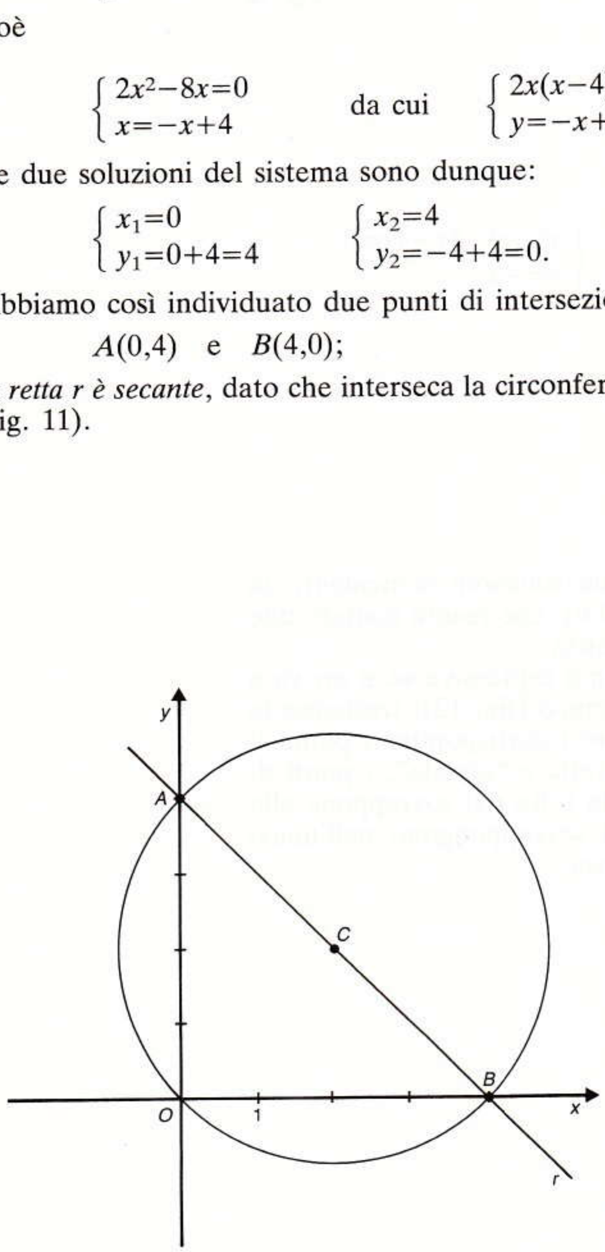


Fig. 11. La circonferenza ha centro $C(2,2)$ e raggio $r=\sqrt{8}$ (v. Parte seconda, paragrafo 5).

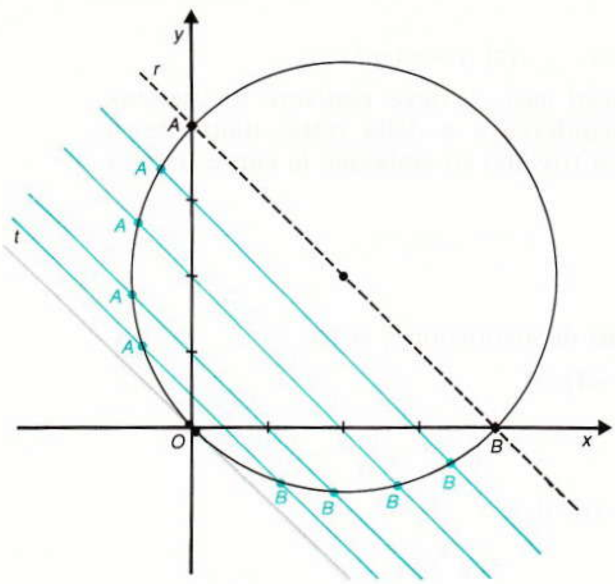


Fig. 12

II) $\begin{cases} x^2+y^2-4x-4y=0 \\ y=-x. \end{cases}$

Risolvendo il sistema, si ottiene

$$\begin{cases} x^2+(-x)^2-4x-4(-x)=0 \\ y=-x. \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x^2+x^2-4x+4x=0 \\ y=-x. \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} 2x^2=0 \rightarrow x_1=x_2=0. \\ y=-x. \end{cases}$$

Si ottiene dunque:

$$\begin{cases} x_1=x_2=0 \\ y_1=y_2=0. \end{cases}$$

Concludiamo così che il sistema ammette due soluzioni coincidenti: la retta t incontra la circonferenza nel punto $O(0,0)$, che risulta contato due volte; la retta t è *tangente* in O alla circonferenza.

La situazione ora esaminata diventa più espressiva se si arriva a questo caso a partire dal primo in modo dinamico (fig. 12): trasliamo la retta r, avvicinandola alla retta t, e osserviamo i corrispondenti punti di intersezione con la circonferenza. Mentre la retta r "scende", i punti di intersezione si avvicinano fra loro e, quando la retta r si sovrappone alla retta t, anche i due punti di intersezione si sovrappongono nell'unico punto O: la retta t è tangente alla circonferenza.

III) $\begin{cases} x^2+y^2-4x-4y=0 \\ y=-x-1. \end{cases}$

Risolvendo il sistema, si ottiene:

$$\begin{cases} x^2+(-x-1)^2-4x-4(-x-1)=0 \\ y=-x-1 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x^2+x^2+2x+1-4x+4x+4=0 \\ y=-x-1 \end{cases}$$

o anche

$$\begin{cases} 2x^2+2x+5=0 \\ y=-x-1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-10}}{2} \\ y=-x-1 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-9}}{2} \quad (1) \\ y=-x-1. \end{cases}$$

Si osserva subito che il sistema non ha soluzioni reali, dato che nell'espressione (1) compare la radice quadrata di un numero negativo; dunque non si hanno punti d'intersezione fra la retta e la circonferenza. Ciò corrisponde al fatto che *la retta s è esterna alla circonferenza* (fig. 13).

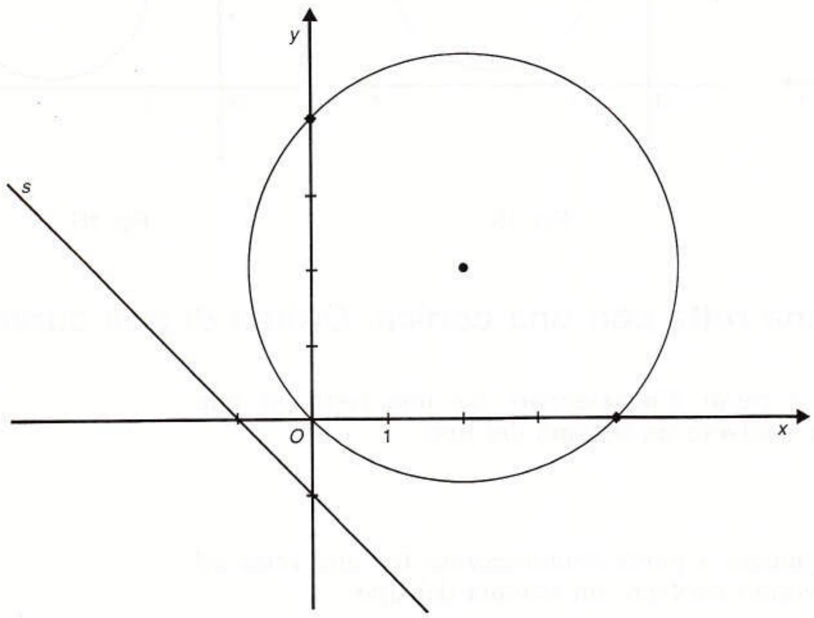


Fig. 13

I casi numerici esaminati permettono di arrivare a delle conclusioni più generali. Per determinare i punti d'intersezione fra una retta ed una circonferenza si è condotti sempre a risolvere un sistema del tipo

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ y=mx+n. \end{cases}$$

Si tratta dunque di un sistema di 2° grado[1], che ammette due soluzioni; si hanno dunque due coppie ordinate di numeri (x_1,y_1) e (x_2,y_2) che soddisfano il sistema. I casi che si possono presentare sono i seguenti.

[1] Ricordiamo che il grado di un sistema si ottiene moltiplicando fra loro i gradi delle singole equazioni.

I) **Le due soluzioni sono reali e distinte.**

Le soluzioni forniscono le coordinate dei due punti d'intersezione $A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2)$; **la retta è secante** (fig. 14).

II) **Le due soluzioni sono reali e coincidenti.**

La soluzione, contata due volte, indica le coordinate di un punto $T(x_1,y_1)$, contato due volte; **la retta è tangente** (fig. 15).

III) **Le due soluzioni non sono reali.**

Questo significa che **la retta è esterna** (fig. 16).

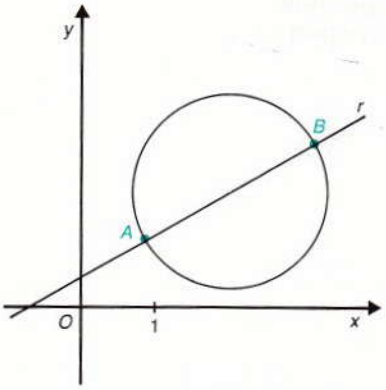


Fig. 14

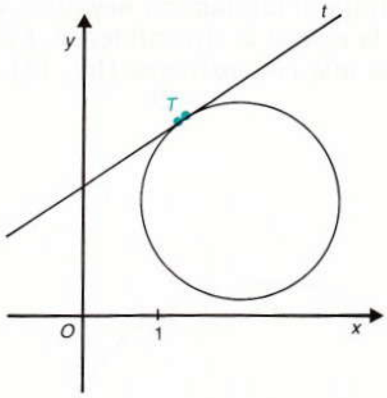


Fig. 15

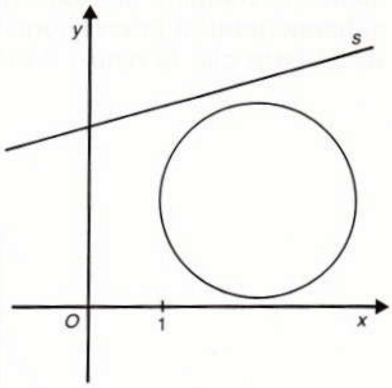


Fig. 16

5. Intersezioni di una retta con una conica. Ordine di una curva

Per determinare i punti d'intersezione fra una retta ed una parabola siamo condotti a risolvere un sistema del tipo

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=mx+n. \end{cases}$$

Analogamente, per determinare i punti d'intersezione fra una retta ed un'iperbole equilatera dovremo risolvere un sistema del tipo

$$\begin{cases} y=\dfrac{k}{x} \\ y=mx+n. \end{cases}$$

E così, per determinare i punti d'intersezione fra una retta ed un'ellisse, dobbiamo risolvere un sistema del tipo

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ y=mx+n. \end{cases}$$

Si tratta sempre di sistemi di 2° grado.

Si può dunque concludere che, in tutti i casi, la retta è secante, tangente o esterna alla curva a seconda che le soluzioni del sistema risultino reali e distinte (fig. 17), reali e coincidenti (fig. 18) o non reali (fig. 19). Se la retta è secante, si hanno due punti d'intersezione, dato che il sistema è di 2° grado.

Queste considerazioni conducono ad individuare una caratteristica comune a circonferenza, ellisse, parabola, iperbole: queste curve, tanto diverse una dall'altra, sono tutte descritte da un'equazione di 2° grado, e perciò una retta del piano può intersecarle al massimo in due punti.
Si dice che sono **curve del 2° ordine**.

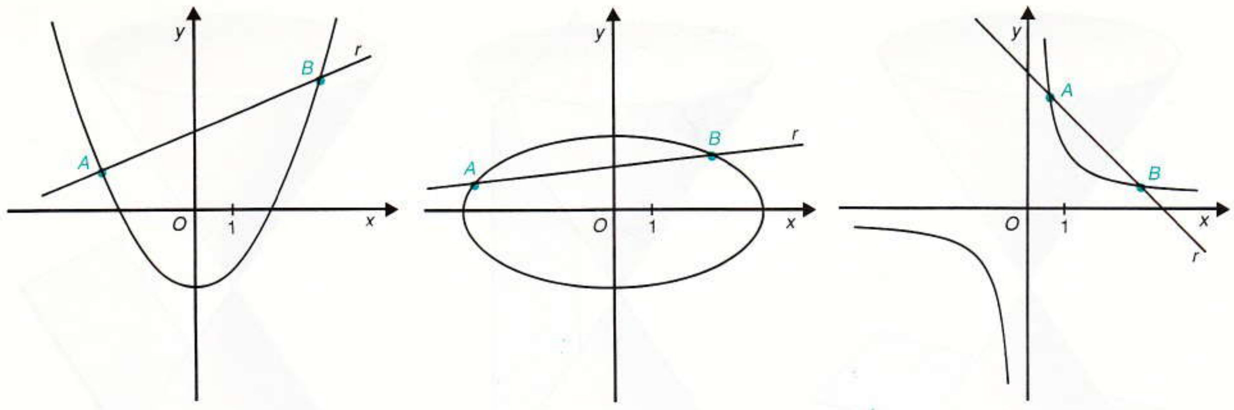


Fig. 17

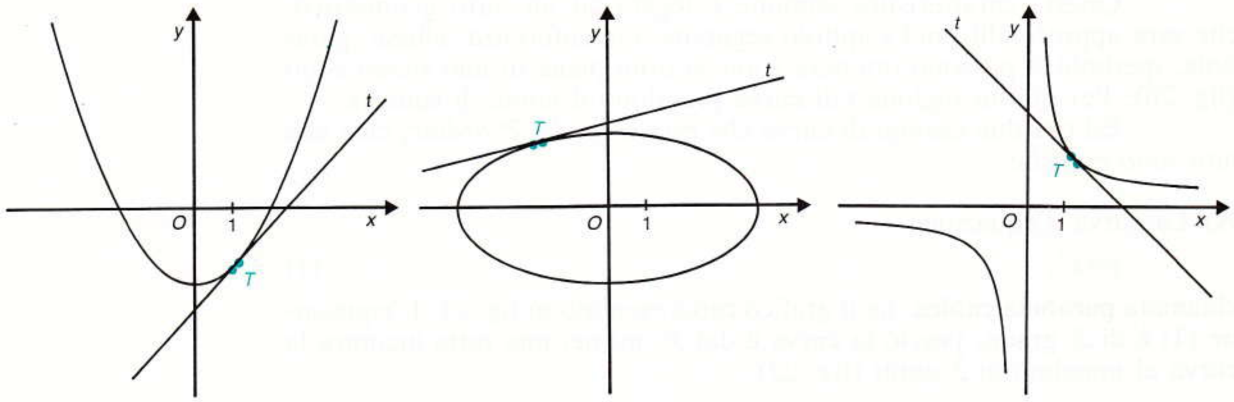


Fig. 18

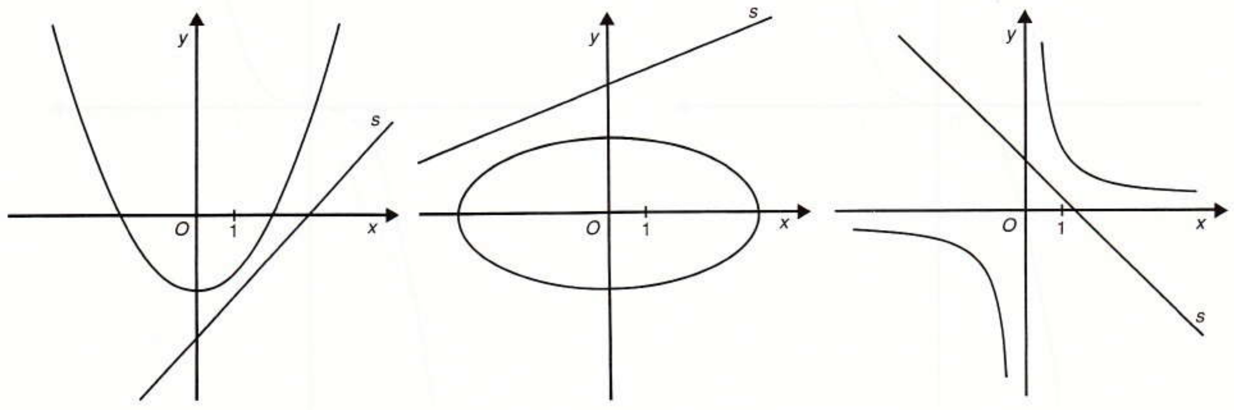


Fig. 19

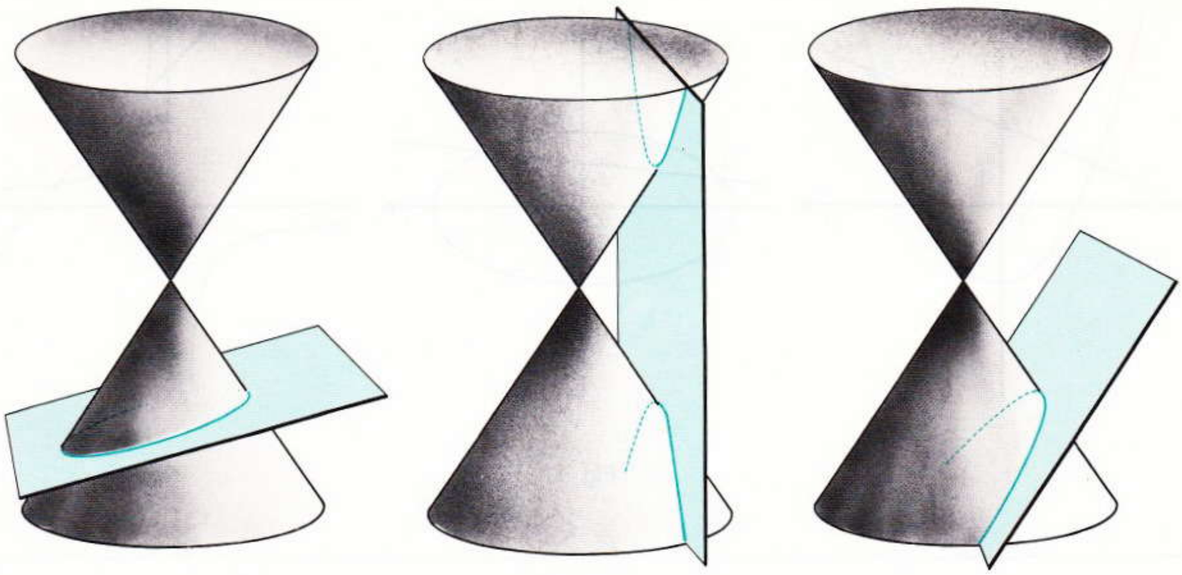


Fig. 20

Questa caratteristica comune è legata ad un fatto geometrico, che sarà approfondito nel Capitolo seguente: circonferenza, ellisse, parabola, iperbole si possono ottenere come sezioni piane di uno stesso cono (fig. 20). Per questa ragione tali curve prendono il nome di **coniche**.

Ed ora due esempi di curve che *non sono del 2° ordine*, cioè che *non sono coniche*.

A) La curva d'equazione

$$y=x^3, \qquad (1)$$

chiamata **parabola cubica**, ha il grafico rappresentato in fig. 21. L'equazione (1) è di 3° grado, perciò la curva è del 3° ordine: una retta incontra la curva al massimo in 3 punti (fig. 22).

x	y
−2	−8
−1	−1
0	0
1	1
2	8

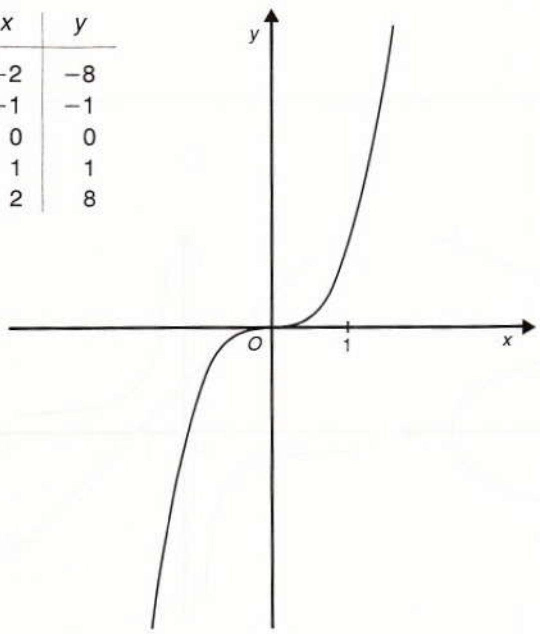


Fig. 21

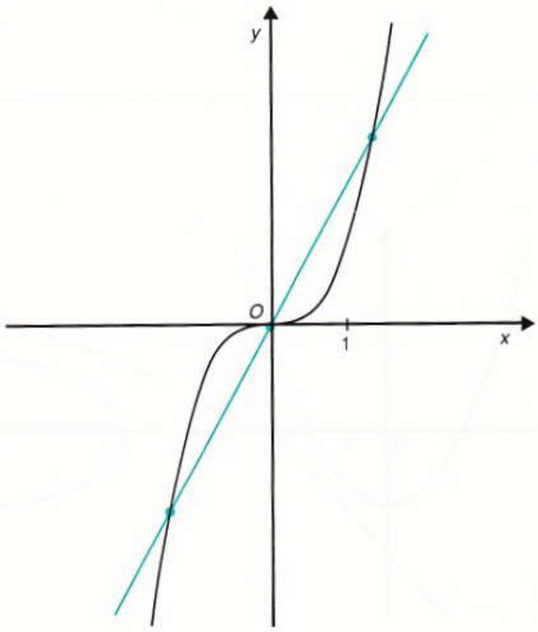


Fig. 22

x	y
-2	$\frac{1}{4}$
-1	1
$-\frac{1}{4}$	4
0	non esiste
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
2	$\frac{1}{4}$

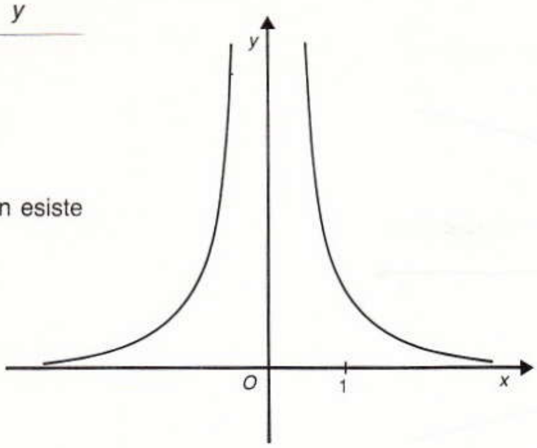


Fig. 23

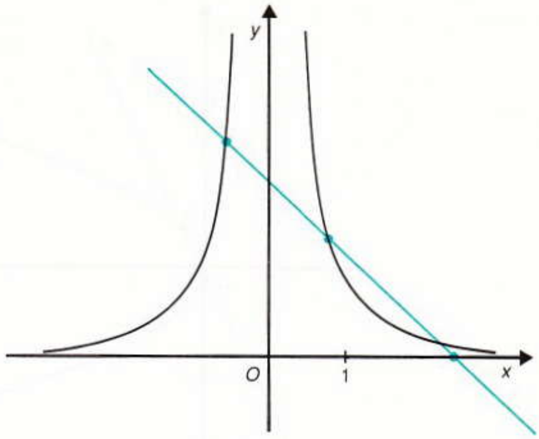


Fig. 24

B) Anche la curva d'equazione

$$y=\frac{1}{x^2} \qquad (2)$$

è del 3° ordine: infatti l'equazione (2), scritta in forma intera, diventa

$$x^2y=1;$$

si tratta dunque di un'equazione di 3° grado, dato che il monomio x^2y è di 3° grado. La curva che è rappresentata in fig. 23 è intersecata da una retta al massimo in 3 punti (fig. 24).

6. Qualche caso particolare di intersezioni di una retta con una conica. Gli asintoti dell'iperbole

Consideriamo la parabola d'equazione

$$x=y^2$$

e determiniamo i punti di intersezione della curva con la retta a d'equazione

$$y=2x.$$

Dovremo risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} x=y^2 \\ y=2x. \end{cases}$$

Basandosi, per esempio, sul metodo di sostituzione, si ha:

$$\begin{cases} y=2x \\ x=(2x)^2 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} y=2x \\ x-4x^2=0. \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} y=2x \\ x(1-4x)=0 < \begin{matrix} x_1=0 \\ 1-4x=0 \;\rightarrow\; x_2=0{,}25 \end{matrix} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} y_1=0 \\ x_1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2=0{,}5 \\ x_2=0{,}25 \end{cases}$$

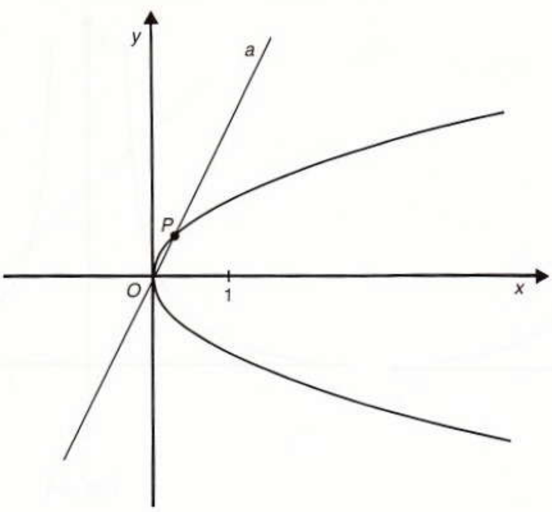


Fig. 25

si ottengono, come ci si aspettava, due punti d'intersezione: $O(0{,}0)$ e $P(0{,}25;0{,}5)$ (fig. 25).

Si incontra, invece, una situazione del tutto particolare quando si cercano i punti d'intersezione di questa parabola con l'asse delle x, che è l'asse di simmetria della curva. Si ha, infatti, il sistema

$$\begin{cases} y=0 \\ x=y^2 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=0. \end{cases} \tag{1}$$

Si ottiene dunque una sola soluzione, che non è contata due volte, dato che proviene dall'equazione (1) che è di 1° grado.

Come si spiega questa situazione? È sempre una visione dinamica che conduce ad intuire la risposta: facciamo ruotare la retta a intorno ad O (in senso orario) fino a sovrapporla all'asse delle x (fig. 26). Si osserva che, mentre la pendenza della retta diminuisce, il punto P "si allontana" lungo la parabola. Si capisce così che, quando la retta a coincide con l'asse delle x, il punto P "sfugge all'infinito".

La stessa situazione si presenta se intersechiamo la parabola con una qualunque retta parallela all'asse delle x (fig. 27).

Si intuisce che queste situazioni particolari si presentano perché la parabola è una curva aperta. Ci aspettiamo dunque situazioni analoghe nel caso dell'iperbole, che è l'altra conica aperta.

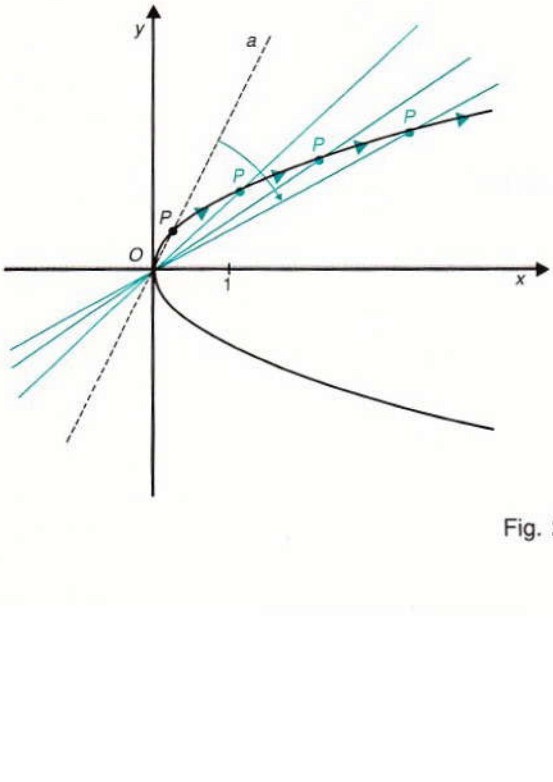


Fig. 26

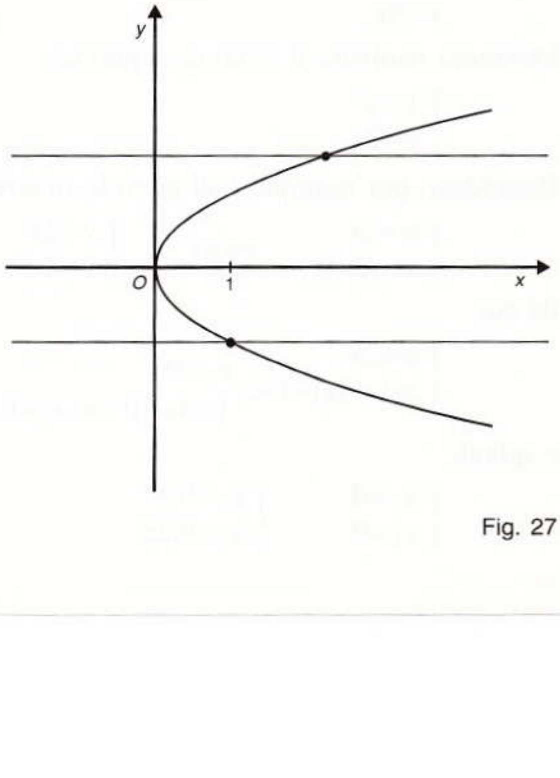


Fig. 27

Esaminiamo la fig. 28: anche ora rette parallele all'asse delle x, come la retta r d'equazione $y=1$, incontrano l'iperbole d'equazione

$$y=\frac{1}{x}$$

in un solo punto P del I quadrante, perché l'altro punto d'intersezione Q è "sfuggito all'infinito". Ma, in questo caso, si comporta nello stesso modo anche una retta parallela all'asse delle y, come la retta s d'equazione $x=-1$, rappresentata in fig. 29. Questo comportamento geometrico visualizza il fatto che un sistema di 2° grado come

$$\begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ y=1 \end{cases}$$

ha l'unica soluzione

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1; \end{cases}$$

e così, il sistema

$$\begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ x=-1 \end{cases}$$

ha l'unica soluzione

$$\begin{cases} y=-1 \\ x=-1. \end{cases}$$

Si presentano inoltre due situazioni ancora più particolari: le scopriamo disegnando delle rette per O di pendenza decrescente (fig. 30) o crescente (fig. 31).

È proprio questa visione dinamica a farci capire che gli assi cartesiani non possono incontrare l'iperbole, dato che i punti d'intersezione "sfuggono all'infinito" quando una retta per O va a coincidere con l'asse delle x o con l'asse delle y.

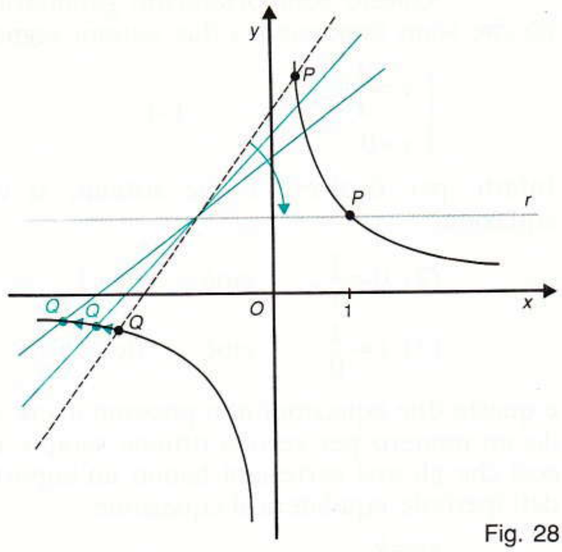


Fig. 28

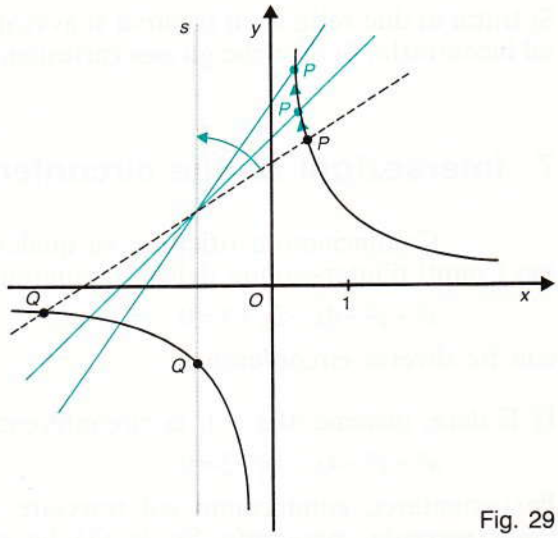


Fig. 29

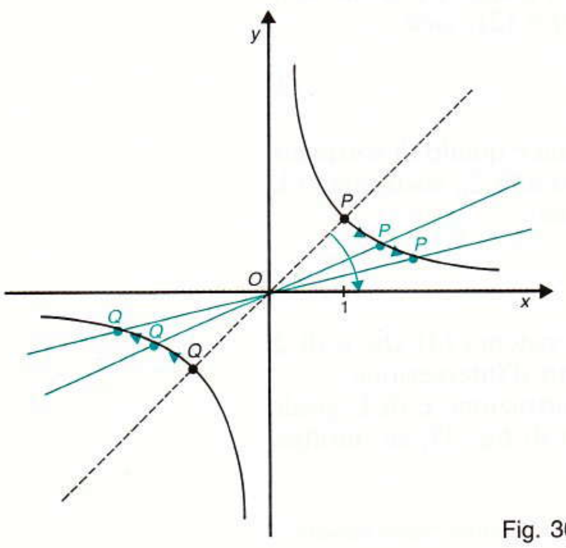


Fig. 30

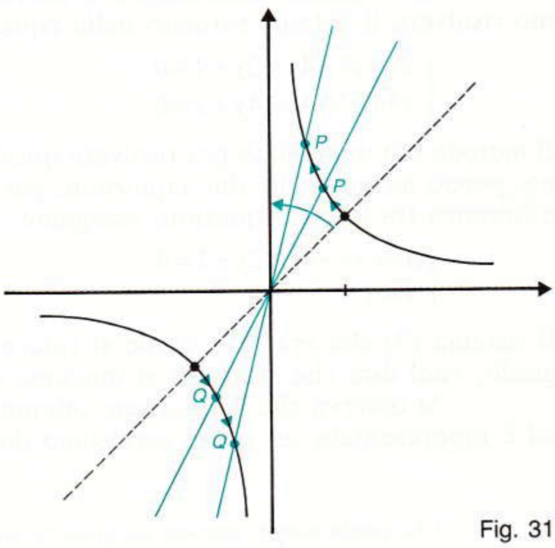


Fig. 31

Questo comportamento geometrico corrisponde al fatto algebrico che sono impossibili i due sistemi seguenti

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ y=0 \end{cases} \qquad (2) \qquad\qquad \begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ x=0 \end{cases} \qquad (3)$$

Infatti, per risolvere i due sistemi, si è condotti a risolvere le due equazioni

$$(2)\ 0=\frac{1}{x}, \qquad \text{cioè} \qquad 0x=1,$$

$$(3)\ y=\frac{1}{0}, \qquad \text{cioè} \qquad 0y=1,$$

e queste due equazioni non possono avere soluzione dato che moltiplicando un numero per zero si ottiene sempre come risultato zero. Si capisce così che gli assi cartesiani hanno un'importanza particolare per il grafico dell'iperbole equilatera d'equazione

$$xy=k.$$

Si tratta di due rette a cui la curva si avvicina sempre di più, senza riuscire ad incontrarle. Si dice che gli assi cartesiani sono **gli asintoti** dell'iperbole[1].

7. Intersezioni di due circonferenze

Cominciamo a riflettere su qualche caso numerico. Determiniamo i punti d'intersezione della circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-4x-2y+1=0 \qquad (1)$$

con tre diverse circonferenze.

I) È data, insieme alla (1), la circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-4x-4y+3=0. \qquad (2)$$

Per orientarci, cominciamo col tracciare il grafico delle due curve (v. Parte seconda, paragrafo 5): la (1) ha centro $C_1(2,1)$ e raggio $r_1=2$, mentre la (2) ha centro $C_2(2,2)$ e raggio $r_2=\sqrt{5}$ (fig. 32).

La figura mostra due soli punti d'intersezione (A e B); del resto, le due curve non possono avere più di due punti in comune, dato che per 3 punti passa una sola circonferenza.

Se vogliamo determinare le coordinate dei punti A e B, dobbiamo risolvere il sistema formato dalle equazioni (1) e (2), cioè

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y+1=0 \\ x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \qquad (3)$$

Il metodo più immediato per risolvere questo sistema è quello di sottrazione; perciò ad una delle due equazioni, per esempio alla 2ª, sostituiamo la differenza fra le due equazioni assegnate. Si ottiene:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y+1=0 \\ y=1. \end{cases} \qquad (4)$$

Il sistema (3) che era di 4° grado si riduce così al sistema (4) che è di 2° grado; vuol dire che si hanno al massimo due punti d'intersezione.

Si osserva che l'equazione ottenuta per sottrazione è di 1° grado ed è rappresentata sul piano cartesiano dalla retta di fig. 33; se, inoltre,

[1] La parola asintoto proviene dal greco "*a- symptotos*", che significa "senza incontro".

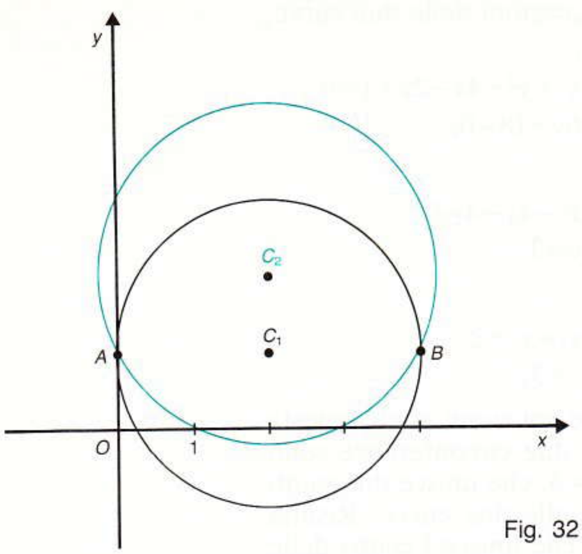


Fig. 32

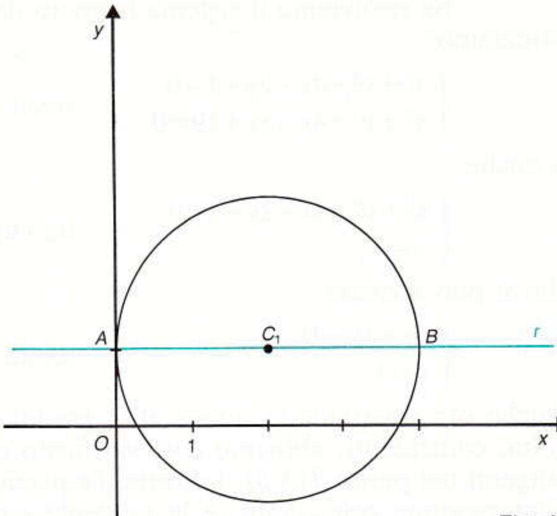


Fig. 33

consideriamo il fatto che il sistema (4) fornisce le coordinate dei punti A e B, concludiamo che la retta r deve congiungere i punti A e B.

Così, l'avere applicato il metodo di sottrazione porta a determinare A e B come punti d'intersezione fra la circonferenza (1) e la retta r. Si ottiene:

$$\begin{cases} x^2-4x=0 \\ y=1 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x(x-4)=0 \begin{matrix} \nearrow x_1=0 \\ \searrow x-4=0 \rightarrow x_2=4 \end{matrix} \\ y=1 \end{cases}$$

I punti di intersezione sono dunque:

$A(0,1)$ e $B(4,1)$.

Un'ultima osservazione: siccome le due circonferenze hanno i centri C_1 e C_2 di uguale ascissa, la retta r è perpendicolare alla retta s, che congiunge C_1 e C_2 (fig. 34).

II) Consideriamo ora, insieme alla (1) la circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-4x-8y+19=0, \tag{5}$$

che ha centro $C_3(2,4)$ e raggio $r_3=1$. La fig. 35 mostra che le due circonferenze sono tangenti.

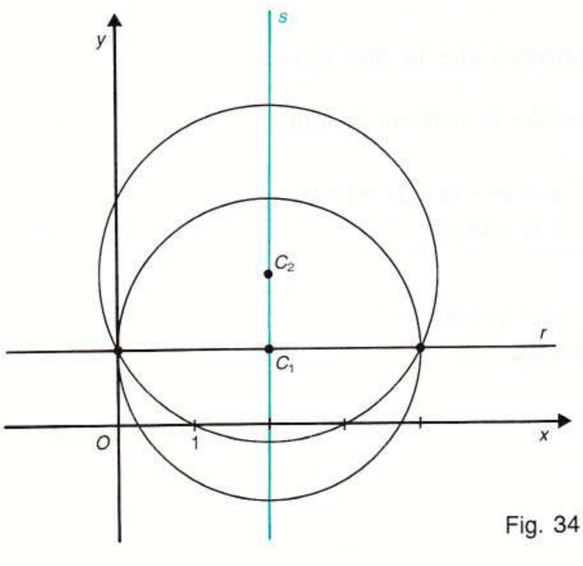


Fig. 34

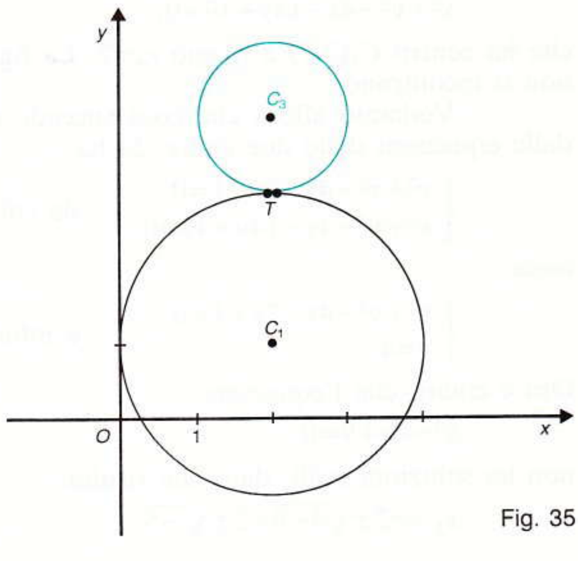


Fig. 35

Se risolviamo il sistema formato dalle equazioni delle due curve, otteniamo:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y+1=0 \\ x^2+y^2-4x-8y+19=0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x^2+y^2-4x-2y+1=0 \\ 6y-18=0, \end{cases}$$

o anche

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y+1=0 \\ y=3, \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x^2-4x+4=0 \\ y=3 \end{cases}$$

che si può scrivere

$$\begin{cases} (x-2)^2=0 \\ y=3 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x_1=x_2=2 \\ y=3. \end{cases}$$

Anche ora il sistema si riduce al 2° grado; le due soluzioni sono, questa volta, coincidenti; abbiamo così verificato che le due circonferenze sono tangenti nel punto $T(2,3)$. La retta d'equazione $y=3$, che unisce due punti d'intersezione coincidenti, è la tangente comune alle due curve. Risulta ancora che la retta t è perpendicolare alla retta s che unisce i centri delle due circonferenze (fig. 36).

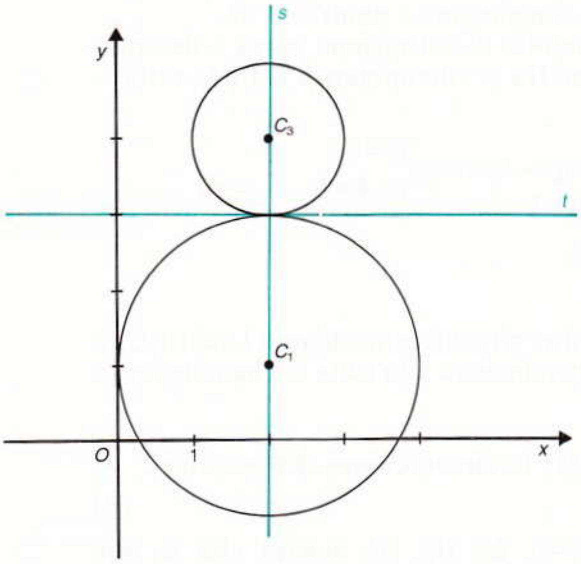


Fig. 36

III) Consideriamo, infine, insieme alla (1) la circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2-4x-14y+49=0, \tag{6}$$

che ha centro $C_4(2,7)$ e raggio $r_4=2$. La fig. 37 mostra che le due curve non si incontrano.

Vediamo allora che cosa succede risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle due curve. Si ha:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y+1=0 \\ x^2+y^2-4x-14y+49=0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x^2+y^2-4x-2y+1=0 \\ 12y-48=0, \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y+1=0 \\ y=4 \end{cases} \quad \text{e infine} \quad \begin{cases} x^2-4x+9=0 \\ y=4. \end{cases}$$

Ora è chiaro che l'equazione

$$x^2-4x+9=0$$

non ha soluzioni reali, dato che risulta:

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-9}=2\pm\sqrt{-5}.$$

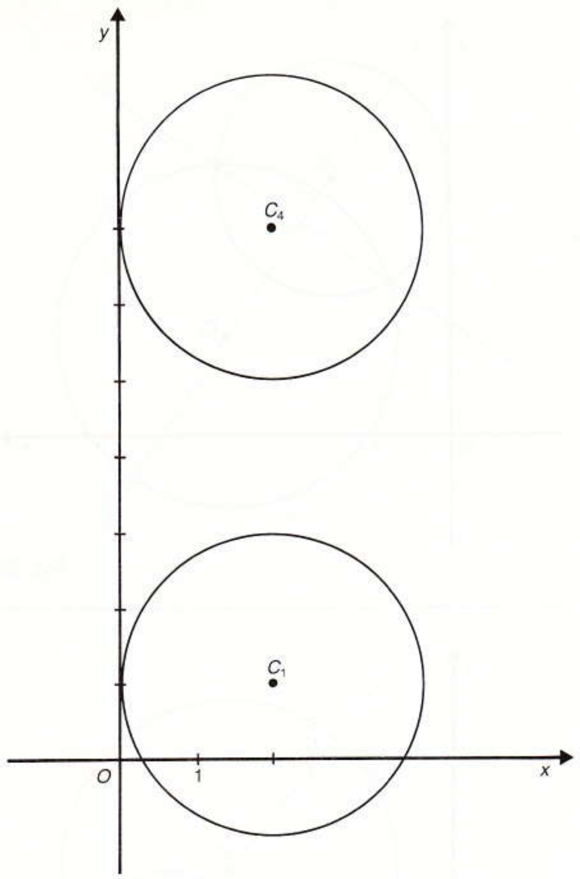


Fig. 37

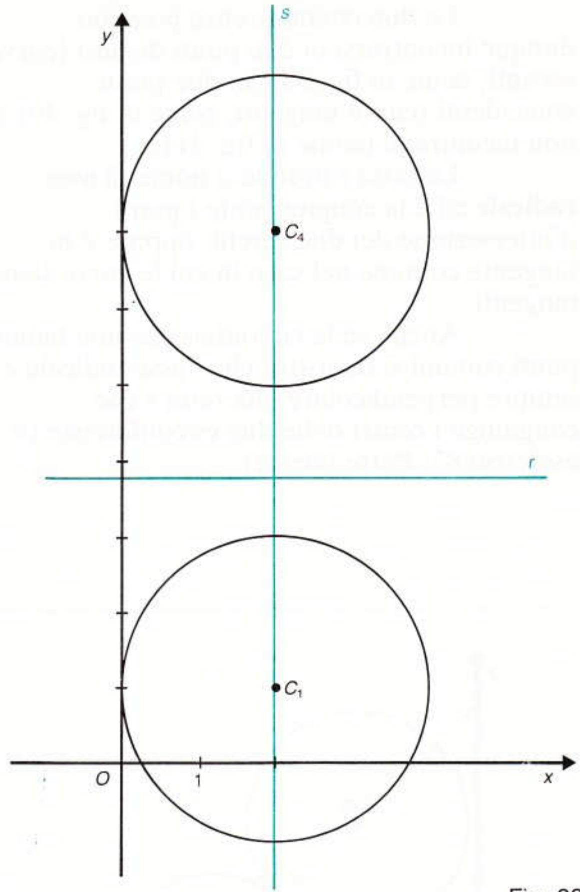


Fig. 38

Il sistema non ha dunque soluzioni reali, come ci si aspettava. È interessante notare (fig. 38) che la retta r d'equazione

$$y=4$$

risulta ancora perpendicolare alla retta s che congiunge i centri delle due circonferenze, anche se i punti d'intersezione A e B non esistono...

Le considerazioni che abbiamo svolto a partire da casi numerici possono essere facilmente generalizzate al caso in cui siano assegnate due circonferenze qualunque, d'equazione

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \qquad \text{e} \qquad x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0.$$

Per determinare le coordinate dei punti di intersezione fra le due curve, si considera il sistema seguente:

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0 \end{cases} \tag{7}$$

Risolvendo il sistema per sottrazione, si è condotti a scrivere il sistema equivalente

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ (a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0. \end{cases}$$

E ora si osserva che l'equazione ottenuta per sottrazione è sempre di 1° grado e rappresenta quindi una retta r, di cui si può tracciare facilmente il grafico esplicitando la y.

Si conclude che il problema di determinare le intersezioni di due circonferenze equivale al problema di determinare le intersezioni di una circonferenza con una retta.

Le due circonferenze possono dunque incontrarsi in due punti distinti (curve secanti, come in fig. 39), in due punti coincidenti (curve tangenti, come in fig. 40) o non incontrarsi (come in fig. 41).

La retta r prende il nome di **asse radicale** ed è la congiungente i punti d'intersezione dei due cerchi, oppure è la tangente comune nel caso in cui le curve siano tangenti.

Anche se le circonferenze non hanno punti comuni si dimostra che l'asse radicale è sempre perpendicolare alla retta s che congiunge i centri delle due circonferenze (v. esercizio 82, Parte quarta)

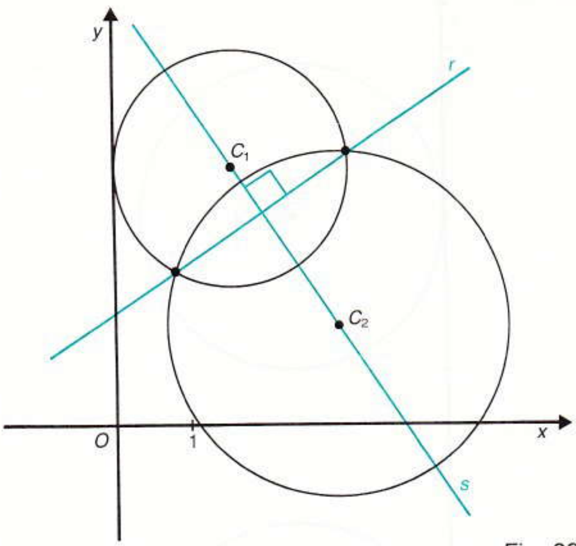


Fig. 39

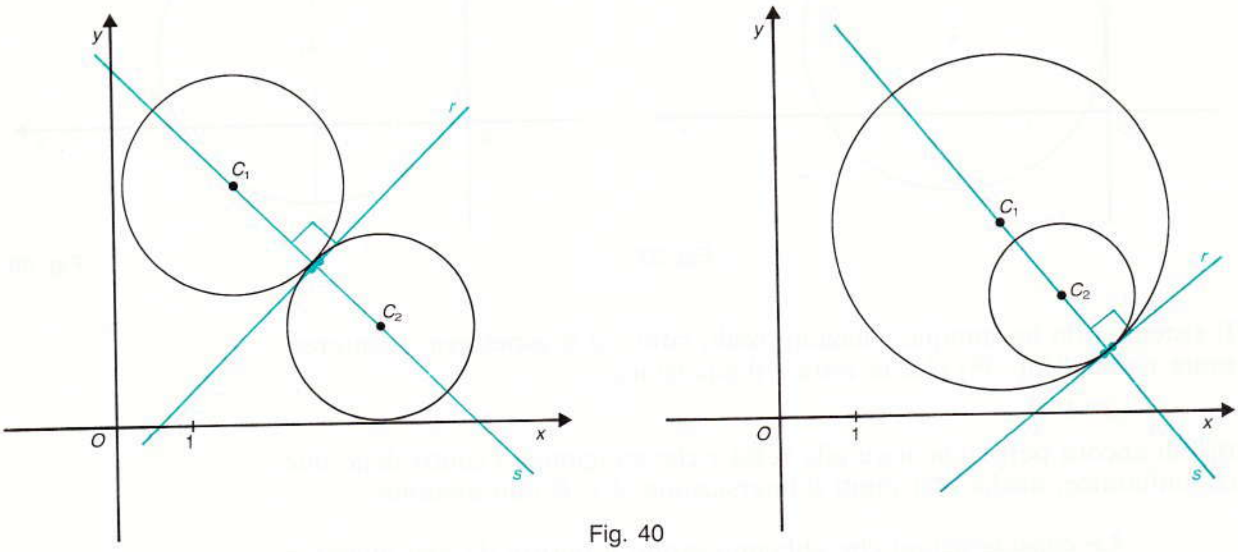


Fig. 40

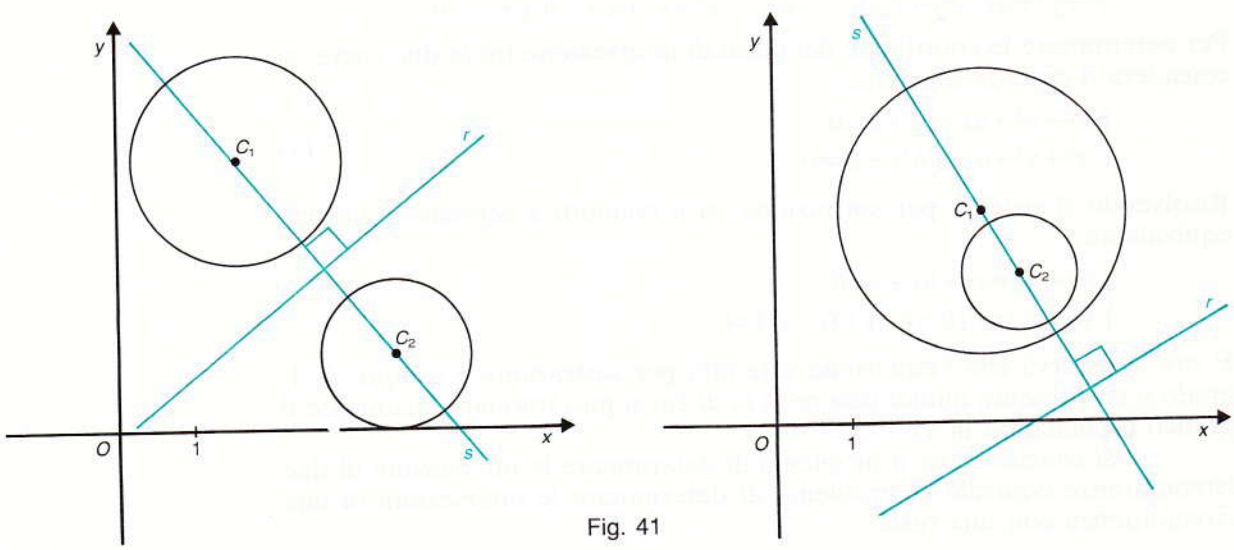


Fig. 41

8. Intersezioni di due coniche

L'intersezione di due circonferenze è solo un caso particolare di un problema più generale: determinare i punti d'intersezione di due coniche (circonferenza, ellisse, parabola, iperbole).

È ancora una volta un esempio numerico che conduce a scoprire quali situazioni si possono presentare. Consideriamo l'ellisse e la circonferenza descritte dalle equazioni seguenti

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \qquad \text{e} \qquad x^2+y^2=7.$$

La circonferenza ha centro in $O(0,0)$ e raggio $r=\sqrt{7}$; l'ellisse ha centro in O e i semiassi lunghi 4 e 2 (fig. 42).

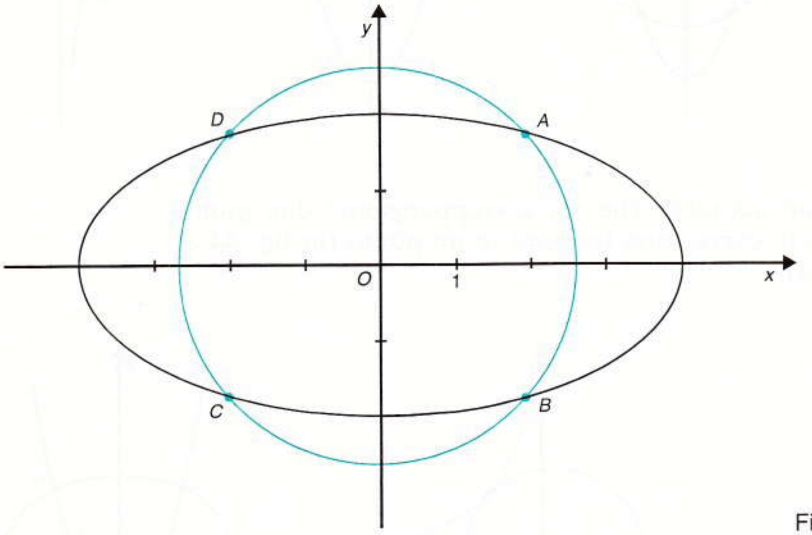


Fig. 42

La figura mostra quattro punti d'intersezione; ciò corrisponde al fatto che il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1 \\ x^2+y^2=7 \end{cases}$$

è di 4° grado, e che, ora, non si riesce a ricondurlo ad un sistema di 2° grado. Valendosi del metodo di sostituzione, si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(7-x^2)}{4}=1 \\ y^2=7-x^2 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} x^2+4(7-x^2)=16 \\ y^2=7-x^2, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} -3x^2+12=0 \\ y^2=7-x^2 \end{cases} \qquad \text{o anche} \qquad \begin{cases} x^2=4 \rightarrow x_{1,2}=\pm 2 \\ y^2=7-x^2 \end{cases}$$

Si ottengono dunque le soluzioni seguenti:

$$\begin{cases} x_1=2 \\ y^2=3 \rightarrow y_{1,2}=\pm\sqrt{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=-2 \\ y^2=3 \rightarrow y_{3,4}=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

I punti d'intersezione hanno le coordinate

$$A(2,\sqrt{3}), \quad B(2,-\sqrt{3}), \quad C(-2,-\sqrt{3}), \quad D(-2,\sqrt{3}).$$

Si capisce che sono i vertici di un rettangolo, data la simmetria delle due curve rispetto agli assi cartesiani.

Il procedimento seguito suggerisce delle considerazioni algebriche più generali, che possono essere facilmente visualizzate: le coordinate dei punti d'intersezione di due coniche si trovano sempre risolvendo un sistema di 4° grado, e perciò due coniche hanno sempre, al massimo, 4 punti in comune (qualche esempio è illustrato in fig. 43).

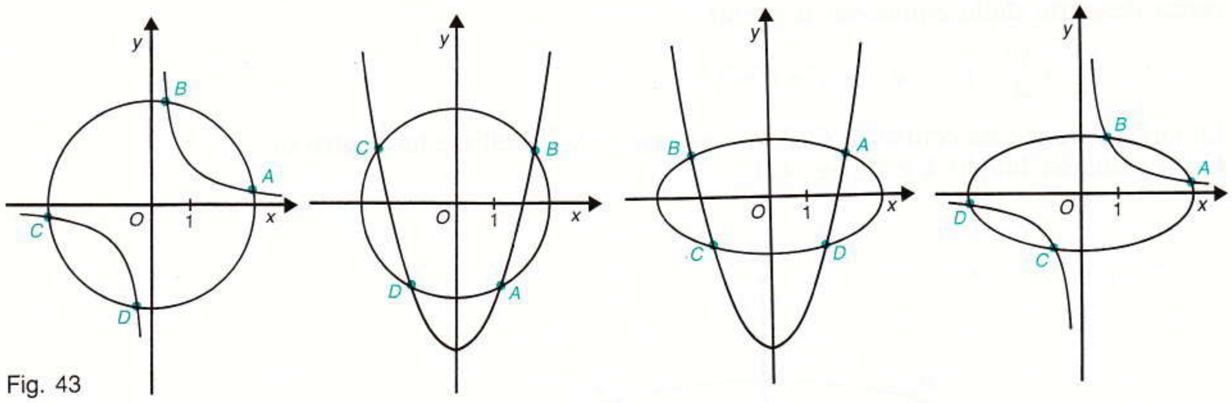


Fig. 43

Naturalmente può accadere che "si sovrappongano" due punti d'intersezione; in tal caso le curve sono tangenti in un punto (in fig. 44 è illustrato qualche esempio).

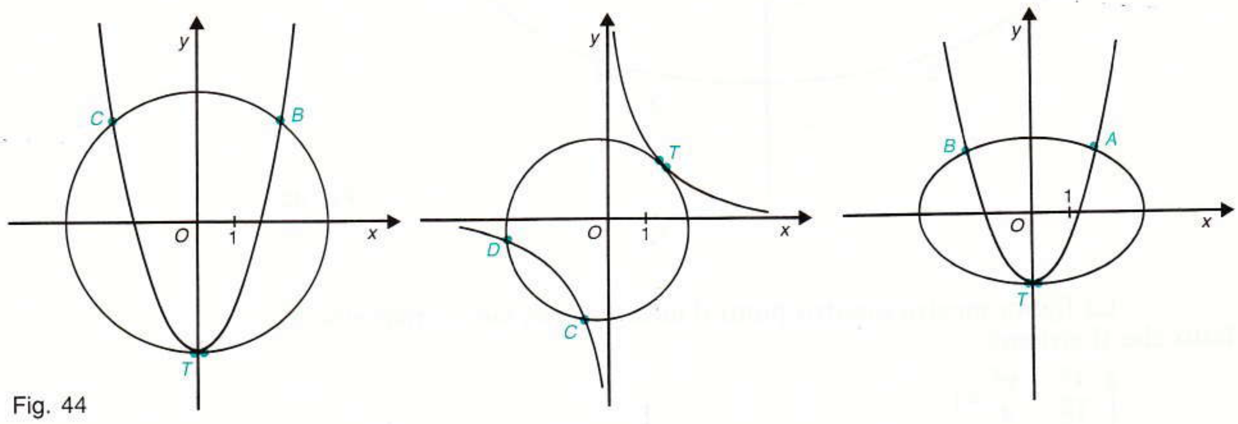


Fig. 44

E può anche accadere che i quattro punti coincidano due a due: le coniche sono bitangenti, cioè si toccano i due punti (in fig. 45 qualche esempio).

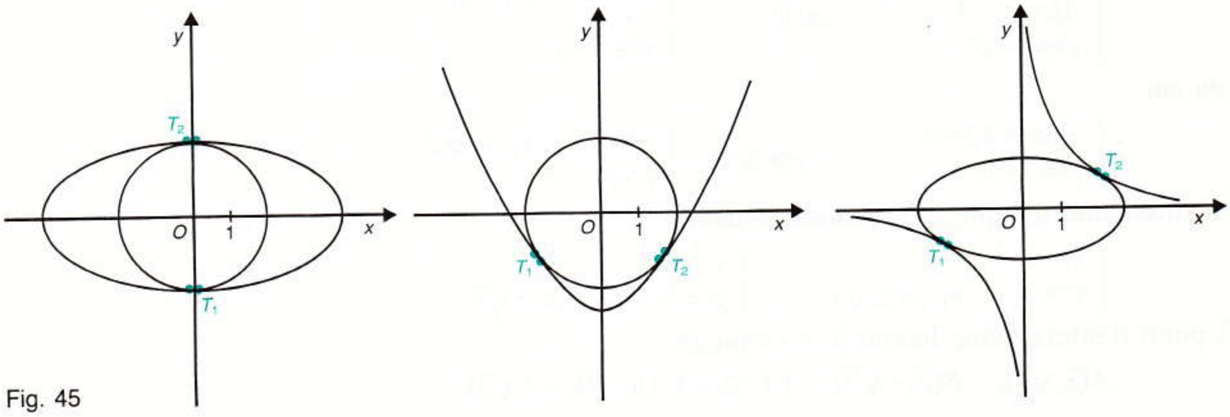


Fig. 45

Può anche accadere che, risolvendo il sistema, non si trovino soluzioni reali e, in questo caso, le due curve non si incontrano (in fig. 46 è illustrato qualche esempio).

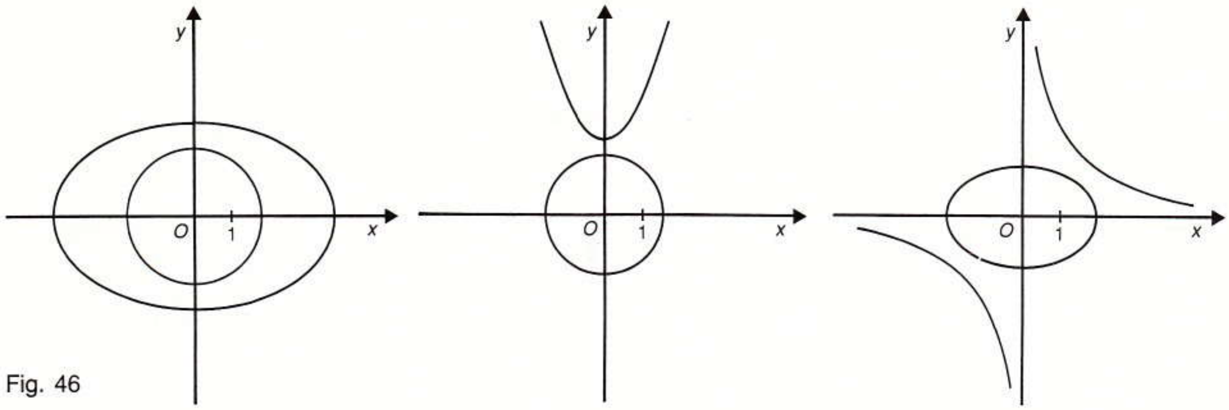


Fig. 46

E, ancora, possiamo trovare due soli punti reali d'intersezione: le curve si incontrano allora in due soli punti (fig. 47), che possono anche coincidere (fig. 48).

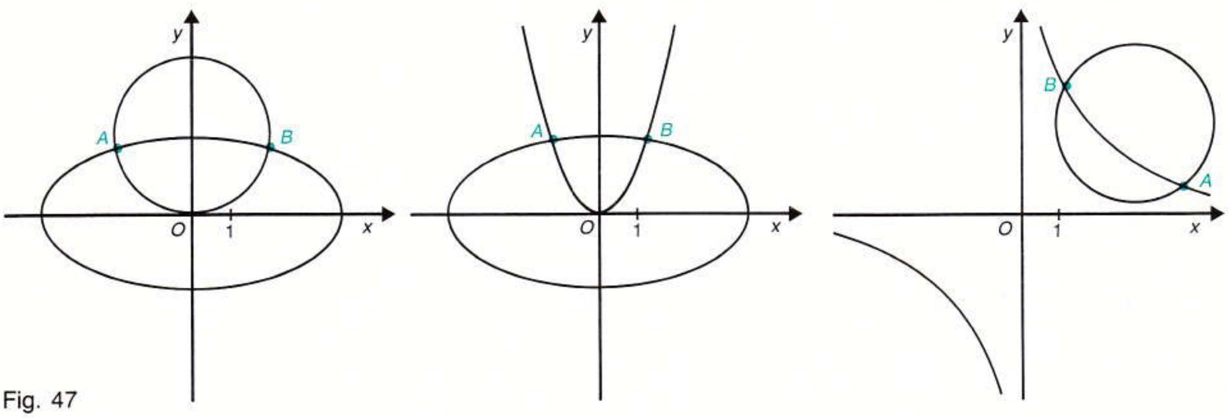


Fig. 47

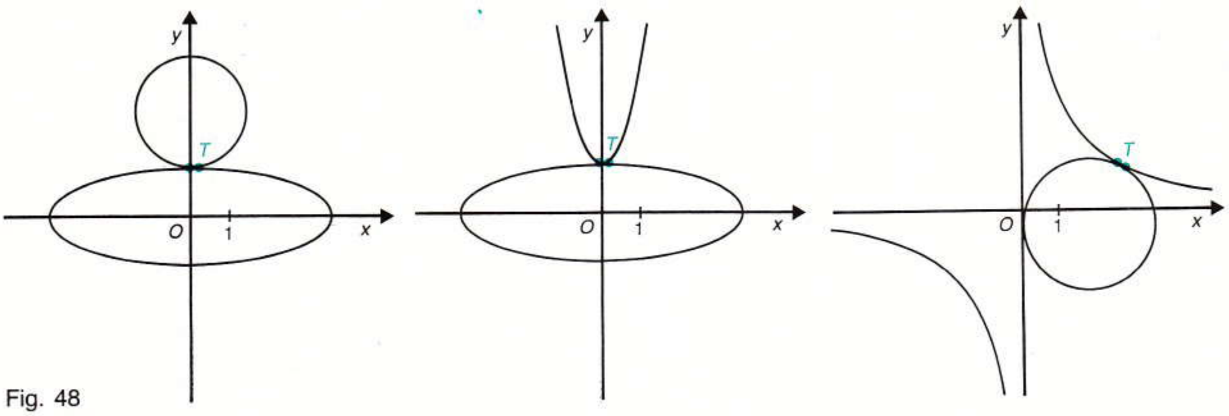


Fig. 48

1. Parte quinta
Fasci di curve

Abbiamo visto nelle pagine precedenti come la geometria analitica riesca ad esprimere con un linguaggio algebrico delle proprietà geometriche:

- *un punto* è rappresentato da una coppia ordinata di numeri;
- *una retta* è rappresentata da un'equazione di 1° grado nelle variabili x ed y;
- *una conica* è rappresentata da un'equazione di 2° grado nelle variabili x ed y.

In questo modo, quando si vuole scoprire, per esempio, se una retta è secante, tangente o esterna ad una conica, si risolve un sistema invece di tracciare un disegno. Si sostituisce così un procedimento algebrico ad uno geometrico.

Ma con la geometria analitica si può ottenere molto di più: possono "essere tradotti in equazione" anche particolari insiemi di curve.

1. Fasci di rette

I primi casi di cui ci occuperemo sono due insiemi di rette:

A) *fascio di rette parallele*, cioè l'insieme di tutte le rette parallele ad una data retta r;

B) *fascio di rette per un punto*, cioè l'insieme di tutte le rette che passano per un dato punto P.

Esaminiamo questi due casi separatamente.

A) Fascio di rette parallele

Cominciamo col disegnare una retta ed alcune parallele a questa; in fig. 1 abbiamo disegnato la retta r d'equazione

$$y=2x-1$$

e le rette a, b, c, ad essa parallele, di equazione:

$$(a)\ y=2x-2, \qquad (b)\ y=2x, \qquad (c)\ y=2x+\sqrt{2}.$$

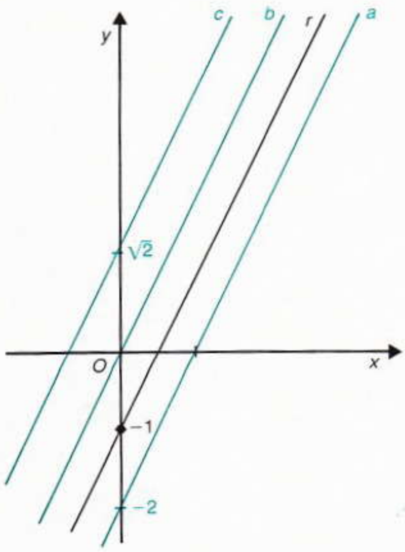


Fig. 1

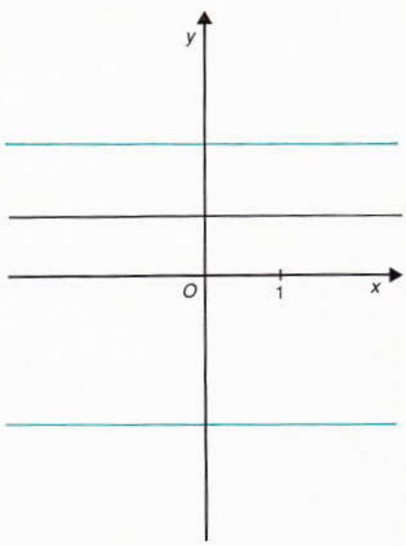


Fig. 2

È facile immaginare il piano "solcato" dalle infinite rette del fascio; se associamo ad ogni retta la sua equazione, otteniamo infinite equazioni che presentano tutte pendenza 2 e termine noto che varia al variare della retta. Tutte queste equazioni possono essere riunite nell'unica espressione

$$y=2x+k, \tag{1}$$

dove la lettera k, che può assumere qualunque valore reale, prende il nome di *parametro*.

L'equazione (1) diventa più espressiva se è interpretata dinamicamente: basta immaginare una retta di pendenza 2 che si sposta parallelamente a se stessa; varia l'ordinata k del suo punto d'intersezione con l'asse delle y.

È chiaro che quanto si è detto vale per qualunque retta di pendenza a. Quindi un fascio di rette parallele è sempre rappresentato da un'equazione del tipo

$$y=ax+k \tag{2}$$

dove a è un numero fisso e k è un parametro che può assumere qualunque valore reale.

L'equazione (2) comprende come caso particolare il fascio di parallele all'asse delle x (fig. 2): si tratta di tutte le rette che hanno pendenza nulla e corrispondono dunque all'equazione

$$y=k.$$

Per descrivere, invece, il fascio di rette parallele all'asse delle y (fig. 3), non possiamo ricorrere all'idea di pendenza; perciò ricordiamo che su una retta parallela all'asse delle y si trovano tutti i punti che hanno un data ascissa. Ecco l'equazione di alcune rette di questo fascio:

$$\dots\ x=-3, \qquad x=-0{,}5, \qquad x=0, \qquad x=\sqrt{2},\ \dots$$

Queste equazioni possono essere tutte riunite nell'espressione

$$x=k.$$

B) Fascio di rette per un punto

Fissiamo ora l'attenzione su un qualunque punto P del piano e disegnamo alcune rette che passano per P ed hanno diversa pendenza (vedi Parte seconda, paragrafo 2). In fig. 4 abbiamo, per esempio,

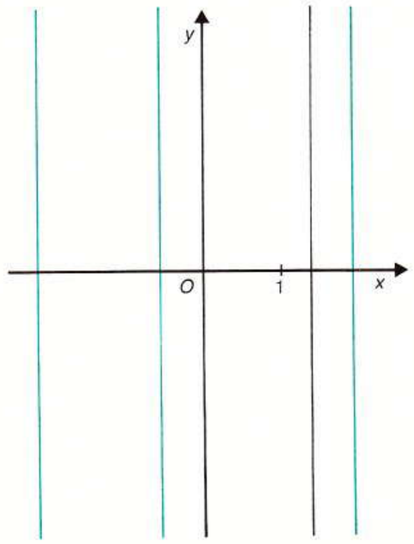


Fig. 3

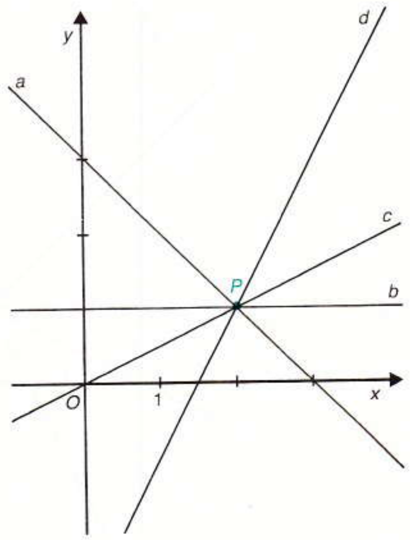


Fig. 4

indicato il punto $P(2,1)$ ed abbiamo disegnato le rette a, b, c, d che hanno le equazioni seguenti

(*a*) $y-1=-1(x-2)$,
(*b*) $y-1=0(x-2)$,
(*c*) $y-1=0{,}5(x-2)$.
(*d*) $y-1=2(x-2)$.

È facile immaginare il piano "riempito" dalle infinite rette del fascio; così, se associamo ad ogni retta la sua equazione, otteniamo infinite equazioni che possono essere riunite nell'unica espressione

$$y-1=h(x-2) \tag{3}$$

dove il parametro h indica la pendenza, che varia al variare della retta. Anche in questo caso è più espressiva una "lettura dinamica" della formula (3): si immagina una retta che ruota nel piano, mantenendosi "inchiodata" nel punto P.

Proprio queste considerazioni conducono a scoprire che la formula (3) non rappresenta tutte le rette del piano passanti per P. Osserviamo, infatti, la fig. 5, in cui è rappresentata una retta per P che ruota in senso antiorario, a partire dalla posizione a: la pendenza h diventa sempre più grande, ma, quando la retta assume la posizione w, in cui è parallela all'asse delle y, non può più essere descritta dall'equazione (3). Infatti il parametro h indica la pendenza della retta ed è proprio la pendenza, come già si è detto, che perde significato quando una retta è parallela all'asse delle y.

Possiamo così arrivare a delle conclusioni di carattere generale: fissato un qualunque punto $P(a,b)$ del piano, si può descrivere con un'unica equazione l'insieme di tutte le rette passanti per P. Si ha:

$$y-b=h(x-a) \tag{4}$$

dove il parametro h, che può assumere qualunque valore reale, indica la pendenza di ogni retta.

La formula (4) descrive tutte le rette passanti per P, *esclusa la retta parallela all'asse delle y*; questa retta ha infatti l'equazione

$$x=a,$$

che non può essere ottenuta dalla (4) per nessun valore di h.

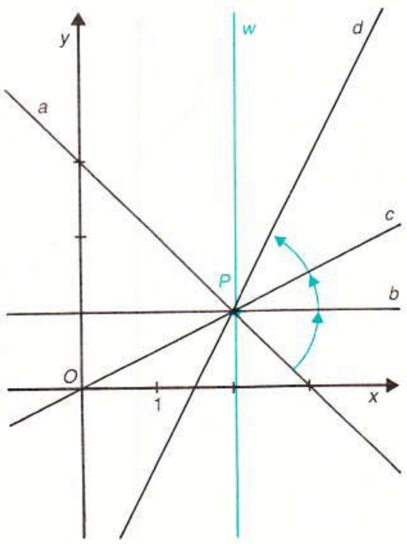


Fig. 5

2. Condurre da un punto la parallela ad una retta data. Osservazioni sui fasci di rette

Vediamo ora un problema che si risolve basandosi sull'equazione di un fascio di rette. È data la retta r d'equazione

$$y=-2x+4;$$

si vuole determinare l'equazione della retta s, parallela ad r e passante per $A(-1,3)$. Questo problema può essere risolto seguendo due procedimenti alternativi.

A) Fissiamo prima di tutto l'attenzione sul fatto che la retta s deve essere parallela a r; scriviamo perciò l'equazione del fascio di rette parallele a r:

$$y=-2x+k.$$

La fig. 6 rappresenta alcune rette di questo fascio. Fra tutte queste rette dobbiamo ora scegliere la retta s che passa per $A(-1,3)$; dobbiamo perciò trovare un opportuno valore di k.

È facile trovare il valore di k ricordando che un punto si trova su una retta solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione della retta. Perciò, per la retta s, deve risultare

$$3=-2(-1)+k, \qquad \text{ossia} \qquad k=1.$$

La retta s ha dunque equazione

$$y=-2x+1.$$

L'abbiamo rappresentata in fig. 7.

B) Fissiamo prima di tutto l'attenzione sul fatto che s deve passare per $A(-1,3)$; scriviamo allora l'equazione del fascio di rette per A; si ha:

$$y-3=h(x+1).$$

La fig. 8 visualizza alcune rette di questo fascio. Fra tutte queste rette dobbiamo ora scegliere la retta che sia parallela ad r; dobbiamo perciò trovare quel valore di h per cui la retta ha la stessa pendenza di r; sarà dunque:

$$h=-2.$$

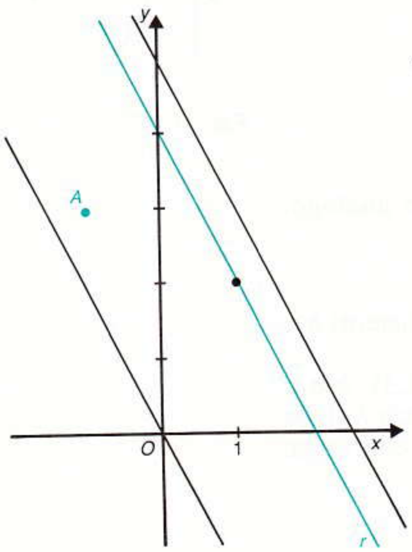


Fig. 6

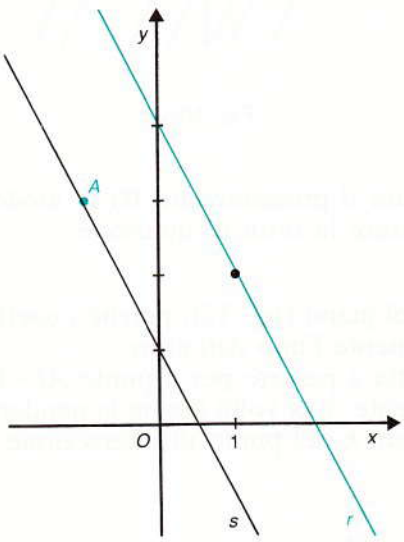


Fig. 7

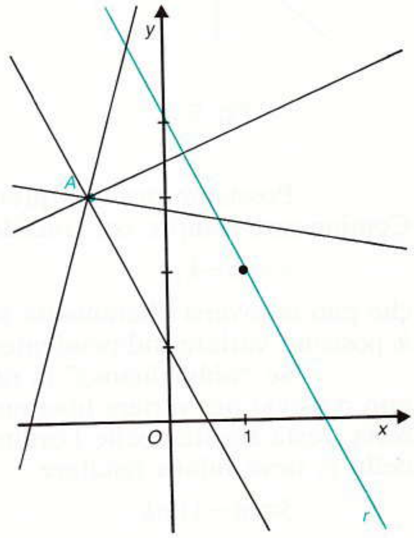


Fig. 8

Si ha dunque:

$$y-3=-2(x+1)$$

ossia

$$y=-2(x+1)+3,$$

da cui

$$y=-2x+1.$$

Si è ottenuta, ovviamente, la stessa equazione che nel caso A).

È interessante ora confrontare i due procedimenti, interpretandoli da un punto di vista dinamico.

Pensiamo ad una retta libera di muoversi nel piano (fig. 9): sarà descritta da un'equazione del tipo

$$y=hx+k,$$

dove i coefficienti h e k possono variare comunque.

Nel procedimento (A) abbiamo cominciato col fissare la pendenza h; scrivendo l'equazione

$$y=-2x+k,$$

abbiamo indicato una retta che non è più libera di muoversi comunque, ma può solamente traslare, mantenendo quindi la stessa pendenza (fig. 10). Se poi "obblighiamo" la retta a passare per il punto $A(-1,3)$ (fig. 11), fissiamo anche il valore di k e la retta resta "bloccata" nella posizione descritta dall'equazione

$$y=-2x+1.$$

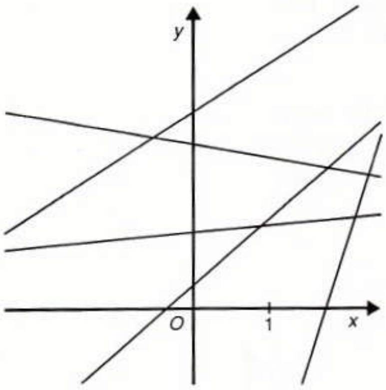


Fig. 9

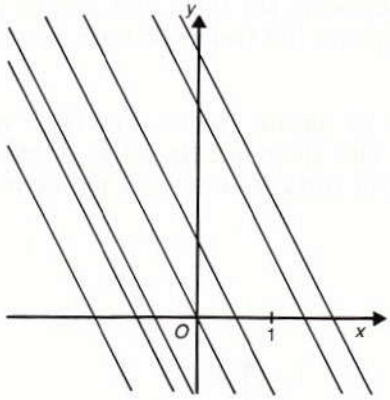


Fig. 10

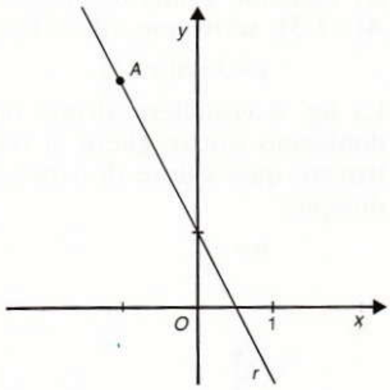


Fig. 11

Possiamo ora interpretare il procedimento B) in modo analogo. Cominciamo sempre col considerare la retta d'equazione

$$y=hx+k,$$

che può muoversi liberamente nel piano (fig. 12), perché i coefficienti h e k possono variare indipendentemente l'uno dall'altro.

Se "obblighiamo" la retta a passare per il punto $A(-1,3)$, h e k non possono più variare liberamente: una volta fissata la pendenza h della retta, resta fissata anche l'ordinata k del punto di intersezione con l'asse delle y; deve infatti risultare:

$$3=h(-1)+k,$$

ossia

$$k=3+h.$$

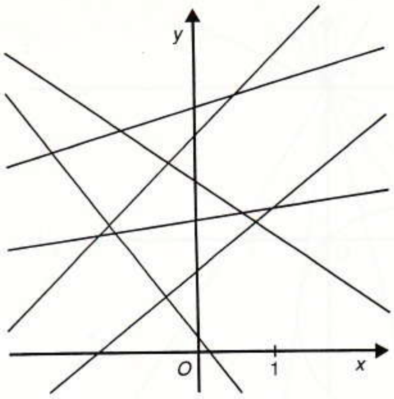


Fig. 12

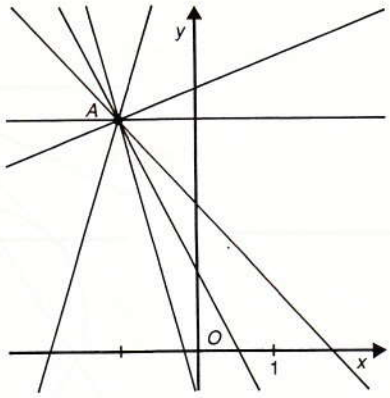


Fig. 13

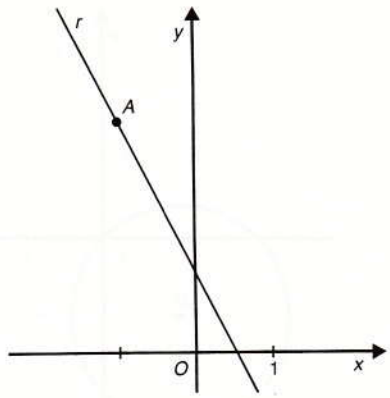


Fig. 14

L'equazione della retta diventa dunque:

$$y=hx+3+h,$$

ossia

$$y=h(x+1)+3,$$

o anche

$$y-3=h(x+1).$$

Abbiamo così ritrovato, per altra via, l'equazione del fascio descritto da una retta che è libera solo di ruotare, mantenendosi "inchiodata" nel punto A (fig. 13).

Così, quando fissiamo la pendenza -2, "costringiamo" la retta a fermarsi (fig. 14) nella posizione descritta dall'equazione

$$y=-2x+1.$$

Dalle considerazioni ora svolte possiamo arrivare alle seguenti conclusioni: una retta libera di muoversi comunque sul piano è descritta dall'equazione

$$y=hx+k,$$

dove i *due parametri* h *e* k variano indipendentemente l'uno dall'altro. Per fissare una particolare retta del piano occorrono **due condizioni**, che determinino sia il valore di h che quello di k. Infatti è unica la retta che soddisfa, per esempio, le seguenti coppie di condizioni:

- passare per un punto **ed** avere pendenza fissata;
- passare per due punti P **e** Q (il che equivale a passare per uno dei due punti ed avere la pendenza fissata dalla pendenza del segmento PQ).

Se, invece, diamo una sola condizione (avere pendenza fissata **o** passare per un punto), lasciamo ancora una "libertà di movimento" alla retta, che, in tal modo, descrive un fascio.

3. Rette per un punto tangenti ad una conica

Esaminiamo ora un altro problema che si risolve basandosi sulla nozione di fascio di rette. Cominciamo col considerare un primo caso numerico.

1) È data la circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2+2x+2y=0$$

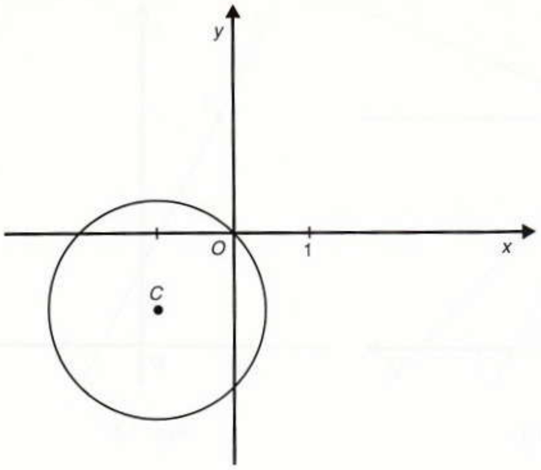


Fig. 15

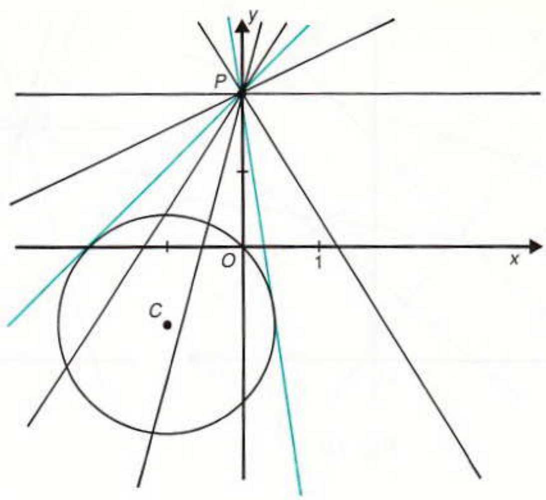


Fig. 16

e si vogliono determinare le rette che passano per il punto $P(0,2)$ e sono tangenti alla curva.

Per orientarci, disegnamo prima di tutto la circonferenza che ha centro $C(-1,-1)$ e raggio $r=\sqrt{2}$ (fig. 15). Osserviamo, poi, (fig. 16) che, fra le infinite rette che passano per P, alcune sono secanti, altre esterne; il grafico mostra infine due rette tangenti. Come determinare le equazioni di queste rette tangenti?

Ricordiamo che l'insieme di tutte le rette passanti per $P(0,2)$, è descritto dall'equazione

$$y-2=h(x-0),$$

ossia

$$y=hx+2.$$

Ogni retta di questo fascio incontra la circonferenza al massimo in due punti, di cui si possono determinare le coordinate x ed y risolvendo il sistema seguente:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y=0 \\ y=hx+2. \end{cases} \quad (1)$$

È chiaro che il sistema fornisce soluzioni diverse a seconda del valore di h scelto, cioè a seconda della retta considerata. Tuttavia, in tutti i casi, dovremo svolgere calcoli analoghi, risolvendo il sistema con il metodo di sostituzione. Si ha:

$$\begin{cases} x^2+(hx+2)^2+2x+2(hx+2)=0 \\ y=hx+2 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x^2+h^2x^2+4hx+4+2x+2hx+4=0 \\ y=hx+2. \end{cases}$$

Ora, per ottenere le ascisse dei punti d'intersezione, occorre risolvere l'equazione di 2° grado nell'incognita x. È perciò opportuno scrivere l'equazione nella forma abituale

$$ax^2+bx+c=0.$$

Si ha:

$$\begin{cases} (1+h^2)x^2+(6h+2)x+8=0 \\ y=hx+2 \end{cases}$$

L'equazione di 2° grado ora ottenuta presenta i seguenti coefficienti:

$$a=1+h^2, \qquad b=6h+2, \qquad c=8,$$

e può essere sempre risolta, valendosi della formula[1]

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a},$$

dove abbiamo scritto:

$$\Delta=b^2-4ac.$$

Si ha:

$$x_{1,2}=\frac{-(6h+2)\pm\sqrt{\Delta}}{2(1+h^2)},$$

con

$$\Delta=(6h+2)^2-4(1+h^2)8.$$

Si osserva subito che le soluzioni dell'equazione dipendono dal segno che assume il discriminante Δ. Infatti si sa che:

- l'equazione ha due soluzioni reali e distinte x_1 e x_2, se risulta $\Delta>0$; in tal caso la retta interseca la circonferenza in due punti d'ascissa x_1 e x_2;
- l'equazione ha due soluzioni coincidenti $x_1=x_2$, se risulta $\Delta=0$; in questo caso la retta risulta tangente alla circonferenza nel punto che ha ascissa $x_1=x_2$;
- l'equazione non ha soluzioni reali, se risulta $\Delta<0$; in tal caso la retta non incontra la circonferenza.

Si scopre così il procedimento algebrico per determinare le rette tangenti: si debbono calcolare i valori di h, per cui risulta

$$\Delta=0,$$

ossia

$$(6h+2)^2-4(1+h^2)8=0.$$

Si ottiene, svolgendo i calcoli indicati:

$$4h^2+24h-28=0,$$

ossia

$$h^2+6h-7=0.$$

I valori di h cercati sono dati dunque dalla formula:

$$h_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36+28}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{-6\pm 8}{2}.$$

Si ha:

$$h_1=-7 \qquad \text{e} \qquad h_2=1.$$

Le tangenti richieste sono quindi le due rette del fascio

$$y=hx+2$$

che hanno pendenza -7 e 1; indichiamo con t_1 e t_2 queste due rette, descritte dalle seguenti equazioni:

$$(t_1)\ y=-7x+2 \qquad \text{e} \qquad (t_2)\ y=x+2.$$

[1] I calcoli risultano più semplici se si scrive la formula ridotta, valida per equazioni del tipo $ax^2+2\beta x+c=0$. In tal caso si trova

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-ac}}{a}.$$

È facile ora calcolare le coordinate dei relativi punti di tangenza T_1 e T_2, ricordando che dovremo sempre risolvere un sistema del tipo

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y=0 \\ y=hx+2, \end{cases}$$

in corrispondenza ai due valori di h ora ottenuti. Le soluzioni saranno dunque sempre date da

$$\begin{cases} x_{1,2}=\dfrac{-(6h+2)\pm\sqrt{\Delta}}{2(1+h^2)}, \\ y=hx+2. \end{cases}$$

Si ottengono, in particolare, le coordinate di T_1 per $h=-7$. Si ha:

$$\begin{cases} x_1=x_2=\dfrac{-[6(-7)+2]\pm 0}{2(1+49)} \\ y=-7x+2 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x_1=x_2=0{,}4 \\ y=-0{,}8. \end{cases}$$

Si ottengono, poi, le coordinate di T_2 per $h=-1$. Si ha:

$$\begin{cases} x_1=x_2=\dfrac{-(6+2)\pm 0}{2(1+1)} \\ y=x+2, \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x_1=x_2=-2 \\ y=0. \end{cases}$$

I punti di tangenza sono, dunque

$$T_1(0{,}4;-0{,}8), \quad T_2(-2;0).$$

La fig. 17 visualizza i risultati ottenuti.

2) Consideriamo sempre la stessa circonferenza, ma ora scegliamo l'origine come punto da cui condurre le tangenti (fig. 18). O è un punto che si trova sulla circonferenza e, dunque, troveremo una sola tangente alla curva data.

Ripetendo il procedimento seguito prima, consideriamo il sistema formato dall'equazione della circonferenza e dall'equazione del fascio di rette per O; si ha:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y=0 \\ y=hx. \end{cases}$$

Valendosi ancora del metodo di sostituzione, si ottiene:

$$\begin{cases} x^2+h^2x^2+2x+2hx=0 \\ y=hx \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} (1+h^2)x^2+(2h+2)x=0 \\ y=hx. \end{cases}$$

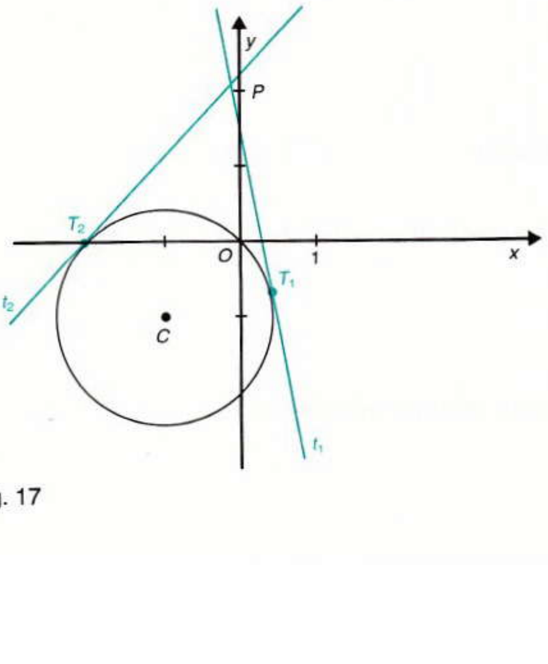


Fig. 17

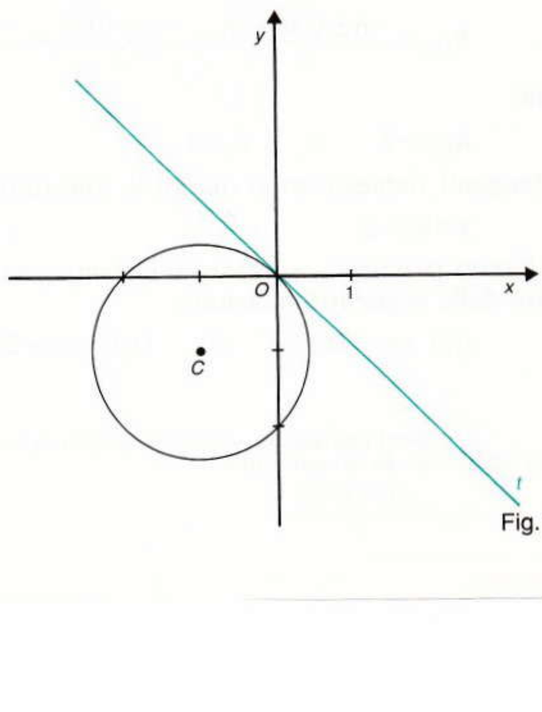


Fig. 18

Calcolando il discriminante Δ dell'equazione di 2° grado ottenuta si ha:

$$\Delta=(2h+2)^2;$$

si osserva subito che, ora, risulta:

$$\Delta=0$$

se si ha

$$(2h+2)^2=0.$$

Ci troviamo, dunque, a risolvere due volte l'equazione

$$2h+2=0,$$

che ha la soluzione

$$h=-1,$$

che dovrà essere contata due volte; si ha quindi:

$$h_1=h_2=-1.$$

Si ottiene perciò una sola retta: è la tangente t d'equazione

$$y=-x;$$

t tocca la circonferenza proprio nel punto $O(0,0)$.

Questo risultato diventa più espressivo se interpretato in modo dinamico: passiamo dal 1° al 2° problema facendo avvicinare P ad O lungo l'asse delle y (fig. 19).

Si osserva che le due tangenti t_1 e t_2 formano fra loro un angolo crescente mentre i punti T_1 e T_2 "scorrono" sulla circonferenza avvicinandosi fra loro. Quando P coincide con O, le due tangenti si sovrappongono nell'unica retta t, e, così, si sovrappongono i punti T_1 e T_2 nell'unico punto O.

È chiara la differenza fra il 1° ed il 2° problema: nel 1° caso il punto P è esterno alla circonferenza e da P si possono condurre due tangenti t_1 e t_2 alla curva; nel 2° caso, invece, O è proprio un punto della circonferenza e si ottiene una sola retta t tangente alla curva in O.

Possiamo ora continuare a "far scendere" il punto P conducendolo ad assumere una posizione Q interna al cerchio (fig. 20): è chiaro che non esiste nessuna tangente alla circonferenza passante per Q. Se, infatti, "ignorando il grafico", proviamo a determinare le tangenti alla curva nel fascio di rette per Q, non troviamo alcun valore reale di h che risolve il problema.

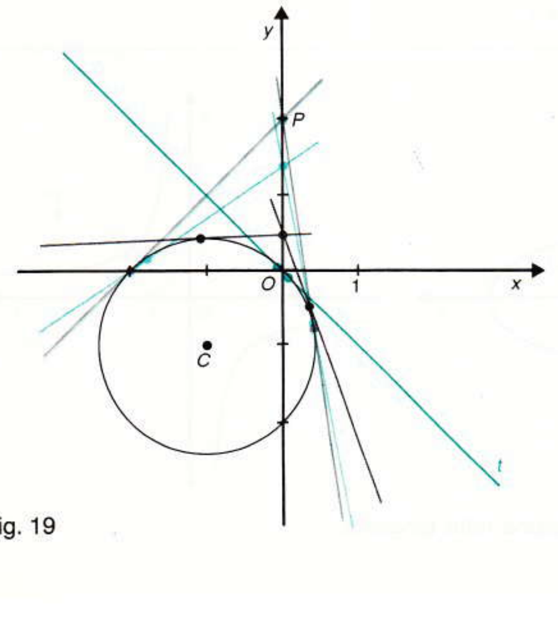


Fig. 19

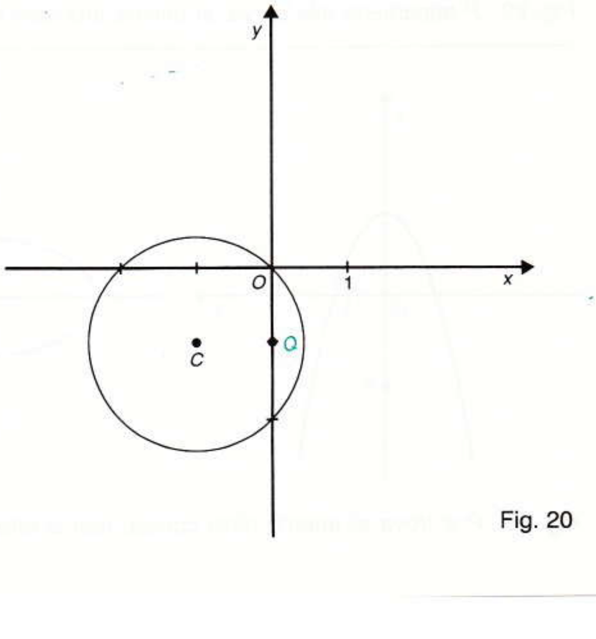


Fig. 20

I procedimenti seguiti hanno carattere generale e possono essere sempre ripetuti quando si vogliono condurre da un punto $P(a,b)$ le tangenti ad una conica d'equazione assegnata. In ogni caso, si considera il sistema formato dall'equazione della conica e dall'equazione del fascio di rette per P. Si ottengono quindi le tangenti richieste determinando i valori del parametro per cui il sistema ha le due soluzioni coincidenti. Si possono avere due tangenti, una tangente o nessuna a seconda della posizione del punto P rispetto alla conica (figg. 21, 22, 23).

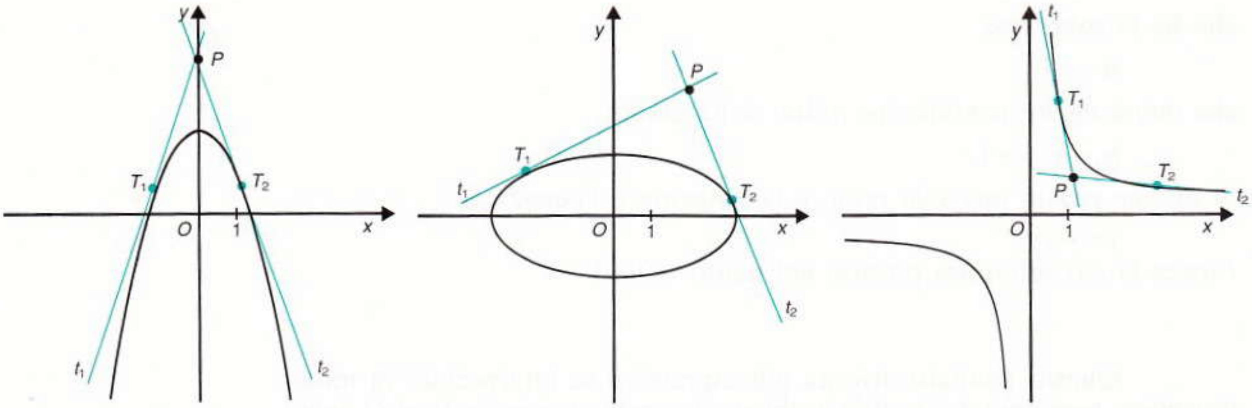


Fig. 21. P è esterno alla conica: si ottengono due rette tangenti t_1 e t_2.

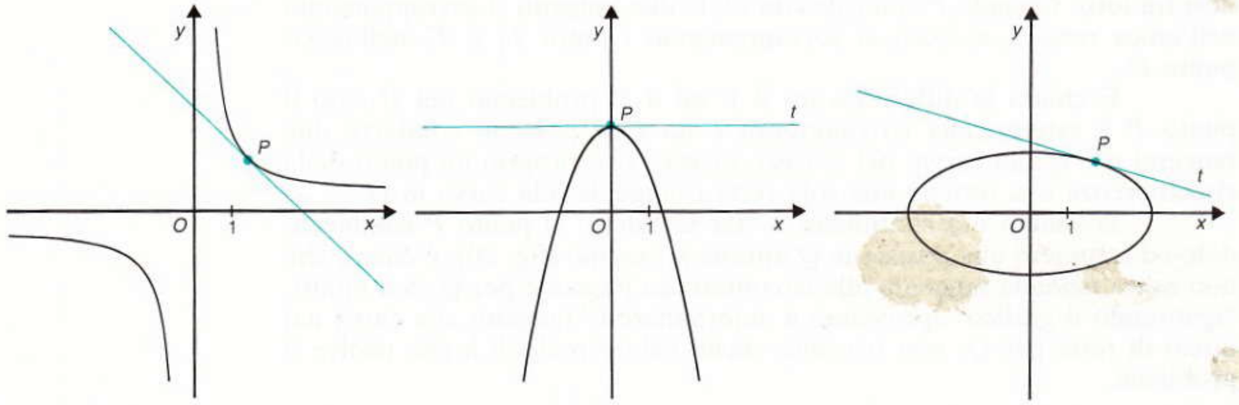


Fig. 22. P appartiene alla curva: si ottiene una sola tangente t.

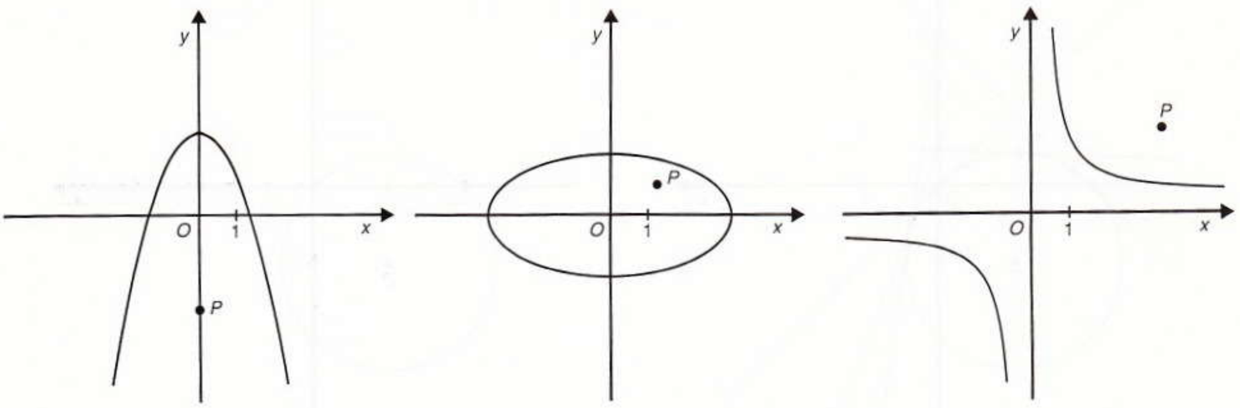


Fig. 23. P si trova all'interno della conica: non si ottiene nessuna retta tangente.

4. Circonferenze soggette a condizioni. Fasci di circonferenze

Riprendiamo ora, relativamente alla circonferenza, alcune delle considerazioni svolte nel paragrafo 2 a proposito della retta.

Una proprietà caratteristica della circonferenza è che per tre punti non allineati passa una sola circonferenza (fig. 24); questa proprietà geometrica si traduce nel fatto che l'equazione di una circonferenza si presenta sempre nella forma

$$x^2+y^2+ax+by+c=0,$$

in cui compaiono tre lettere a, b, c. Occorre perciò fissare il valore delle tre lettere a, b, c se si vuole determinare una particolare circonferenza.

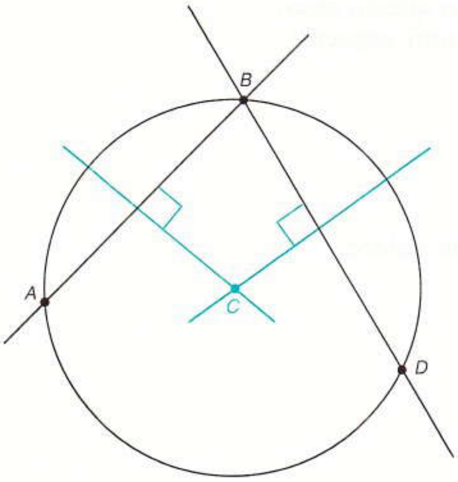


Fig. 24. Per individuare il centro C, si conducono gli assi dei segmenti AB e BD; il loro punto di incontro C è il centro della circonferenza.

Così, se vogliamo, per esempio, individuare l'equazione della circonferenza passante per i tre punti

$$A(-2,0),\quad B(2,0),\quad D(0,1),$$

si procede nel modo seguente. Ricordiamo che la circonferenza passa per il punto $A(-2,0)$ solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione della circonferenza; perciò a, b, c debbono essere tre numeri tali che risulti

$$(-2)^2+0^2+a(-2)+b\cdot 0+c=0.$$

Analogamente, la circonferenza passa per $B(2,0)$, se risulta

$$2^2+0^2+a\cdot 2+b\cdot 0+c=0;$$

infine, la curva passa per $C(0,1)$, se risulta

$$0^2+1^2+a\cdot 0+b\cdot 1+c=0.$$

Abbiamo così scritto tre condizioni che debbono valere, contemporaneamente, se vogliamo che la circonferenza passi per i tre punti assegnati. Deve dunque risultare:

$$\begin{cases} 4-2a+c=0 \\ 4+2a+c=0 \\ 1+b+c=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Risolvendo il sistema (1), per esempio col metodo di addizione e sottrazione, si ha:

$$\begin{cases} 0+4a=0 & \text{(sottraendo la 1}^{\text{a}}\text{ equazione dalla 2}^{\text{a}}\text{)} \\ 8+2c=0 & \text{(addizionando la 1}^{\text{a}}\text{ equazione alla 2}^{\text{a}}\text{)} \\ b=-c-1. \end{cases}$$

Si ricava infine:

$$\begin{cases} a=0 \\ c=-4 \\ b=3. \end{cases}$$

La curva richiesta ha dunque equazione

$$x^2+y^2+3y-4=0.$$

La circonferenza ha centro $C(0,-1{,}5)$ e raggio $r=2{,}5$ (vedi Parte seconda, paragrafo 5) ed è rappresentata in fig. 25.

Che cosa succede se "dimentichiamo" una delle condizioni? Proviamo, per esempio, ad individuare una circonferenza richiedendo che passi solo per $A(-2{,}0)$ e $B(2{,}0)$.

È chiaro che non troveremo una sola circonferenza, ma un fascio di circonferenze, di cui è facile trovare l'equazione. Infatti, in questo caso, invece delle tre condizioni (1), abbiamo solo le due condizioni seguenti

$$\begin{cases} 4-2a+c=0 \\ 4+2a+c=0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} 4a=0 \\ 8+2c=0. \end{cases}$$

Queste due condizioni individuano

$$a=0 \qquad \text{e} \qquad c=-4,$$

ma lasciano "libero" il coefficiente b di assumere qualunque valore.

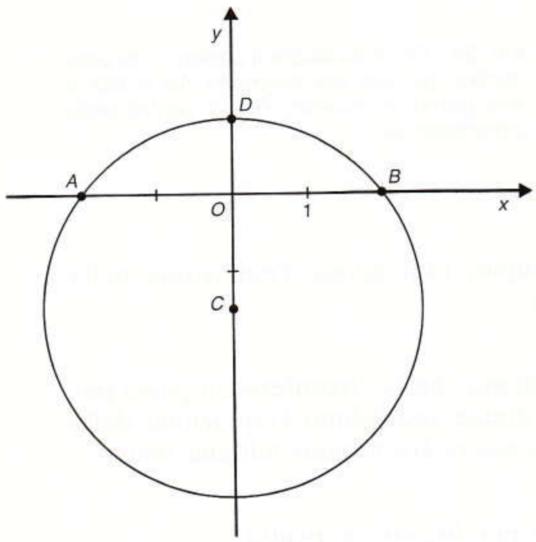


Fig. 25

Se vogliamo mettere meglio in rilievo questa variabilità del coefficiente b, possiamo sostituirlo con la lettera k, che abitualmente indica un parametro. In questo modo il fascio di circonferenze è descritto con l'equazione

$$x^2+y^2+ky-4=0. \tag{2}$$

Le circonferenze hanno il centro C, che ha le coordinate date da

$$C\left(0,-\frac{k}{2}\right);$$

dunque C ha sempre l'ascissa nulla, e perciò si muove lungo l'asse delle y al variare di k.

Il raggio r è dato da:

$$r=\sqrt{\frac{k^2}{4}+4}$$

e quindi aumenta al crescere di k, a partire dal valore minimo ($r=2$); assume questo valore quando risulta $k=0$, e cioè quando il centro si trova in $O(0,0)$.

La fig. 26 rappresenta alcune circonferenze del fascio e ricorda una nota proprietà: i centri delle circonferenze "scorrono" sull'asse del segmento AB, che unisce i due punti comuni a tutte le curve.

Queste circonferenze riescono a "riempire" tutto il piano! Se scegliamo infatti un qualunque punto P (diverso da A e da B), riusciamo sempre a determinare una sola circonferenza del fascio che passa per P. Vogliamo verificarlo?

Scegliamo per esempio $P(100,200)$, un punto "fuori dal nostro disegno". Per determinare la circonferenza che passa per P, bisogna richiedere che le coordinate di P soddisfino l'equazione (2), cioè che risulti

$$100^2+200^2+k\cdot 200-4=0,$$

ossia

$$49.996+200k=0.$$

Si ottiene

$$k=-249{,}98.$$

La circonferenza richiesta ha dunque l'equazione

$$x^2+y^2-249{,}98y-4=0;$$

il centro C ha le coordinate

$$C(0;124{,}99)$$

e il raggio è

$$r=\sqrt{15.626{,}5}\cong 125{,}01.$$

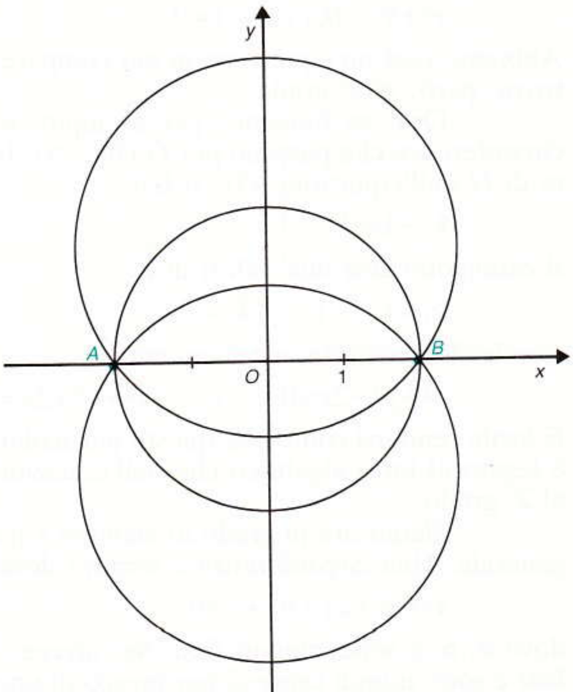


Fig. 26

Abbiamo ancora la possibilità di "tralasciare" una condizione, cercando delle circonferenze che passino, per esempio, per il solo punto $A(2,0)$. Rimane così una sola condizione da imporre all'equazione

$$x^2+y^2+ax+by+c=0;$$

questa:

$$4+2a+c=0. \qquad (3)$$

Si capisce dunque che il coefficiente b è libero di assumere qualunque valore, mentre a e c sono legati dalla condizione (3); perciò, fissato un valore di a, resta individuato un solo valore di c.

Indichiamo, dunque, b con k e, per esempio, a con h; si ha allora:

$$b=k, \qquad a=h, \qquad c=-4-2h.$$

Abbiamo così un insieme di circonferenze, descritto dall'equazione

$$x^2+y^2+hx+ky-4-2h=0 \qquad (4)$$

In fig. 27 abbiamo disegnato alcune circonferenze di questo insieme. Ora non abbiamo più un fascio di circonferenze, dato che *si dà il nome di fascio ad un insieme di circonferenze descritto da un'equazione nelle variabili x ed y, in cui è presente un solo parametro, che compare al 1° grado.* Proprietà, questa, che si traduce in un'intuitiva caratteristica geometrica: per ogni punto P del piano (che non sia comune a tutte le curve) passa una sola circonferenza dell'insieme.

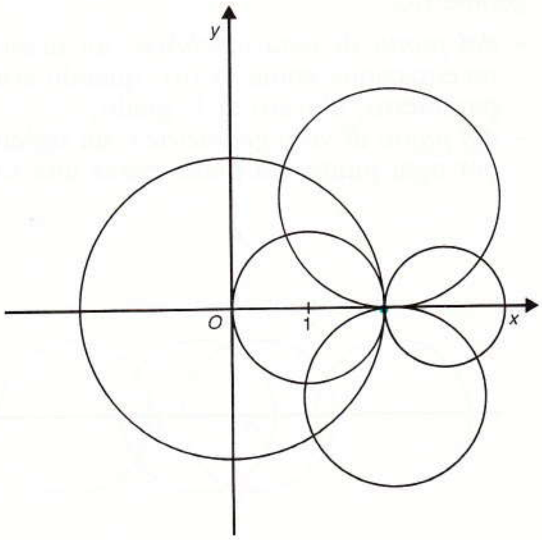


Fig. 27

L'insieme descritto dall'equazione (4) non è dunque un fascio di circonferenze, dato che vi compaiono due parametri (h e k): se fissiamo un qualunque punto P del piano (diverso da A) vi sono infinite circonferenze che passano per P.

Ecco un altro esempio di un insieme di circonferenze che non è un fascio: le circonferenze che hanno raggio fisso e il centro che si muove sull'asse delle x.

In fig. 28 abbiamo rappresentato alcune circonferenze che hanno raggio $r=1$ e centro C d'ascissa variabile. È facile trovare l'equazione di quest'insieme di curve, assegnando al centro C le coordinate $(k,0)$. Si ha

$$(x-k)^2+y^2=1,$$

ossia

$$x^2+y^2-2kx+k^2-1=0. \tag{5}$$

Abbiamo così un'equazione in cui compare un solo parametro (k), che si trova, però, al 2° grado.

Ora, se fissiamo, per esempio, il punto $O(0,0)$, troviamo due circonferenze che passano per O (fig. 29). Infatti, sostituendo le coordinate di O nell'equazione (5), si ha:

$$k^2-1=0;$$

si ottengono così due valori di k

$$k_1=1 \qquad \text{e} \qquad k_2=-1,$$

cioè le due circonferenze seguenti:

$$x^2+y^2-2x=0 \qquad \text{e} \qquad x^2+y^2+2x=0.$$

È facile rendersi conto che questo particolare comportamento dell'insieme è legato al fatto algebrico che nell'equazione (5) il parametro k compare al 2° grado.

Siamo ora in grado di arrivare a qualche conclusione di carattere generale. Una circonferenza è sempre descritta da un'equazione del tipo

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \tag{6}$$

dove a, b, c sono numeri fissi. Se, invece, i coefficienti a, b, c non sono fissi e sono quindi espressi per mezzo di uno o due parametri, l'equazione (6) rappresenta un insieme di circonferenze.

Fra gli insiemi (o sistemi) di circonferenze si distinguono i **fasci**, che si possono caratterizzare in modo algebrico o in un equivalente modo geometrico:

- *dal punto di vista algebrico*, un fascio di circonferenze è descritto da un'equazione come la (6), quando compare, fra i coefficienti, un solo parametro, elevato al 1° grado;
- *dal punto di vista geometrico*, un insieme di circonferenze è un fascio se per ogni punto del piano passa una sola circonferenza dell'insieme.

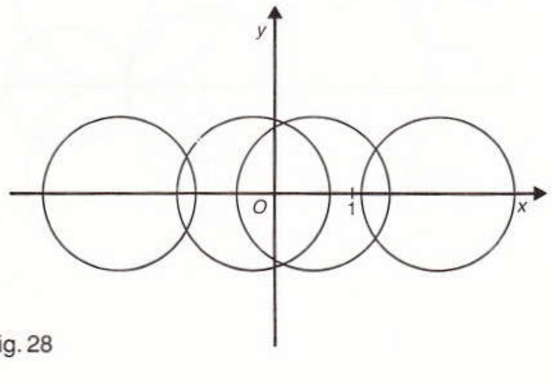


Fig. 28

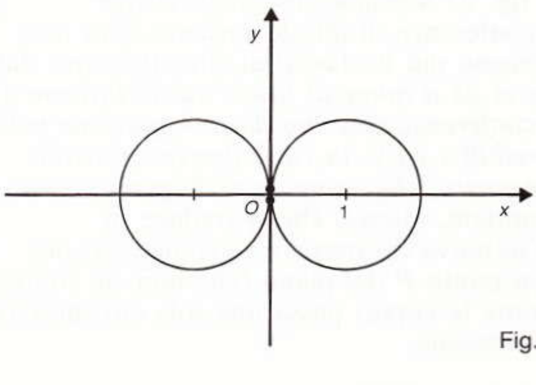


Fig. 29

5. Fasci di coniche in fisica

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come si arriva all'idea di fascio di circonferenze a partire da un problema matematico: la ricerca di una circonferenza che soddisfa delle condizioni assegnate. Ma troviamo fasci di circonferenze e, più in generale, fasci di coniche, anche nello studio delle scienze sperimentali.

Ecco qualche esempio.

1) In fig. 30 è rappresentato *il nocciolo* di un reattore nucleare, dove viene prodotta energia a partire dalle reazioni nucleari: si osserva che il nocciolo è composto da tante sbarrette cilindriche di materiale fissile. Quando si innesca la reazione nucleare, si sviluppa all'interno di ogni sbarretta una rilevante quantità di calore, che viene trasmessa all'esterno; perciò la temperatura T all'interno della sbarretta non è costante ma varia in ogni sezione trasversale al variare della distanza r del punto P dal centro O (fig. 31).

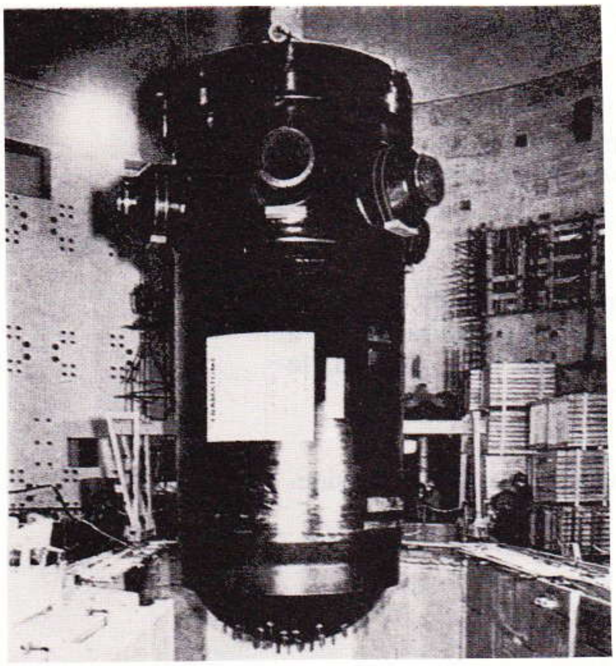


Fig. 30

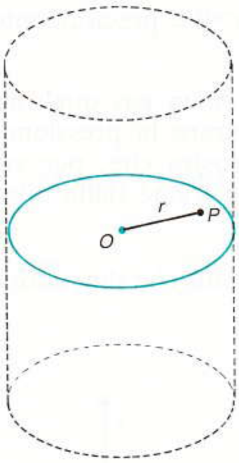


Fig. 31

Si è trovato che, in prima approssimazione, la legge che regola T al variare di r è data da

$$T=T_O-ar^2, \qquad (1)$$

dove T_O indica la temperatura nel punto O e a è un coefficiente che dipende dalla conducibilità del materiale e dalla quantità di calore prodotta nella fissione.

La legge (1), rappresentata graficamente, dà luogo, per un certo valore di T_O, ad una parabola come quella di fig. 32.

Al variare della temperatura T_O, otterremo, invece, un insieme di parabole descritto dall'equazione

$$T=-ar^2+k,$$

dove a è fisso e k ed r possono assumere solo valori positivi. Abbiamo rappresentato in fig. 33 alcune parabole di questo insieme.

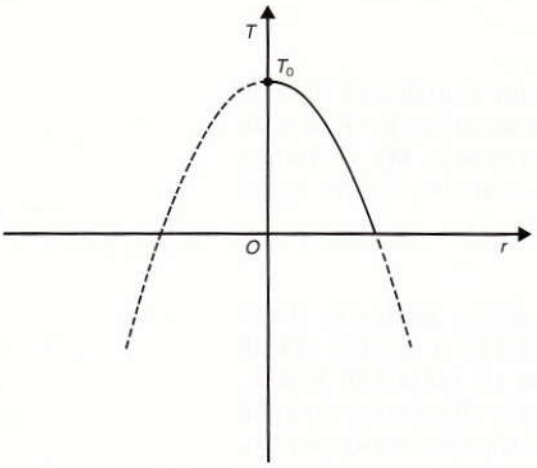


Fig. 32

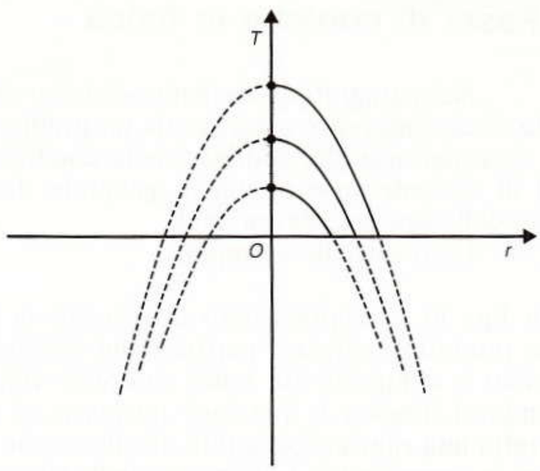


Fig. 33

Il fenomeno ora descritto conduce a considerare il fascio di parabole descritto da un'equazione del tipo

$$y=ax^2+k,$$

dove a è un coefficiente fisso e k è un parametro che può assumere qualunque valore reale. In fig. 34 abbiamo rappresentato alcune curve di questo fascio, scegliendo $a>0$ e precisamente $a=\frac{1}{2}$.

2) Data una certa massa di un gas qualsiasi, in uno stato di equilibrio termico, ne possiamo misurare la pressione P, la temperatura T[1] ed il volume V. L'esperienza mostra che, per valori piccoli della densità, le tre grandezze P, V, T sono legate dalla relazione

$$PV=nRT,$$

dove n ed R sono due costanti che dipendono dalla massa di gas considerato e dalla sua natura.

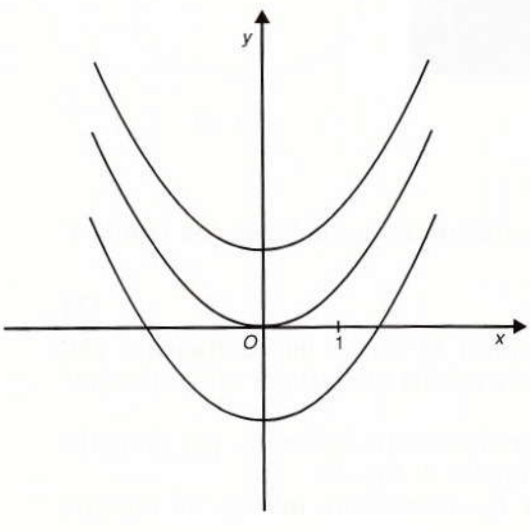


Fig. 34

[1] In questo caso si misura abitualmente la temperatura in gradi Kelvin, indicati con il simbolo °K.

Questa legge diventa molto più espressiva se interpretata graficamente. Si osserva infatti che, considerando una data massa di gas, il prodotto nR ha un valore costante. Si porta quindi il gas ad una certa temperatura, per esempio $100°k$, e si fa variare la pressione P a cui è soggetto il gas, mantenendone fissa la temperatura. Il volume del gas varia e le due grandezze P e V sono legate da una legge del tipo

$$PV=k. \tag{1}$$

Questa, rappresentata sul piano cartesiano, dà l'iperbole di fig. 35. La curva ottenuta prende anche il nome di **isoterma**, per ricordare che descrive una trasformazione in cui il gas mantiene la stessa temperatura.

Possiamo ora ripetere l'esperienza, portando il gas ad un'altra temperatura, per esempio $200°k$, e variarne la pressione, mantenendo fissa la temperatura; P e V ora sono legate ancora da una legge del tipo (1), ma, ovviamente, è diverso il valore della costante k.

Ripetendo questa esperienza per tutti i valori positivi della temperatura T, si rappresenta sul piano cartesiano l'insieme di curve descritto dall'equazione

$$PV=k,$$

dove k è un parametro che può assumere solo valori positivi. Si tratta di un fascio di iperboli, di cui il problema fisico conduce a considerare solo un ramo (fig. 36).

In fig. 37 abbiamo rappresentato alcune iperboli del fascio descritto dall'equazione

$$xy=k,$$

per valori di k positivi e negativi.

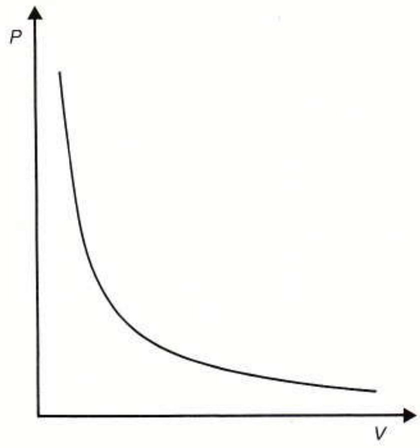


Fig. 35

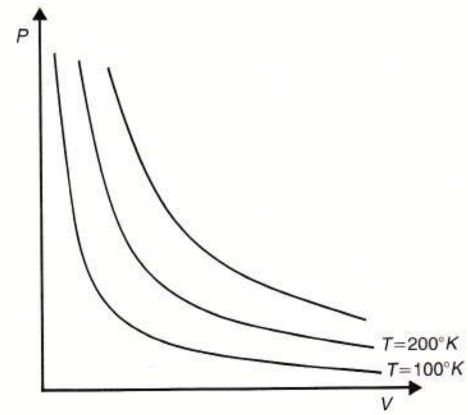


Fig. 36

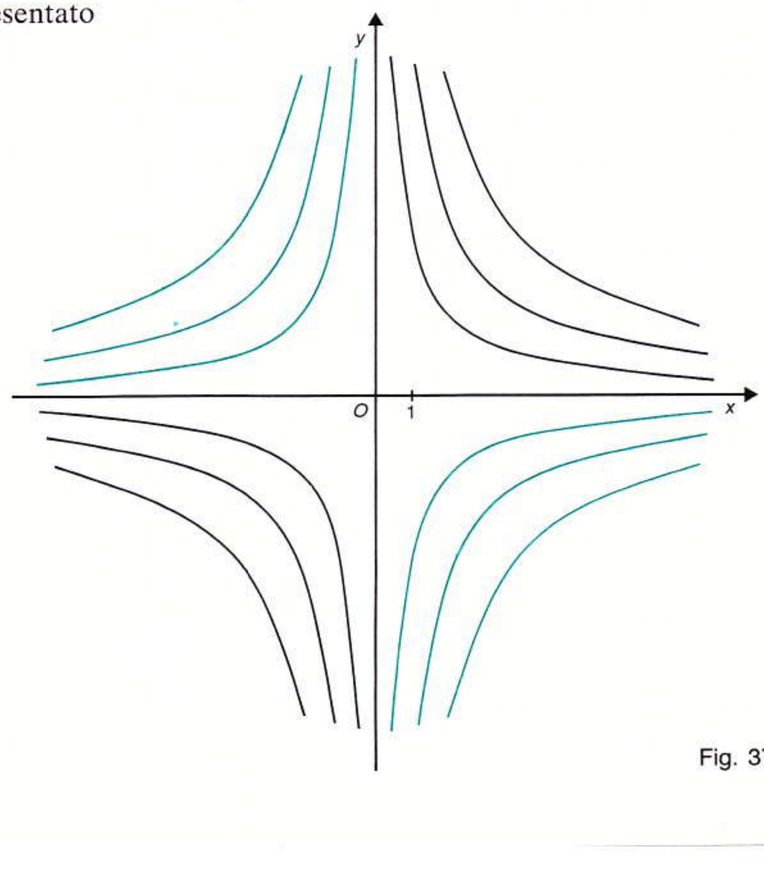


Fig. 37

1. Parte sesta

Disequazioni sul piano cartesiano

Il riferimento cartesiano – abbiamo detto – "crea un ponte" fra la geometria e l'algebra: molti problemi geometrici possono essere risolti con l'aiuto dell'algebra e, d'altra parte, molti problemi algebrici, visualizzati sul piano cartesiano, diventano più semplici ed espressivi.

Un esempio di problema algebrico efficacemente visualizzato sul piano cartesiano è fornito dalla risoluzione di disequazioni, un problema matematico che si trova spesso legato allo studio di fenomeni fisici o di questioni economiche.

Proprio per questo esamineremo prima di tutto un fenomeno fisico che conduce a studiare il segno di una funzione, cioè a risolvere disequazioni in una sola incognita; nel paragrafo 7 vedremo poi un esempio di questione economica che conduce a considerare disequazioni in due (o più) incognite.

1. Un fenomeno fisico che conduce a studiare il segno di una funzione: l'effetto Seebeck

Risale al 1821 (da parte del fisico Seebeck) la scoperta di un singolare fenomeno fisico, che si rileva saldando due metalli diversi. Il fenomeno si scopre eseguendo un esperimento come quello schematizzato in fig. 1. Si ha un filo composto di due metalli diversi, saldati nei punti A e B, e un voltmetro, cioè uno strumento che permette di misurare la tensione ai capi del circuito. Se tutto il circuito si trova alla stessa temperatura, lo strumento non rileva alcuna tensione. Se, invece, riscaldiamo progressivamente una giunzione (per esempio B), lasciando l'altra a temperatura fissa (per esempio di 0°), si vede l'indice dello strumento allontanarsi rapidamente dallo zero, segnalando il nascere di una tensione E.

È interessante seguire l'andamento della tensione E all'aumentare della temperatura t: si osserva che E cresce rapidamente all'inizio, poi continua a crescere ma più lentamente, fino a raggiungere un valore massimo, a partire dal quale comincia a diminuire. Continuando ad aumentare la temperatura, si osserva, ad un certo punto, che la tensione è di nuovo zero e poi cambia verso. Se, dunque, chiudessimo il circuito di fig. 1 inserendovi un sensibile strumento per misurare l'intensità della corrente, rileveremmo una corrente di intensità variabile, che circola prima in un verso e, poi, nel verso opposto. Questo fenomeno prende il nome di *effetto Seebeck* o effetto termoelettrico; l'apparecchio formato dall'insieme dei due metalli prende talvolta il nome di *termocoppia*.

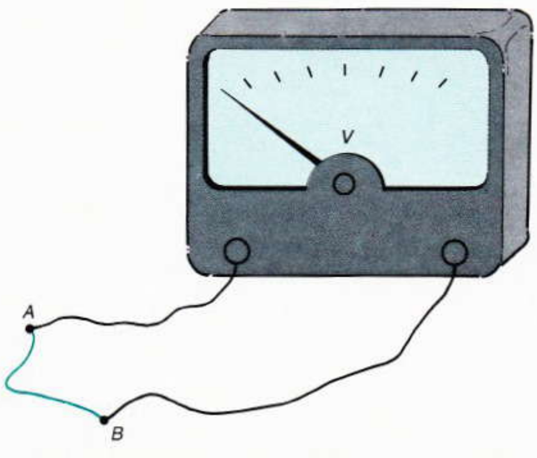


Fig. 1

Per studiare meglio il fenomeno, si comincia con l'esaminarne il potere termoelettrico, cioè l'aumento p di tensione che si rileva quando la temperatura t aumenta di 1°. Si rileva infatti che p non è costante, ma varia al variare di t seguendo, in prima approssimazione, la legge

$$p=at+b, \tag{1}$$

dove i coefficienti a e b dipendono dai metalli considerati. Per esempio, per la giunzione piombo-costantana si ottiene:

$$a \cong -9 \cdot 10^{-8} \quad \text{e} \quad b \cong 38 \cdot 10^{-6}.$$

È interessante visualizzare la legge (1) con un grafico (fig. 2): si osserva che fino alla temperatura di circa 422°, p è positivo, cioè si ha un effettivo aumento di tensione, mentre per $t>422°$, risulta $p<0$, si ha cioè una diminuzione di tensione. È chiaro che in corrispondenza alla temperatura $t=422°$ si ha il passaggio dall'andamento crescente a quello decrescente della tensione; si avrà dunque la tensione massima.

Si nota dunque che, in questo caso, la visualizzazione della legge è importante soprattutto per osservare quali sono i valori di t per cui risulta $p>0$ o $p=0$ o $p<0$.

Ma ancora più interessante risulta la legge che descrive la tensione E al variare della temperatura t: si trova infatti, in prima approssimazione, una legge del tipo

$$E=\frac{a}{2}t^2+bt, \tag{2}$$

dove a e b sono gli stessi coefficienti che compaiono nella legge (1). Se visualizziamo questa legge con un grafico cartesiano si ottiene, sempre nel caso piombo-costantana, un disegno come quello di fig. 3. Il grafico mette in rilievo un fenomeno che la legge (1) non permetteva di visualizzare: la tensione E arriva al valore 0 in corrispondenza alla temperatura $t=844°$; se aumentiamo ancora la temperatura, avremo una "tensione negativa", cioè di verso opposto a quello rilevato per temperature inferiori a 844°.

Anche in questo caso, dunque, la visualizzazione della legge è interessante, soprattutto per prevedere i valori di t per cui risulta $E>0$ o $E=0$ o $E<0$.

Abbiamo considerato due situazioni in cui è di grande aiuto rappresentare le leggi sul piano cartesiano per visualizzare il segno che assume una grandezza al variare dell'altra. Sarà proprio di questo tipo di problemi che ci occuperemo nelle pagine seguenti.

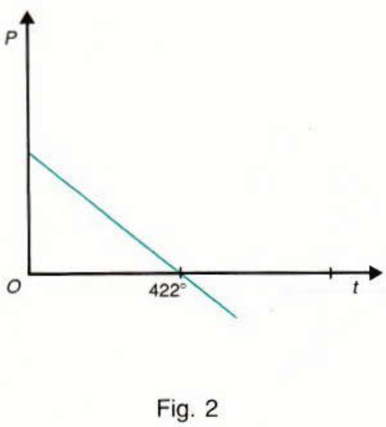


Fig. 2

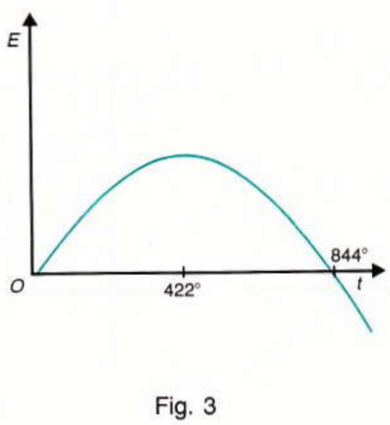


Fig. 3

2. Il segno di una funzione di 1° grado

Cominciamo con l'esaminare due casi numerici relativi a funzioni di 1° grado, cioè del tipo

$$y=ax+b.$$

I) È data la funzione

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{2} \qquad (1)$$

e si vuole sapere come varia il segno di y al variare di x, cioè si vuole sapere per quali valori di x risulta $y>0$ o $y=0$ o $y<0$. È facile risolvere il problema se si visualizza la funzione sul piano cartesiano: la (1) rappresenta la retta r di fig. 4.

Si osserva subito che sulla retta si trovano infiniti punti con l'ordinata y positiva: sono tutti i punti al di sopra dell'asse delle x, che "formano" la semiretta disegnata in nero in fig. 4. Sono anche infiniti i punti con l'ordinata y negativa: sono quelli al di sotto dell'asse delle x, sulla semiretta disegnata in colore in fig. 4. Infine, c'è un punto con l'ordinata che vale 0: è il punto A, in cui la retta incontra l'asse delle x. Ora è facile calcolare il valore di x per cui risulta $y=0$; si ha

$$0=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{2} \qquad \text{ossia} \qquad x=\frac{9}{2}\cdot\frac{4}{3}=6.$$

Si ha dunque

$$y=0 \qquad \text{per} \qquad x=6.$$

Per completare la risposta al nostro quesito basta osservare che un punto P percorre la semiretta in nero di fig. 5 solo se la sua ascissa x si mantiene "a sinistra del valore 6"; perciò risulta

$$y>0 \qquad \text{per} \qquad x<6.$$

Invece, un punto Q percorre la semiretta in colore di fig. 5, solo se la sua ascissa x si mantiene "a destra del valore 6"; si ha dunque

$$y<0 \qquad \text{per} \qquad x>6.$$

Quindi, esaminando il grafico della retta, possiamo determinare anche il segno della corrispondente funzione di 1° grado; si ha:

$$\begin{array}{llll} \text{per } x>6, & y<0 & \text{cioè} & -\frac{3}{4}x+\frac{9}{2}<0 \\ \text{per } x=6, & y=0 & \text{»} & -\frac{3}{4}x+\frac{9}{2}=0 \\ \text{per } x<6, & y>0 & \text{»} & -\frac{3}{4}x+\frac{9}{2}>0. \end{array}$$

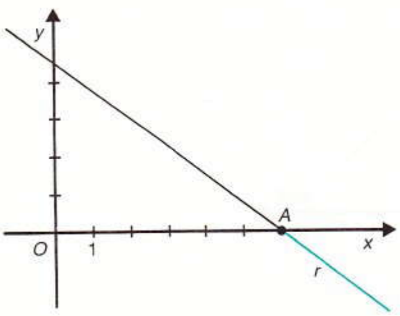


Fig. 4

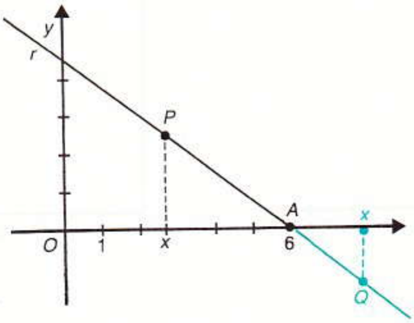


Fig. 5

II) Possiamo procedere in modo del tutto analogo per studiare il segno della funzione seguente

$$y=\frac{3}{4}x-\frac{9}{2}. \qquad (2)$$

Rappresentiamo sul piano cartesiano la funzione: si ottiene la retta s di fig. 6. Si osserva subito che la retta s interseca l'asse delle x ancora nel punto $A(6{,}0)$; ma, ora, osservando i punti P della retta che hanno ordinata positiva ed i punti Q che hanno ordinata negativa, si conclude che risulta:

$$\text{per } x>6, \quad y>0 \qquad \text{cioè} \qquad \frac{3}{4}x-\frac{9}{2}>0$$

$$\text{per } x=6, \quad y=0 \qquad » \qquad \frac{3}{4}x-\frac{9}{2}=0$$

$$\text{per } x<6, \quad y<0 \qquad » \qquad \frac{3}{4}x-\frac{9}{2}<0$$

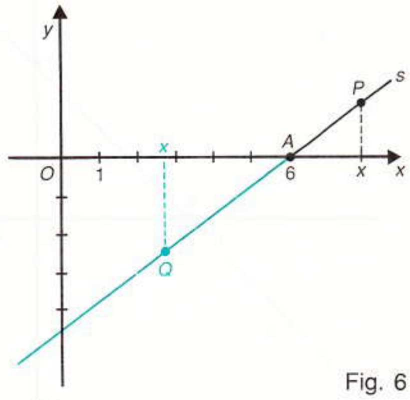


Fig. 6

La fig. 7 fa rilevare analogie e differenze fra il caso I) e il caso II).

Dal punto di vista grafico, si osserva che le due rette incontrano l'asse delle x nello stesso punto A, ma hanno pendenza opposta: r ha pendenza negativa, mentre s ha pendenza positiva. Nel caso I) si ha un grafico decrescente, e perciò, se risulta

$$y=0 \quad \text{per} \quad x=6,$$

si avrà

$$y<0 \quad \text{per} \quad x>6.$$

Invece, nel caso II) si ha un grafico crescente, e dunque, se risulta

$$y=0 \quad \text{per} \quad x=6,$$

si avrà

$$y>0 \quad \text{per} \quad x>6.$$

Da questi esempi si capisce come sia facile studiare il segno di una funzione di 1° grado del tipo

$$y=ax+b,$$

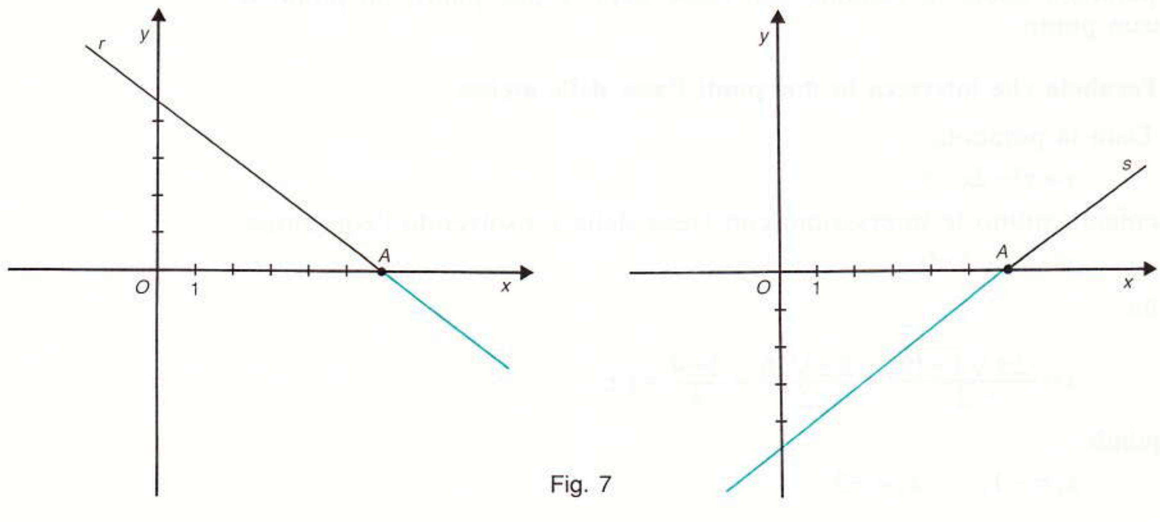
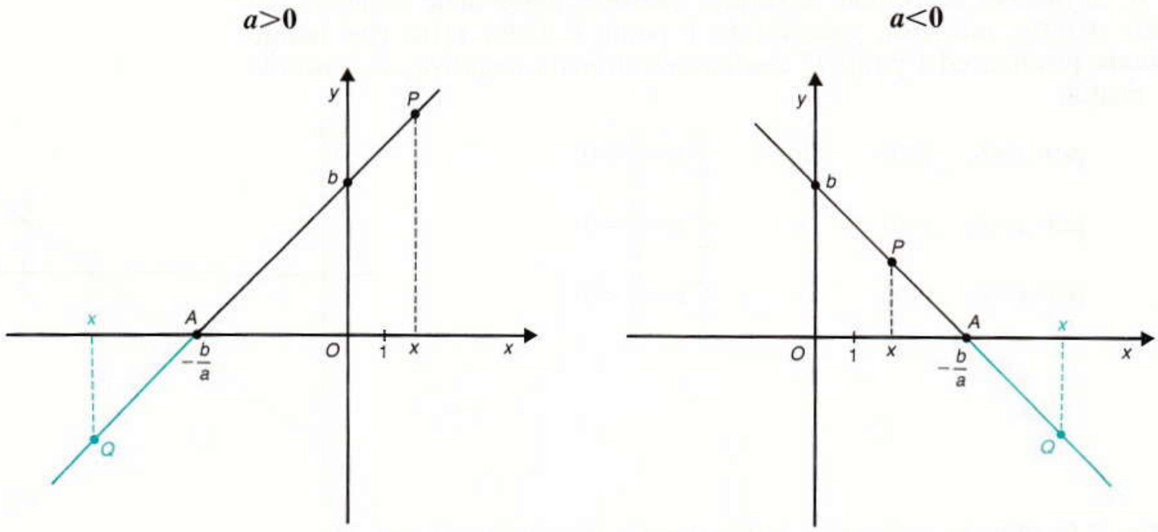


Fig. 7

basandosi sul grafico della corrispondente retta. I risultati sono riassunti nello schema seguente.

Segno di $y=ax+b$



$ax+b=0$	per	$x=-\dfrac{b}{a}$			$ax+b=0$	per	$x=-\dfrac{b}{a}$
$ax+b>0$	per	$x>-\dfrac{b}{a}$			$ax+b>0$	per	$x<-\dfrac{b}{a}$
$ax+b<0$	per	$x<-\dfrac{b}{a}$			$ax+b<0$	per	$x>-\dfrac{b}{a}$

3. Il segno di una funzione di 2° grado

Vediamo ora come l'osservazione del grafico della parabola possa condurre a studiare in modo semplice il segno di funzioni del tipo

$$y=ax^2+bx+c.$$

Ci baseremo su esempi numerici, distinguendo tre casi a seconda che la parabola abbia in comune con l'asse delle x due punti, un punto o nessun punto.

I) Parabola che interseca in due punti l'asse delle ascisse

1) Data la parabola

$$y=x^2-2x-3,$$

otteniamo subito le intersezioni con l'asse delle x risolvendo l'equazione

$$x^2-2x-3=0.$$

Si ha:

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm4}{4}=1\pm2$$

e quindi

$$x_1=-1, \qquad x_2=-3.$$

Tracciamo un grafico approssimativo di questa parabola (fig. 8) tenendo conto di due informazioni:

- il coefficiente di x^2 è positivo (vale $+1$) e quindi la parabola rivolge la concavità verso l'alto;
- la parabola incontra l'asse delle x nei punti d'ascissa -1 e $+3$.

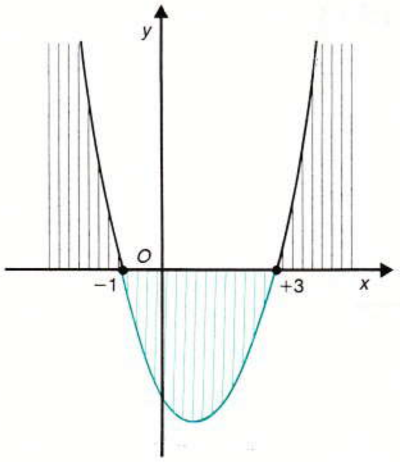


Fig. 8

Osservando il grafico notiamo che l'arco di curva disegnato in colore si trova al di sotto dell'asse delle x, e quindi i suoi punti hanno ordinata negativa, cioè risulta $y<0$. Invece i due archi disegnati in nero si trovano al di sopra dell'asse delle x, e quindi i loro punti hanno ordinata positiva, cioè risulta $y>0$.

Leggiamo sul grafico le ascisse x dei punti che hanno ordinata y negativa. Queste ascisse x si trovano:
a destra del valore -1, cioè sono più grandi di -1 $[x>-1]$

e contemporaneamente

a sinistra del valore 3, cioè sono più piccole di 3 $[x<3]$.
Scriveremo perciò

$$y<0 \quad \text{per} \quad -1<x<3.$$

Occupiamoci ora dei punti che hanno ordinata y positiva. Essi sono distribuiti su due archi di parabola e le ascisse x corrispondenti si trovano:
a sinistra del valore -1, cioè sono più piccole di -1 $[x<-1]$

oppure

a destra del valore 3, cioè sono più grandi di 3 $[x>3]$.
Scriveremo allora:

$$y>0 \quad \text{per} \quad x<-1 \quad \text{o per} \quad x>+3.$$

2) Consideriamo ora la parabola

$$y=-x^2+2x+3.$$

Le intersezioni della curva con l'asse delle x hanno l'ascissa:

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{-2}=\frac{-2\pm4}{-2}$$

cioè

$$x_1=\frac{-2+4}{-2}=\frac{+2}{-2}=-1,$$

$$x_2=\frac{-2-4}{-2}=\frac{-6}{-2}=+3,$$

Questa parabola interseca dunque l'asse delle x negli stessi punti della parabola esaminata nel caso 1), ma questa volta la curva ha la concavità rivolta verso il basso perché il coefficiente di x^2 è negativo (vale -1). In fig. 9 abbiamo tracciato un grafico approssimativo.
Dal disegno risulta che:

$y>0$ per $-1<x<+3$
$y<0$ per $x<-1$ o per $x>+3$.

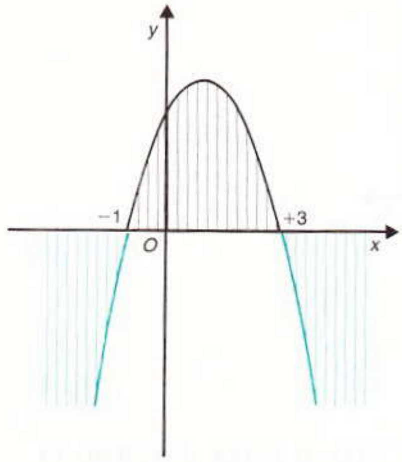


Fig. 9

II) Parabola tangente in un punto all'asse delle ascisse

Le intersezioni con l'asse delle x della parabola d'equazione

1) $y=x^2-6x+9$

si ottengono risolvendo l'equazione

$$x^2-6x+9=0.$$

Si ha:

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\frac{6\pm0}{2}=\frac{6}{2}=3.$$

La parabola, dunque, rivolge la concavità verso l'alto perché il coefficiente di x^2 è positivo, e "tocca" l'asse delle x in uno sol punto, il punto $V(3,0)$ (fig. 10).

Dal grafico risulta chiaro che tutti i punti della parabola hanno ordinata positiva, escluso il punto V che ha ordinata zero. In questo caso risulta:

$y=0$ per $x=+3$
$y>0$ per $x\neq+3$.

Calcolando le intersezioni con l'asse delle x della parabola

2) $y=-4x^2+4x-1$,

si risolve l'equazione

$$-4x^2+4x-1=0.$$

Si ha:

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{-8}=\frac{-4\pm0}{-8}=\frac{-4}{-8}=\frac{1}{2}.$$

Anche questa parabola è tangente all'asse delle x nel punto di ascissa $\frac{1}{2}$, ma volge la concavità verso il basso perché $a=-4$; ne abbiamo tracciato un grafico approssimativo in fig. 11.

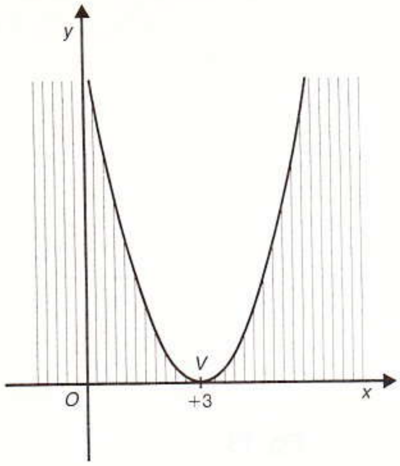


Fig. 10

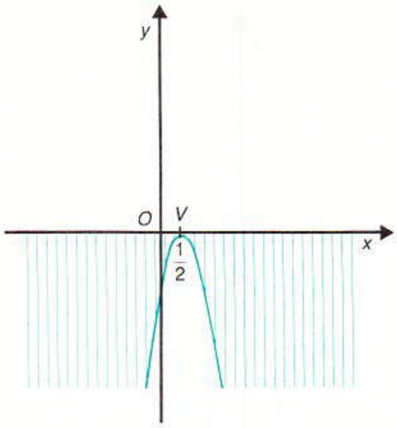


Fig. 11

Ora tutti i punti della parabola hanno ordinata negativa, escluso il vertice $V\left(\frac{1}{2},0\right)$. Risulta dunque:

$y=0$ per $x=\frac{1}{2}$

$y<0$ per $x\neq\frac{1}{2}$.

III) Parabola che non incontra l'asse delle ascisse

Esaminiamo ora la parabola

1) $y=x^2-2x+5$.

Le intersezioni della curva con l'asse delle x si ottengono risolvendo l'equazione

$$x^2-2x+5=0.$$

Si ha:

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}.$$

In questo caso l'equazione non ha soluzioni reali, ciò corrisponde al fatto che la parabola non incontra l'asse delle x. La situazione è indicata in fig. 12. Ora la parabola è tutta al di sopra dell'asse delle x, e, quindi, tutti i suoi punti hanno ordinata positiva, cioè risulta

$y>0$ per qualunque valore di x.

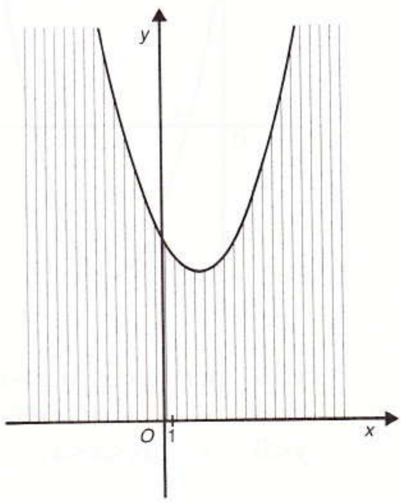


Fig. 12

Esaminiamo infine la parabola

2) $y=-5x^2+2x-1$.

Le intersezioni della curva con l'asse delle x si ottengono risolvendo l'equazione

$$-5x^2+2x-1=0.$$

Si ha:

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{-10}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{-10}.$$

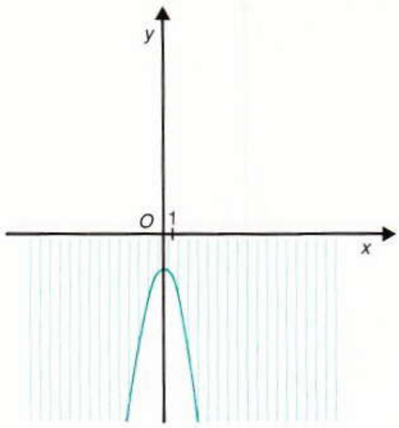


Fig. 13

Anche questa parabola non incontra l'asse delle x, ma, ora, ha la concavità rivolta verso il basso (fig. 13). Dunque risulta dal grafico che:

$y<0$ per qualunque valore di x.

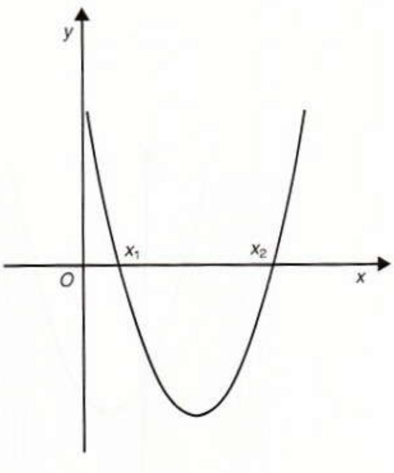
Da questi esempi si capisce come sia essenziale, per studiare il segno di un trinomio di 2° grado, appoggiarsi sull'esame del grafico della corrispondente parabola.

Ecco uno schema riassuntivo su questo studio.

Segno di $y=ax^2+bx+c$

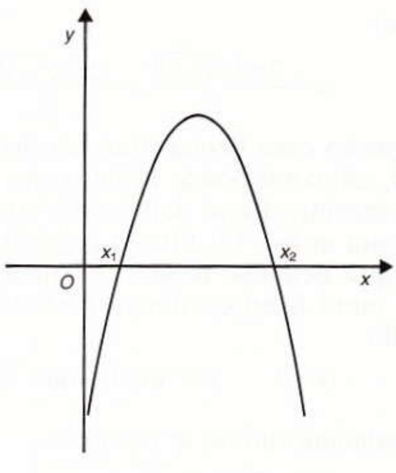
I) Parabole che intersecano in due punti l'asse delle x

$a>0$



$y>0$ per $x<x_1$ o $x>x_2$
$y=0$ » $x=x_1$, $x=x_2$
$y<0$ » $x_1<x<x_2$

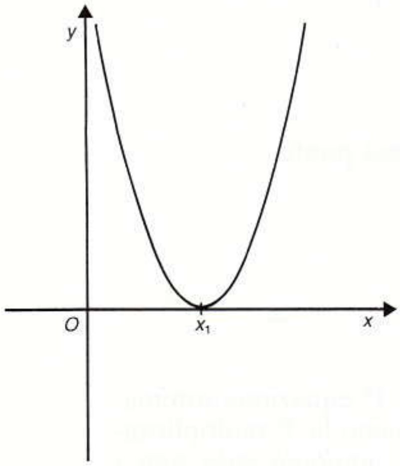
$a<0$



$y>0$ per $x_1<x<x_2$
$y=0$ » $x=x_1$, $x=x_2$
$y<0$ » $x<x_1$ o $x>x_2$

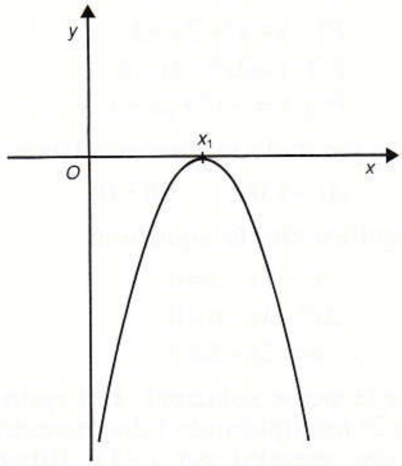
II) Parabole che toccano in un punto l'asse delle x

$a>0$



$y>0$ per qualunque $x \neq x_1$
$y=0$ per $x=x_1$

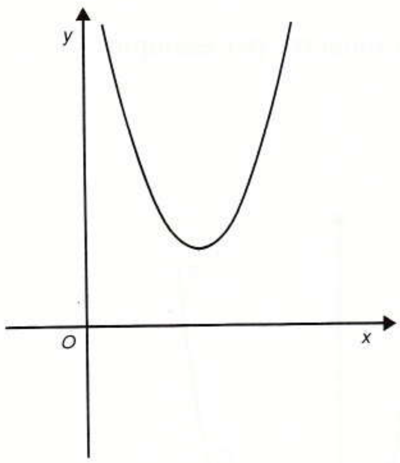
$a<0$



$y<0$ per qualunque $x \neq x_1$
$y=0$ per $x=x_1$

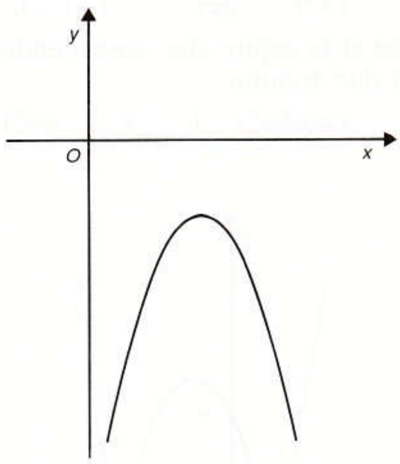
III) Parabole che non intersecano l'asse delle x

$a>0$



$y>0$ per qualunque x

$a<0$



$y<0$ per qualunque x

4. Qualche osservazione sul segno del trinomio

Osserviamo la fig. 14: sono rappresentate la parabole che abbiamo indicato con P, P', P'', e che rispondono alle equazioni:

P) $y=x^2-2x-3$
P') $y=2x^2-4x-6$
P'') $y=-x^2+2x+3$.

Queste parabole intersecano l'asse delle x negli stessi punti:

$A(-1,0)$, $B(3,0)$;

ciò significa che le equazioni

$$x^2-2x-3=0$$
$$2x^2-4x-6=0$$
$$-x^2+2x+3=0$$

hanno le stesse soluzioni. Del resto, a partire dalla 1ª equazione otteniamo la 2ª moltiplicando i due membri per 2 ed otteniamo la 3ª moltiplicando i due membri per (-1). Ritroviamo così che, *moltiplicando tutti i coefficienti di un'equazione per uno stesso numero, si ottiene un'equazione che ha le stesse soluzioni (cioè un'equazione equivalente).*
Ma – attenzione! – le due curve

P) $y=x^2-2x-3$ e P') $y=2(x^2-2x-3)$

non coincidono (fig. 15): la parabola P' si ottiene dalla P operando un'affinità, che lascia fissi i punti dell'asse delle x ma raddoppia l'ordinata di ogni altro punto (si tratta di uno stiramento lungo l'asse delle y).
Risulta però, per tutte e due le curve:

$y>0$ per $x<-1$ o $x>3$
$y<0$ per $-1<x<3$.

Questo ci fa capire che, sostituendo alla x lo stesso numero, per esempio 0, nei due trinomi

$y=x^2-2x-3$ e $y=2(x^2-2x-3)$

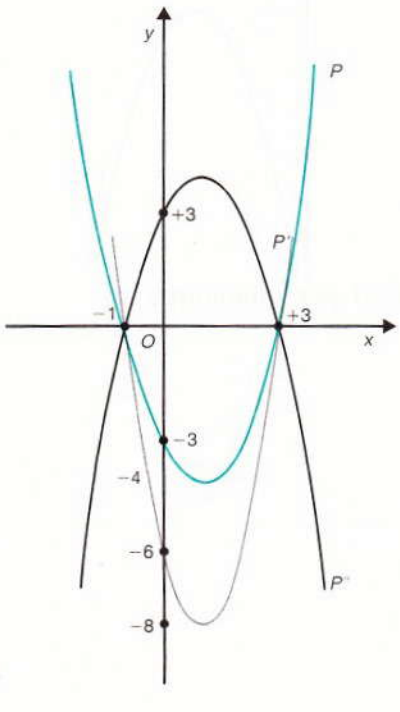


Fig. 14

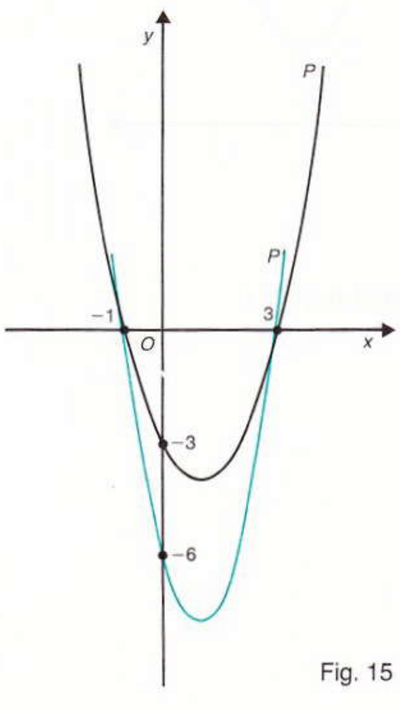


Fig. 15

si ottengono due risultati differenti (-3 e -6), che hanno, però, lo stesso segno. Si capisce così che i valori di x che rendono

$$x^2-2x-3>0,$$

rendono anche

$$2(x^2-2x-3)>0;$$

cioè le due disequazioni

$$x^2-2x-3>0 \qquad \text{e} \qquad 2(x^2-2x-3)>0$$

sono *equivalenti*.
Anche i grafici delle due curve:

$$P)\ y=x^2-2x-3 \qquad \text{e} \qquad P'')\ y=-(x^2-2x-3)$$

non sono uguali (fig. 16): la parabola P'' è simmetrica della parabola P rispetto all'asse delle x. Si capisce ora che, sostituendo alla x lo stesso numero, per esempio 0, nei due trinomi

$$y=x^2-2x-3 \qquad \text{e} \qquad y=-(x^2-2x-3)$$

si ottengono due risultati (-3 e 3), che hanno segno opposto. Dunque, i valori di x che rendono

$$x^2-2x-3>0,$$

rendono, invece,

$$-(x^2-2x-3)<0.$$

Il procedimento che abbiamo seguito può essere generalizzato: data la disequazione

$$ax^2+bx+c>0 \qquad (\text{o } ax^2+bx+c<0)$$

se si moltiplicano i due membri per lo stesso numero k, si ottiene una disequazione equivalente solo se k è positivo.

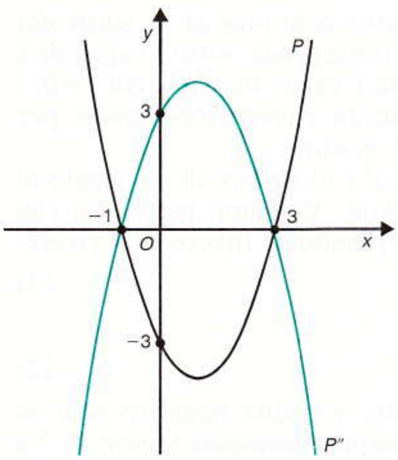


Fig. 16

5. Altri modi per indicare il segno del trinomio

Presentiamo altri due modi che permettono di riassumere le osservazioni fatte sul segno che assume l'ordinata y dei punti di una parabola al variare dell'ascissa x. Riferiamoci sempre al trinomio

$$y=x^2-2x-3$$

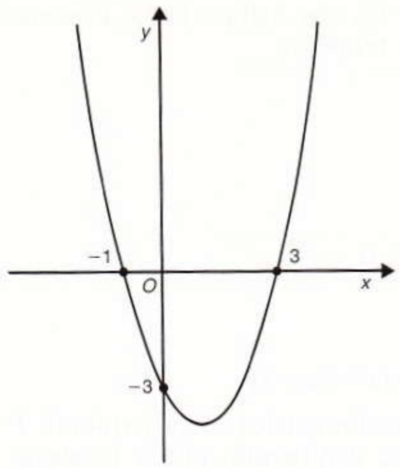


Fig. 17

Fig. 18

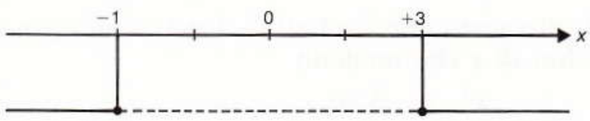


Fig. 19

e quindi alla parabola della fig. 17.

1) Si indicano su una retta (fig. 18) i valori di x che rendono $y=0$, e cioè -1 e $+3$: sono le soluzioni dell'equazione

$$x^2-2x-3=0.$$

Si disegna poi (fig. 19) una semiretta a tratto continuo al di sotto dei valori di x che rendono $y>0$, e un segmento tratteggiato sotto i valori di x che rendono $y<0$; un "puntino" contrassegna i valori di x per cui $y=0$.

Si può, naturalmente, valersi di questa convenzione anche per schematizzare il segno di una funzione di 1° grado.

2) Un altro modo per caratterizzare il segno di y al variare di x è legato al significato grammaticale di alcune congiunzioni. Vediamo meglio di che cosa si tratta, riferendosi sempre alla stessa parabola. Invece di scrivere

$$y<0 \quad \text{per} \quad -1<x<3, \tag{1}$$

si scrive anche:

$$y<0 \quad \text{per} \quad x>-1 \ \textbf{et} \ x<3. \tag{2}$$

Infatti con la (1) si intende dire che il valore y risulta negativo solo se sostituiamo alla x numeri che risultano **contemporaneamente** minori di 3 **e** maggiori di -1. Dunque risulta $y<0$, solo se sono rispettate due condizioni:

$$x>-1 \ \textbf{et} \ x<3;$$

la congiunzione latina "et" traduce, appunto, la congiunzione italiana "e". Invece di scrivere

$$y>0 \quad \text{per} \quad x>3, \ x<-1, \tag{3}$$

si scrive, più precisamente:

$$y>0 \quad \text{per} \quad x<-1 \ \textbf{vel} \ x>3; \tag{4}$$

infatti, se vogliamo il valore di y positivo, possiamo scegliere fra mantenere l'ascissa più grande di 3 **o** mantenerla più piccola di -1, e una scelta non esclude l'altra; la congiunzione latina "vel" traduce proprio la "o" italiana.

Va precisato che la lingua italiana usa la congiunzione "o" in due significati, disgiuntivo ed esclusivo, mentre in latino si avevano due congiunzioni per esprimere "o"; ci spieghiamo con esempi:

o disgiuntivo: tradotto dal "vel" latino: "sono vegetariano, mangio uova o formaggio" (mangiare le uova non esclude di poter mangiare il formaggio);

o esclusivo: tradotto da "aut" latino: "la borsa o la vita!" (è evidente che una scelta esclude l'altra!).

6. Segno di funzioni razionali intere e fratte

Esaminiamo ora due casi in cui non bastano le sole considerazioni grafiche per studiare il segno di una funzione: il primo riguarda le funzioni razionali intere, il secondo le funzioni razionali fratte[1]. Nei due casi cominceremo da esempi numerici.

I) È data la funzione razionale intera

$$y=(x^2-9)(x^2-1) \qquad (1)$$

e se ne vuole studiare il segno. Non sappiamo adesso tracciare il grafico della curva che ha l'equazione (1), e perciò non possiamo basarci su considerazioni grafiche.

Si osserva tuttavia che il 2° membro della (1) è un polinomio, espresso mediante il prodotto di due trinomi di 2° grado, di cui sappiamo valutare il segno. Il 1° fattore è

$$f_1=x^2-9$$

e, basandoci sul procedimento esposto nel paragrafo 3, troviamo che risulta:

$$\begin{array}{lll} f_1>0 & \text{per} & x>3 \text{ o } x<-3 \\ f_1=0 & » & x=3 \text{ o } x=-3 \\ f_1<0 & » & -3<x<3. \end{array}$$

Sintetizzando il segno di f_1 con il procedimento introdotto nel paragrafo 5, si ha lo schema di fig. 20.

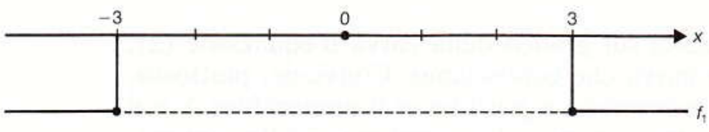


Fig. 20

[1] Ricordiamo che una funzione razionale **intera** è espressa mediante un polinomio nella variabile x, cioè è del tipo

$$y=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\dots$$

Una funzione razionale **fratta** è, invece, espressa mediante un quoziente di polinomi.

E così il segno del fattore

$$f_2=x^2-1$$

è descritto nello schema di fig. 21.

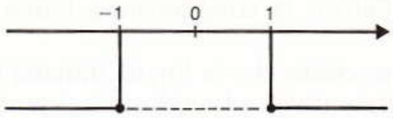


Fig. 21

Ora, per valutare il segno della funzione assegnata, basta ricordare che un prodotto è positivo se i due fattori hanno lo stesso segno, negativo se i due fattori hanno segno opposto.

In definitiva, il segno della nostra funzione risulta dallo schema di fig. 22.

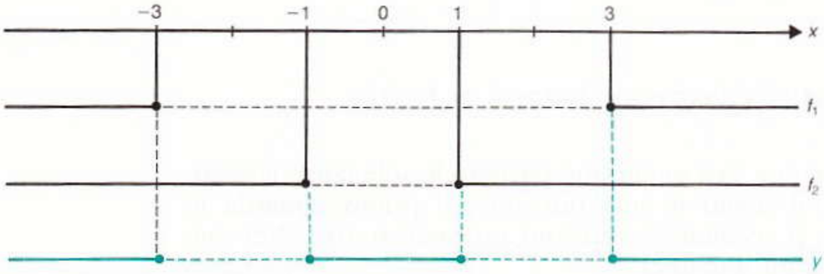


Fig. 22

Possiamo così concludere che risulta

$$\begin{aligned}
&y=0 \quad \text{per} \quad x=-3, \ x=-1, \ x=1, \ x=3;\\
&y>0 \quad \text{»} \quad x<-3, \ -1<x<1, \ x>3;\\
&y<0 \quad \text{»} \quad -3<x<-1, \ 1<x<3.
\end{aligned}$$

Questo procedimento si può generalizzare a qualunque funzione razionale intera, che sia possibile esprimere mediante il prodotto di due o più fattori di 1° o di 2° grado. In tutti i casi, basta infatti tenere presente che

- un prodotto vale zero quando almeno uno dei suoi fattori vale zero;
- un prodotto ha segno negativo solo se è ottenuto moltiplicando un numero dispari di fattori negativi.

II) Vediamo come si procede per valutare il segno di una funzione razionale fratta, cominciando ancora una volta ad esaminare un esempio numerico. È assegnata la funzione

$$y=\frac{x^2-9}{x^2-1}. \tag{2}$$

Anche ora non possiamo basarci sul grafico della curva d'equazione (2), dato che non si tratta di una curva che conosciamo. Conviene, piuttosto, ricordare che un'espressione frazionaria è positiva se il numeratore N e il denominatore D hanno lo stesso segno; l'espressione risulta, invece, negativa se N e D hanno segno opposto.
C'è ancora un'osservazione da tenere presente:

$$\text{per } x=\pm 3 \qquad \text{risulta} \qquad y=\frac{9-9}{9-1}=\frac{0}{8}=0;$$

ma

$$\text{per } x=\pm 1 \qquad \text{risulta} \qquad y=\frac{1-9}{1-1}=-\frac{8}{0} \text{ priva di significato.}$$

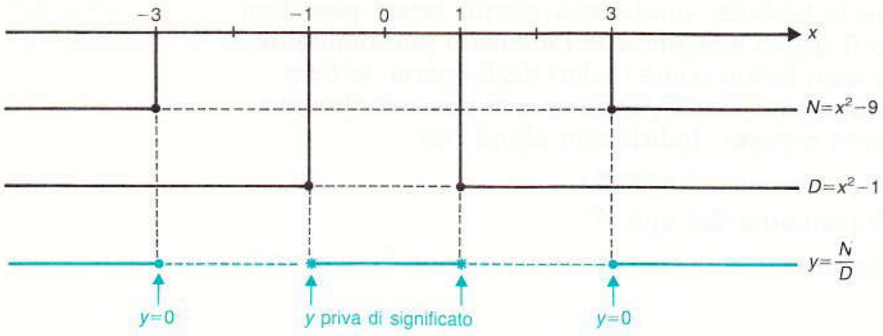


Fig. 23

Bisogna dunque ricordare che i valori di x che annullano il denominatore rendono un'espressione frazionaria priva di significato.

Lo schema di fig. 23 presenta il segno della funzione razionale fratta assegnata.

È chiaro che lo stesso procedimento può essere seguito per esaminare il segno di qualunque funzione razionale fratta, del tipo

$$y=\frac{N}{D}, \tag{3}$$

dove N e D sono due polinomi. In tutti i casi, basta infatti valutare il segno del numeratore N e del denominatore D e tener presente che risulta:

$y>0$ solo se numeratore e denominatore hanno lo stesso segno;
y privo di significato, se risulta $D=0$;
$y=0$ se risulta $N=0$.

7. Un problema di programmazione economica che conduce a disequazioni in due incognite

Molto spesso piccole e grandi industrie debbono risolvere il problema di programmare la produzione per massimizzare i profitti, tenendo conto dei vincoli imposti dai macchinari e dal personale disponibile. La traduzione algebrica di questi problemi conduce allo studio di disequazioni in due incognite. Ecco un esempio.

Una piccola fabbrica di blue-jeans produce due tipi di confezioni, che chiameremo tipo A e tipo B: il tipo A è meglio confezionato e realizzato con stoffa più resistente, mentre il tipo B è meno curato.

Per soddisfare le richieste dei clienti abituali, la fabbrica deve produrre ogni giorno.

del tipo A: non più di 500 pantaloni;

del tipo B: almeno 200 pantaloni, ma non più di 1000.

Inoltre, personale e macchinari non consentono di produrre più di 1200 paia di pantaloni.

Si sa infine che il ricavo per la vendita di ogni capo di tipo A è di L. 8000, mentre per la vendita del tipo B è di L. 4000.

Supponendo che la fabbrica venda ogni giorno tutti i pantaloni prodotti, si chiede qual è il ricavo massimo che l'industria può realizzare.

Pur trascurando tanti fattori come i salari degli operai, le tasse,... il problema si presenta molto complesso, perché non si riesce facilmente a collegare tutte le condizioni esposte. Indichiamo allora con

x il numero di pantaloni del tipo B,
y il numero di pantaloni del tipo A.

Rileggiamo il testo e, man mano, traduciamolo in equazioni. Scriveremo:

$y \leq 500$
$x \geq 200$
$x \leq 1000$
$x+y \leq 1200.$

Inoltre è evidente che risulta:

$y \geq 0.$

Siamo condotti a scrivere un sistema di disequazioni, in cui compaiono anche disequazioni lineari in due incognite come

$x+y \leq 1200.$

8. Disequazioni lineari in due incognite sul piano cartesiano

Cominciamo con l'esaminare alcune delle disequazioni presentate nel paragrafo precedente, rappresentandole sul piano cartesiano

1) $x \geq 200$ (1)

Conosciamo bene il significato dell'equazione

$x=200$:

indica tutti i punti del piano che hanno l'ascissa uguale a 200. Il grafico corrispondente è la retta a parallela all'asse delle y presentata in fig. 24. È facile allora capire che la disequazione

$x>200$

indica tutti i punti del piano che hanno l'ascissa x più grande di 200. Questi punti «riempiono il semipiano a destra della retta a» (in colore in fig. 25).

La disequazione (1) indica dunque tutti i punti che si trovano sul semipiano colorato, compresa la *frontiera* rappresentata dalla retta a.

È chiaro che sul semipiano grigio di fig. 25 si trovano, invece, tutti i punti che soddisfano la disequazione

$x<200.$

2) $y \leq 500$ (2)

L'equazione

$y=500$

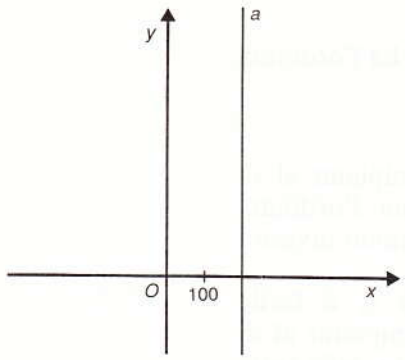


Fig. 24

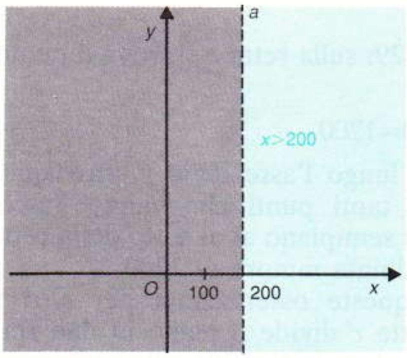


Fig. 25

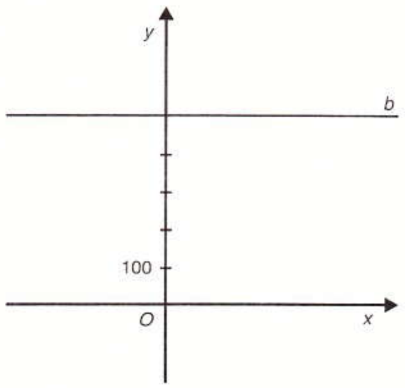


Fig. 26

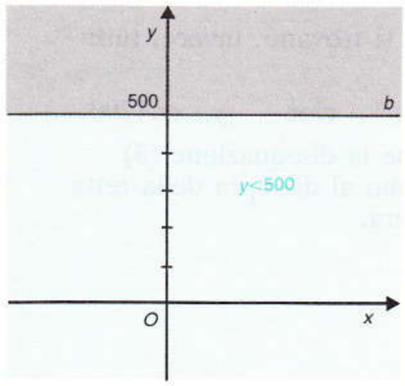


Fig. 27

indica i punti del piano che hanno l'ordinata uguale a 500; questi punti si trovano tutti sulla retta b, parallela all'asse delle x di fig. 26. La disequazione

$$y<500$$

indica ora i punti che hanno l'ordinata più piccola di 500. Questi punti si trovano tutti al di sotto della retta b, nel semipiano colorato di fig. 27. Possiamo dunque concludere che la disequazione (2) indica i punti che si trovano al di sotto della retta b, compresi quelli che si trovano sulla retta b, frontiera della zona.

È chiaro che sul semipiano al di sopra della retta (in grigio in fig. 27) si trovano, invece, tutti i punti che soddisfano la disequazione

$$y>500.$$

3) $\quad x+y\leq 1200 \qquad (3)$

Anche in questo caso è facile rappresentare sul piano l'equazione

$$x+y=1200.$$

Esplicitando la y si ottiene infatti

$$y=-x+1200,$$

che indica tutti i punti della retta c, rappresentata in fig. 28.

Fissiamo ora l'attenzione su un valore di x, per esempio

$$x=0,$$

ed osserviamo la fig. 29: sulla retta c si trova il punto A, che ha l'ordinata y data da

$$y=-0+1200=1200.$$

Se ora ci spostiamo lungo l'asse delle y, troviamo nel semipiano al di sopra della retta c, tanti punti che hanno l'ascissa 0, ma l'ordinata maggiore di 1200; nel semipiano al di sotto della retta c, troviamo invece i punti che hanno l'ordinata minore di 1200.

Ripetendo queste osservazioni per altri valori di x, è facile concludere che la retta c divide il piano in due zone: il semipiano al di sopra della retta (in colore in fig. 30) e il semipiano al di sotto della retta (in grigio in fig. 30).

Al di sopra della retta si trovano tutti i punti con le coordinate, che soddisfano la disuguaglianza

$$y>-x+1200, \qquad \text{cioè} \qquad y+x>1200;$$

al di sotto della retta si trovano, invece, tutti i punti per cui risulta

$$y<-x+1200, \qquad \text{cioè} \qquad y+x<1200.$$

Ora è facile capire che la disequazione (3) caratterizza il semipiano al di sopra della retta c, compresa la frontiera.

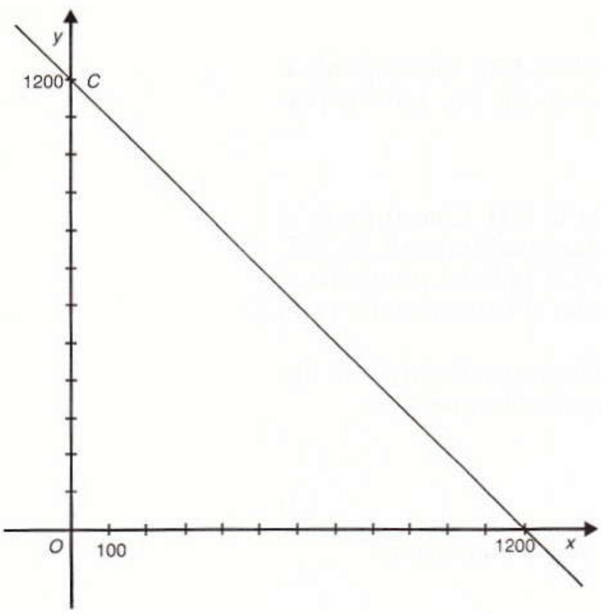


Fig. 28

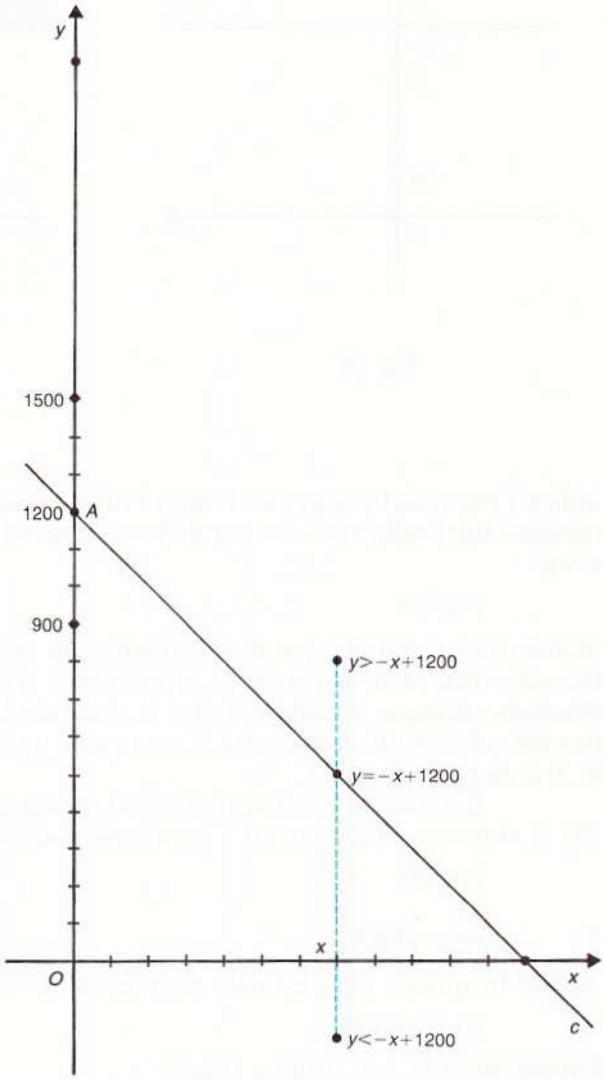


Fig. 29

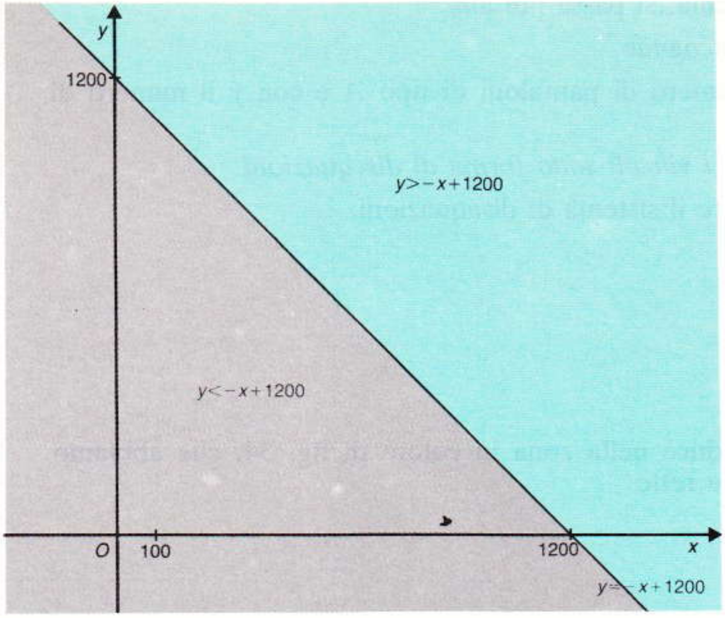


Fig. 30

Da questi esempi si capisce come sia facile rappresentare sul piano cartesiano disequazioni lineari in due incognite. I vari casi che si possono presentare sono riassunti nelle figg. 31, 32, 33.

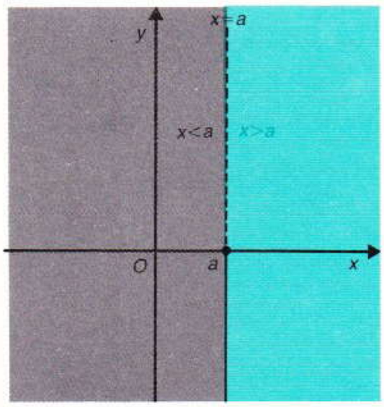


Fig. 31

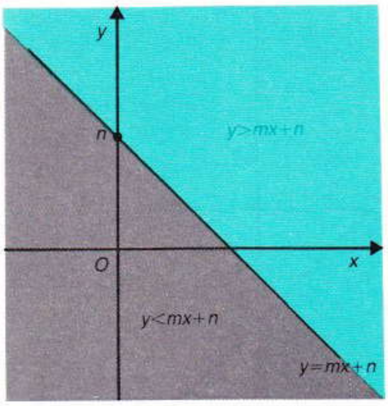


Fig. 32

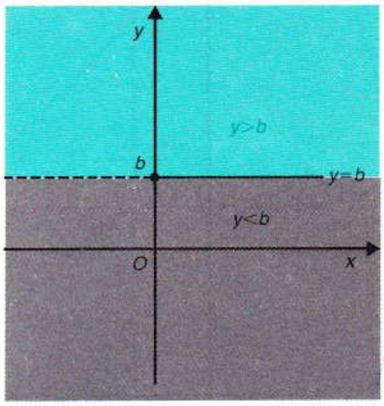


Fig. 33

9. La programmazione lineare

Risolviamo ora il problema proposto nel paragrafo 7. Per decidere come realizzare il ricavo massimo, la ditta di confezioni esamina la sua produzione; i dati a disposizione sono riuniti nella tabella seguente.

Tabella di dati

	vincoli	ricavo
tipo *A*	non meno di 500	L. 8000
tipo *B*	non meno di 200 e non più di 1000	L. 4000

Riflettendo sul problema, si passa poi alla

scelta delle incognite,

indicando con x il numero di pantaloni di tipo A e con y il numero di pantaloni di tipo B e

si esprimono i vincoli sotto forma di disequazioni.

Si arriva così a scrivere il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} y \leq 500 \\ x \geq 200 \\ x \leq 1000 \\ x+y \leq 1200 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Questo sistema si traduce nella zona in colore di fig. 34, che abbiamo ottenuto disegnando le rette

a) $y=500$
b) $x=200$
c) $x=1000$
d) $x+y=1200$ ossia $y=-x+1200$,

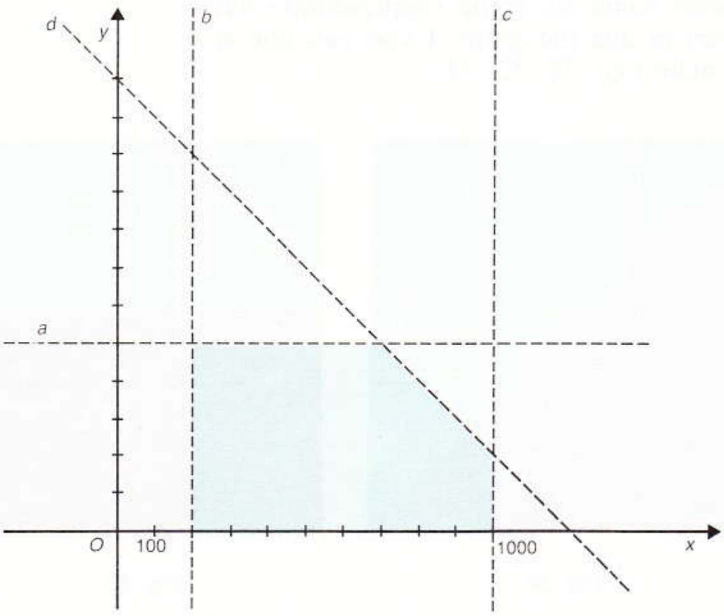


Fig. 34

e considerando le varie disequazioni. Abbiamo dunque indicato *la zona di produzione*, traducendo in grafico la prima parte del problema; in questo modo

si rappresenta graficamente il sistema di disequazioni.

Per passare alla parte finanziaria e calcolare il ricavo massimo, bisogna prima di tutto determinare il ricavo a partire da x ed y; si deve cioè

indicare la funzione obiettivo che si vuole massimizzare.

È chiaro che se dalla vendita di un capo di tipo A si ricavano L. 8000, mentre dalla vendita di un capo B si ricavano L. 4000, dalla vendita di y capi A e x capi B si ottiene un ricavo r, dato da

$$r=4000x+8000y. \qquad (2)$$

Il ricavo r al variare di x ed y è *la funzione obiettivo*, che si vuole *massimizzare*.

Ora è facile rappresentare graficamente la relazione (2): basta esplicitare la y. Si ottiene:

$$y=-\frac{4000}{8000}x+\frac{r}{8000},$$

e dunque un'equazione del tipo

$$y=-\frac{1}{2}x+k,$$

che rappresenta il fascio di rette parallele di pendenza $-\frac{1}{2}$ (fig. 35); k indica, come sempre, l'ordinata del punto di intersezione di ogni retta con l'asse delle y.

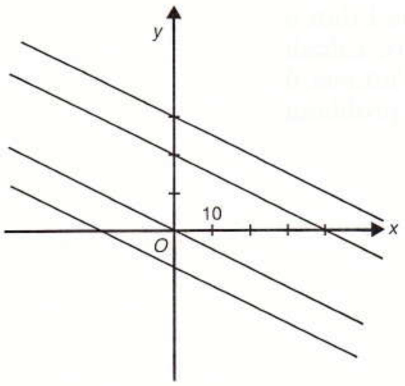


Fig. 35

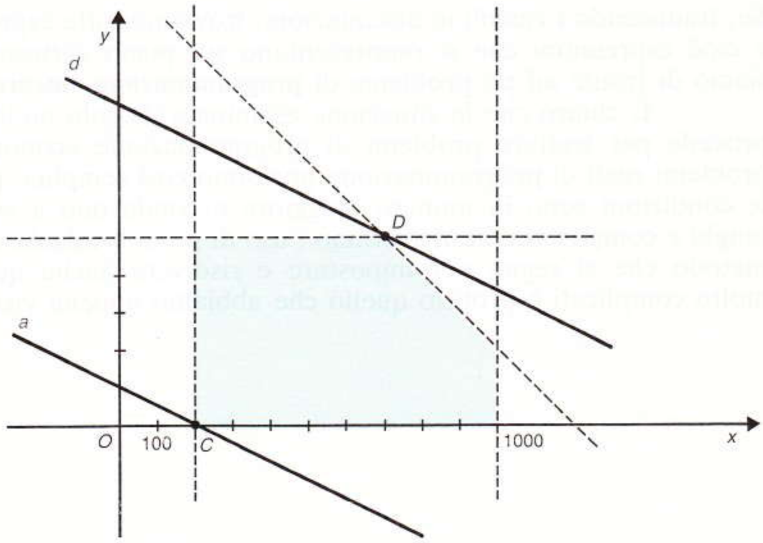


Fig. 36

È chiaro che solo alcune rette del fascio si trovano nella zona di produzione (fig. 36) fra queste rette si distingue la retta a che passa per C e la retta d che passa per D.

Immaginiamo ora una retta del fascio che trasla, a partire dalla posizione a, verso l'alto: il ricavo cresce fino a che la retta assume la posizione d. Dunque la retta a indica la situazione di ricavo minimo e la retta d indica quella di ricavo massimo.

È facile ora determinare il numero dei capi da produrre per avere il ricavo massimo: basta determinare le coordinate del punto D, che si ottengono risolvendo il sistema seguente:

$$\begin{cases} y=500 \\ y=-x+1200. \end{cases}$$

Si ha:

$$y=500$$
$$x=-500+1200=700;$$

si ricava quindi:

$$D(700,500).$$

Si ottiene dunque il ricavo massimo producendo 700 capi di tipo B e 500 capi di tipo A; tale ricavo massimo sarà dato da

$$r=4000\cdot 700+8000\cdot 500=4.800.000.$$

Si è così trovata

la risposta al problema.

In modo analogo si possono risolvere altri problemi di programmazione dello stesso tipo; il procedimento da seguire si basa, in ogni caso, sui seguenti passi;

- esame dei dati e dei vincoli,
- scelta delle incognite,
- espressione dei vincoli sotto forma di un sistema di disequazioni,
- rappresentazione grafica del sistema di disequazioni,
- scelta della funzione obiettivo
- indicazione della risposta al problema.

Se, traducendo i vincoli in disequazioni, troviamo tutte espressioni lineari, e cioè espressioni che si rappresentano sul piano cartesiano con rette, siamo di fronte ad un problema di **programmazione lineare**.

È chiaro che la situazione esaminata dà solo un'idea di come si procede per trattare problemi di programmazione economica. Infatti i problemi reali di programmazione non sono così semplici, perché i dati e le condizioni sono in numero maggiore e conducono a svolgere calcoli lunghi e complicati, che richiedono l'uso di potenti calcolatori. Tuttavia il metodo che si segue per impostare e risolvere anche questi problemi molto complicati è proprio quello che abbiamo appena visto.