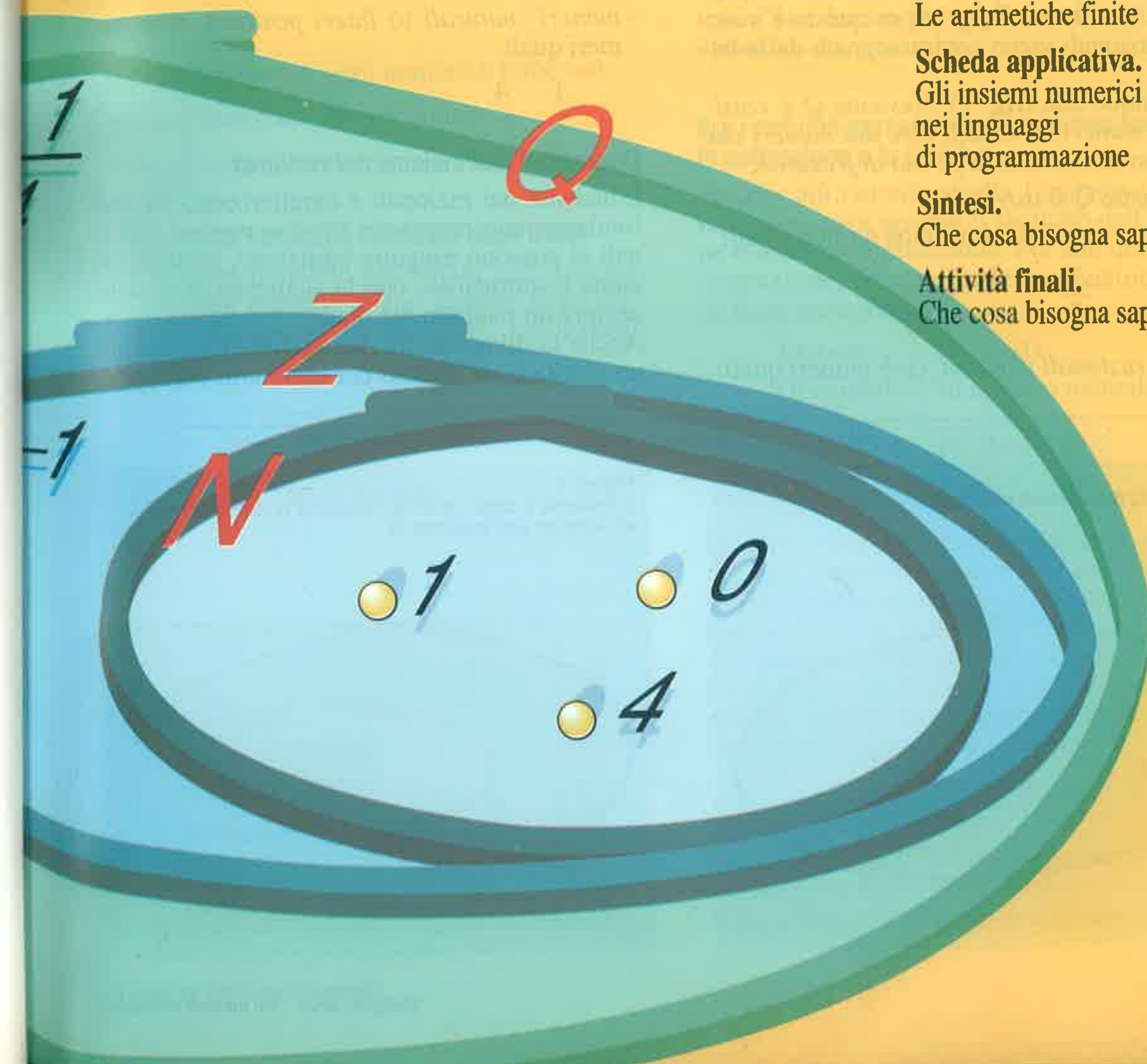
CAPITOLO TERZO

GLI INSIEMI NUMERICI



1 L'insieme dei numeri razionali

L'insieme dei numeri razionali è costituito da tutti i numeri che si possono scrivere sotto forma di frazione.
Il termine *razionale* proviene dalla parola latina *ratio* (rapporto, quoziente) e ricorda che tutti questi numeri si possono ottenere dal *quoziente* di due interi. Proprio per questo l'insieme dei razionali viene contrassegnato dalla lettera Q.
Si ha dunque che (fig. 1) *l'insieme Q è costituito dai numeri razionali, cioè dai numeri che si possono scrivere sotto forma di frazione.*
Nell'insieme Q si trovano:

- *numeri razionali positivi*, cioè numeri quali:

$$\frac{3}{2} \qquad \frac{2}{3}$$

- *numeri razionali negativi*, cioè numeri quali:

$$-\frac{1}{4} \qquad -\frac{2}{7}$$

- *numeri interi*, cioè numeri quali:

$$-1 \quad -5 \quad 0 \quad 1 \quad 4$$

- *numeri naturali* (o *interi positivi*), cioè numeri quali:

$$1 \quad 4$$

Operazioni nell'insieme dei razionali

L'insieme dei razionali è caratterizzato da una fondamentale proprietà: fra due numeri razionali si possono eseguire addizione, moltiplicazione e sottrazione, con la sicurezza di trovare sempre un risultato razionale.
Anche la divisione fra due razionali ha sempre un risultato all'interno dei razionali, con un'unica eccezione: *non si può eseguire la divisione per 0.*
Le operazioni di addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione vengono dette *operazioni razionali.*
È importante ricordare (cfr. anche i paragrafi 2 e 3 del primo capitolo, pp. 13-17) che *le operazioni razionali godono delle seguenti proprietà:*

- commutativa
  $a+b=b+a \qquad a\cdot b=b\cdot a$
- associativa
  $(a+b)+c=a+(b+c) \qquad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
- distributiva
  $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
- esiste l'elemento neutro dell'addizione
  $a+0=a$
- esiste l'elemento neutro della moltiplicazione
  $a\cdot 1=a$
- esiste l'elemento assorbente della moltiplicazione
  $a\cdot 0=0$
- esiste l'opposto di ogni numero a (cioè $-a$)
- esiste il reciproco di ogni numero a
  cioè $\frac{1}{a}$, purché sia $a\neq 0$

L'insieme dei naturali e l'insieme degli interi

Una rappresentazione più chiara dell'insieme dei razionali è quella di fig. 2, dove sono evidenziati, all'interno dei razionali, due insiemi numerici:

- *l'insieme degli interi*, cioè l'insieme che racchiude tutti i numeri del tipo $-3, -1, 0, 1, 4, \ldots$; questo insieme viene contrassegnato abitualmente dalla lettera Z, iniziale del termine tedesco *Zahl*, che significa numero;
- *l'insieme dei numeri naturali*, cioè l'insieme che racchiude tutti i numeri del tipo $0, 1, 4, \ldots$; questo insieme viene contrassegnato abitualmente dalla lettera N.

Fra gli interi non sempre si può eseguire la divisione

Qualche esempio di divisione fra due interi:

$-12:4=-3$ (il risultato è un numero intero);

$-12:5=-\frac{12}{5}$ (il risultato ***non*** è contenuto nell'insieme degli interi).

In conclusione: *la divisione fra due numeri interi non sempre ha risultato intero.*
Questo è legato al fatto seguente: si trovano all'interno degli interi solo i reciproci di 1 e -1 (che sono ancora 1 e -1). Tutti gli altri numeri interi non hanno il reciproco all'interno dell'insieme Z.

Fra i naturali non sempre si possono eseguire la sottrazione e la divisione

Ancora più ristretto risulta l'insieme dei naturali: vi si trova sempre il risultato dell'addizione e della moltiplicazione, ma non quello della sottrazione, né quello della divisione. Ecco qualche esempio:

$12:4=3 \qquad 24-13=11$
(il risultato è un numero naturale);

$12:5=\frac{12}{5} \qquad 13-24=-11$
(il risultato ***non*** è contenuto nei naturali).

In conclusione: *la sottrazione e la divisione fra due numeri naturali non sempre hanno come risultato un numero naturale.*
Questo è legato al fatto seguente: nell'insieme dei naturali si trova solo il reciproco di 1 (che è 1) e l'opposto di 0 (che è 0). Per tutti gli altri numeri naturali non si trova né l'opposto né il reciproco all'interno dell'insieme N.

Uno schema riassuntivo

Le considerazioni finora svolte sono schematizzate nella fig. 3, dove si trovano visualizzate le proprietà valide in ciascun insieme numerico.

Figura 1
L'insieme Q dei numeri razionali

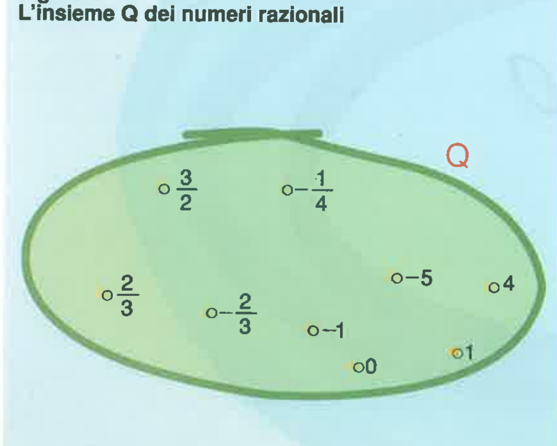


Figura 2
L'insieme Z degli interi e l'insieme N dei naturali all'interno dell'insieme Q

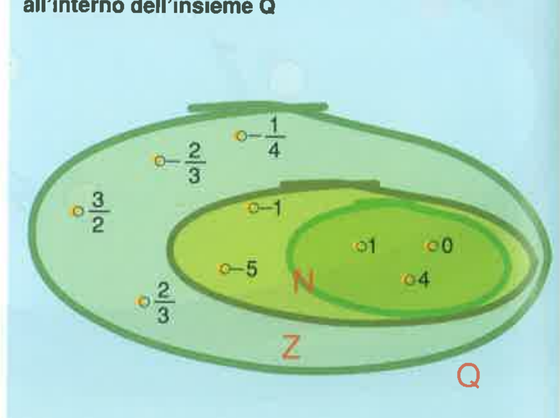
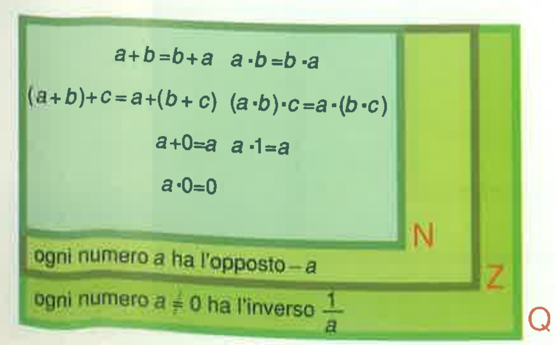


Figura 3
Proprietà nei vari insiemi numerici



Verifiche

Conoscenze

① Quali insiemi sono contrassegnati dalle lettere N, Z, Q?

② Quali numeri si trovano nell'insieme dei razionali?

③ Elencare le operazioni fra due razionali che hanno risultato nell'insieme Q.

④ Elencare le proprietà delle operazioni valide nell'insieme Q.

⑤ Portare degli esempi di operazioni fra due interi che non hanno risultato nell'insieme Z.

⑥ Portare degli esempi di operazioni fra due naturali che non hanno risultato nell'insieme N.

Comprensione

① Spiegare perché è corretto dire che 0 e 1 sono numeri razionali.

② Spiegare perché è sbagliato dire che 0,1 è un numero intero.

③ Esistono dei numeri che sono razionali, ma non interi?

④ Esistono dei numeri che sono interi, ma non razionali?

⑤ Elencare le proprietà delle operazioni che sono valide nell'insieme degli interi e quelle valide nell'insieme dei naturali.

⑥ Spiegare perché nell'insieme dei naturali si trova solo l'opposto di 0.

⑦ Indicare l'insieme numerico da considerare per scrivere l'uguaglianza seguente:

$$-b=a+(-b)$$

⑧ Spiegare perché nell'insieme degli interi si trovano i reciproci solo di 1 e di -1.

⑨ Indicare l'insieme numerico da considerare per scrivere l'uguaglianza seguente:

$$a:b=a\cdot\frac{1}{b}$$

Applicazioni

① Scrivere almeno quattro numeri naturali, quattro numeri interi non naturali, quattro numeri razionali non interi e collocarli nello schema di fig. 4.

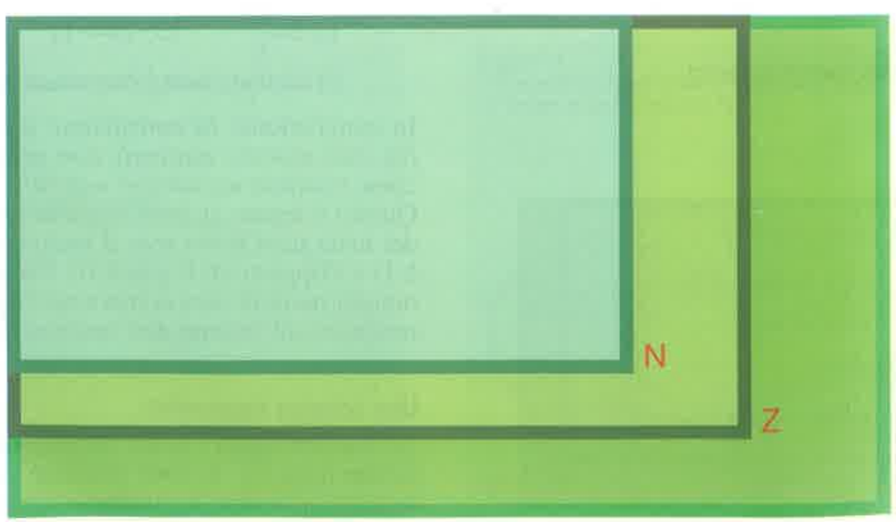
② Collocare nello schema di fig. 4 i numeri seguenti, i loro opposti e i loro reciproci.

$-4 \qquad 6 \qquad 1{,}4 \qquad -0{,}25 \qquad \frac{1}{6} \qquad \frac{5}{7}$

③ Collocare nello schema di fig. 4 il risultato delle seguenti operazioni:

20–19	16–20	30:5
2:(–8)	10–10	–30:30

Figura 4
Uno schema da riempire



2 La rappresentazione dei numeri razionali sulla retta

Rappresentare l'insieme dei numeri naturali

L'insieme dei numeri naturali si può rappresentare con un disegno come quello di fig. 1. Ma questo disegno ha due difetti:

- mostra i numeri in disordine, senza possibilità di ritrovare facilmente un dato numero;
- non mette in evidenza il fatto che si può continuare a contare all'infinito i numeri naturali, senza mai fermarsi.

È per questo che conviene rappresentare i numeri naturali sulla retta.

Rappresentare i numeri naturali sulla retta

Per rappresentare i numeri naturali sulla retta si procede nel modo seguente (fig. 2):

1. si disegna una retta;
2. si fissano sulla retta:
   - un punto O;
   - un segmento OU, unità di misura delle lunghezze;
   - un verso di percorrenza da O verso U, indicato da una freccia;
3. si rappresentano i naturali riportando più volte OU, a partire da O, nel verso fissato.

Così si ha che (fig. 2):

- al punto O corrisponde il numero 0;
- al punto U corrisponde il numero 1;
- al punto A (a distanza 2 da O) il numero 2.

Questa rappresentazione ha due importanti caratteristiche:

- mostra i naturali «in fila ordinata»;

Figura 1
L'insieme dei naturali

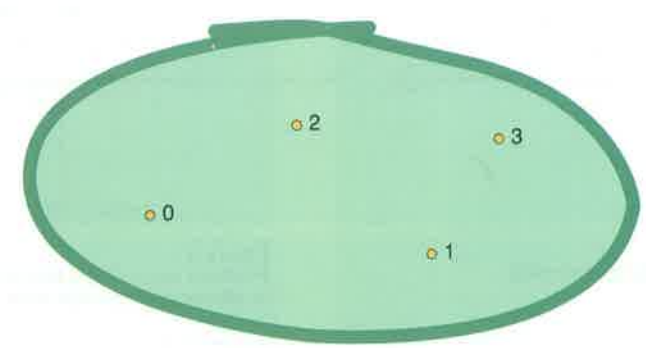


Figura 2
I naturali rappresentati su una retta

- suggerisce l'idea che la retta continui verso destra indefinitamente e così si possono immaginare numeri naturali lontanissimi da O verso destra.

Rappresentare gli intèri sulla retta

La rappresentazione dei naturali sulla retta suggerisce il modo di rappresentare anche gli interi negativi: si riporta più volte il segmento OU a partire da O nel verso opposto a quello fissato.
Così si ha che (fig. 3):

- al punto B (a sinistra di O, a distanza 1) corrisponde il numero –1;
- al punto C (a sinistra di O, a distanza 2) corrisponde il numero –2.

In questo modo anche gli interi sono disposti ordinatamente; inoltre si può immaginare la retta che continua indefinitamente verso sinistra, rappresentando numeri interi negativi lontanissimi da O.

L'insieme degli interi è discreto

La rappresentazione sulla retta mostra una proprietà dell'insieme degli interi: non c'è nessun intero fra 0 e 1 oppure fra –10 e –9; in generale fra due interi consecutivi non si trova nessun intero (fig. 4). Per questo si dice che *l'insieme degli interi è discreto.*
L'aggettivo *discreto* è legato ad un verbo latino che significa «separare» e ricorda che gli interi sono ben separati l'uno dall'altro.

In conclusione, la frase *l'insieme degli interi è discreto* significa che *fra due interi consecutivi non si trova nessun numero intero.*

La rappresentazione delle frazioni

Sulla retta restano tanti spazi vuoti; c'è ancora posto per le frazioni. Qualche esempio (fig. 5):

- per rappresentare $\frac{1}{2}$ si divide a metà il segmento OU con il punto M;
- per rappresentare $\frac{3}{2}$ si riporta 3 volte il segmento OM, a partire da O nel verso scelto, fino ad ottenere il punto P;
- per rappresentare $-\frac{3}{2}$ si riporta 3 volte il segmento OM, a partire da O nel verso opposto a quello scelto, ottenendo il punto Q.

In generale:

- *per rappresentare* $\frac{m}{n}$ *si riporta* m *volte il segmento* $\frac{OU}{n}$ *a partire da O nel verso scelto;*
- *per rappresentare* $-\frac{m}{n}$ *si riporta* m *volte il segmento* $\frac{OU}{n}$ *a partire da O nel verso opposto a quello scelto.*

Rappresentando le frazioni sulla retta, si trova evidentemente (fig. 6) che le frazioni equivalenti:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{6}{12}$$

Figura 3
Gli interi rappresentati su una retta

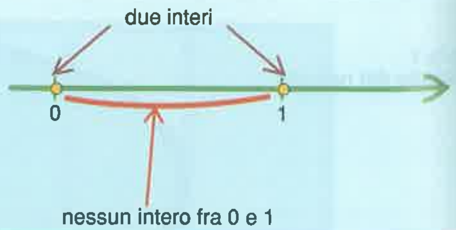


Figura 4
L'insieme degli interi è discreto

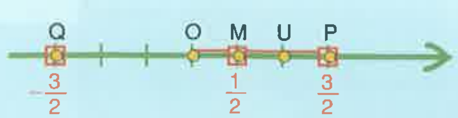


Figura 5
Le frazioni rappresentate su una retta

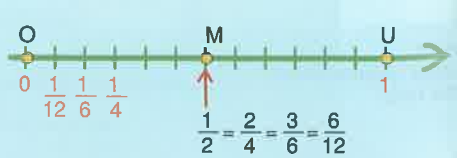


Figura 6
Frazioni equivalenti danno lo stesso punto sulla retta

sono rappresentate tutte dallo stesso punto M.
Questo risultato ha carattere generale: *frazioni equivalenti sono rappresentate dallo stesso punto sulla retta.*

L'insieme dei razionali è denso

Sulla retta sono dunque rappresentate le frazioni, gli interi e i naturali; questo significa che sulla retta è rappresentato l'insieme dei numeri razionali (fig. 7).

Questa rappresentazione mette in evidenza una caratteristica importante dell'insieme Q (fig. 8): fra i numeri 0 e 1 è contenuto $\frac{1}{2}$, fra 0 e $\frac{1}{2}$ è contenuto $\frac{1}{4}$ e così via; in generale fra due razionali si trova sempre un altro razionale.

Dunque, l'insieme dei razionali non è discreto; si dice invece che *l'insieme dei razionali è denso*, frase che significa: *fra due razionali si trova sempre un altro numero razionale.*

La rappresentazione sulla retta mette bene in rilievo il fatto che naturali ed interi si trovano nell'insieme dei razionali; non risulta invece visualizzata la possibilità di separare gli interi o i naturali all'interno dei razionali. Per questo è più adatto il disegno di fig. 1.

Verifiche

Conoscenze

① Elencare gli elementi da fissare sulla retta per potervi rappresentare i razionali.
② Come vengono rappresentate sulla retta due frazioni equivalenti?

Comprensione

① Spiegare il significato della frase: «l'insieme degli interi è discreto».
② Spiegare il significato della frase: «l'insieme dei razionali è denso».
③ Rappresentare sulla retta di fig. 9 i seguenti numeri:

$$-1 \quad -\frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 1$$

Applicazioni

① Disegnare una retta con tutti gli elementi necessari per rappresentarvi i numeri razionali. Rappresentare sulla retta i seguenti numeri:

$$-4 \quad -2 \quad -\frac{3}{4} \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad 2 \quad 4$$

② Sulla retta precedente rappresentare i seguenti numeri:

$$-\frac{6}{8} \quad \frac{2}{8} \quad \frac{16}{8}$$

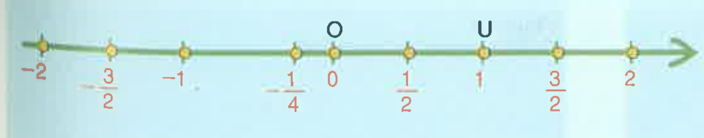


Figura 7
I razionali rappresentati sulla retta

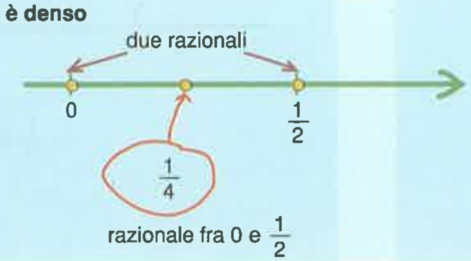


Figura 8
L'insieme dei razionali è denso

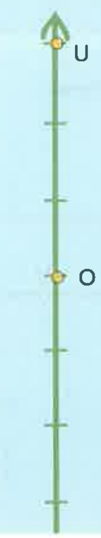


Figura 9
Una retta per rappresentare i razionali

3

L'ordinamento dei numeri razionali

Rappresentazione sulla retta e ordinamento

Questo paragrafo è destinato ad esaminare una notevole caratteristica dell'insieme Q: i numeri razionali si possono disporre «ordinatamente in fila» su una retta (fig. 1). Questo vuol dire che, scelti due qualunque razionali, si può sempre dire che uno precede l'altro.
Ecco due esempi.

I. Scelti 1 e $\frac{3}{2}$, si dice che (fig. 2):

1 precede $\frac{3}{2}$ ossia $1<\frac{3}{2}$

Ovviamente, si può anche dire che:

$\frac{3}{2}$ segue 1 ossia $\frac{3}{2}>1$

Figura 1
I razionali su una retta

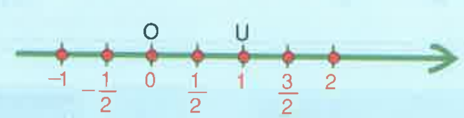
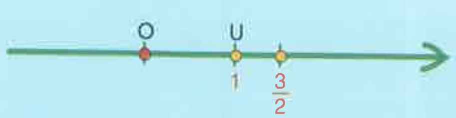


Figura 2
Ordinamento dei razionali



$1<\frac{3}{2}$ (1 precede $\frac{3}{2}$)

$\frac{3}{2}>1$ ($\frac{3}{2}$ segue 1)

Figura 3
Ordinamento dei razionali

$-\frac{1}{2}<0$ ($-\frac{1}{2}$ precede 0)

$0>-\frac{1}{2}$ (0 segue $-\frac{1}{2}$)

II. Scelti 0 e $-\frac{1}{2}$, si dice che (fig. 3):

$-\frac{1}{2}$ precede 0 ossia $-\frac{1}{2}<0$

Oppure:

0 segue $-\frac{1}{2}$ ossia $0>-\frac{1}{2}$

Lo stesso grafico di fig. 1 suggerisce che tutti i razionali sono allineati ordinatamente sulla retta. Per questo si dice che *l'insieme dei razionali è totalmente ordinato.*

In conclusione, la frase «l'insieme dei razionali è totalmente ordinato» vuol dire: *scelti due qualunque numeri razionali si può sempre dire che uno precede l'altro.*

Simboli e parole dell'ordinamento

I simboli < e > sono anche chiamati *simboli di disuguaglianza,* proprio perché si usano per collegare due numeri che sono disuguali:

- il simbolo < si legge «precede», o « è minore di»;
- il simbolo > si legge «segue», o « è maggiore di».

In conclusione, si ha che:

3>2

si legge «3 segue 2» o «3 è maggiore di 2»

2<3

si legge «2 precede 3» o «2 è minore di 3»

Le disuguaglianze per descrivere semirette o segmenti

Spesso in matematica i simboli > e < si uniscono al simbolo = , dando luogo ai simboli ≥ e ≤. Ecco qualche esempio.

A. La formula:

$\boldsymbol{x \geq 2}$

si legge: «2 e tutti i razionali x che seguono 2», oppure: «tutti i razionali x maggiori o uguali a 2».
Perciò questa formula rappresenta la semiretta di fig. 4.

B. La semiretta di fig. 5, costituita da 2 e da tutti i razionali che precedono 2, è descritta dalla seguente formula:

$\boldsymbol{x \leq 2}$

che si legge «2 e tutti i razionali x che precedono 2», oppure «tutti i razionali x minori o uguali a 2».

Figura 4
La semiretta che contiene 2 e tutti i razionali che seguono 2

Figura 5
La semiretta che contiene 2 e tutti i razionali che precedono 2

C. Le due semirette che hanno origine in O (fig. 6) sono caratterizzate da due termini appositi:

$x \geq 0$

che si legge:

«0 e tutti i razionali x positivi»;

$x \leq 0$

che si legge:

«0 e tutti i razionali x negativi».

D. La formula:

$2 \leq x \leq 4$

si legge:

«tutti i razionali x compresi fra 2 e 4».

Ora la doppia disuguaglianza descrive un segmento (fig. 7): nel segmento sono contenuti tutti i numeri compresi fra 2 e 4, estremi inclusi.

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Leggere in tutti i modi proposti dal paragrafo le formule seguenti:

$-2<-1$ $\qquad$ $-1>-2$

$3>0$ $\qquad$ $-3<0$

② Leggere in tutti i modi proposti dal paragrafo le formule seguenti:

$x \leq -1$ $\qquad$ $x \geq -2$

$0 \leq x \leq 4$ $\qquad$ $-3 \leq x \leq 0$

Comprensione

① Collocare 0 e 4 sulla retta e tradurre in formule le seguenti affermazioni:
«4 è positivo» «4 segue 0»
«4 è maggiore di 0» «4 è più grande di 0»

② Collocare 0 e -4 sulla retta e tradurre in formule le seguenti affermazioni:
«-4 è negativo» «-4 precede 0»
«-4 è minore di 0» «-4 è più piccolo di 0»

③ Collocare 0 , 1 e -1 sulla retta e tradurre in formule le seguenti affermazioni:
«0 è compreso fra -1 e 1»
«0 segue -1 e precede 1»
«0 è più grande di -1 e più piccolo di 1»

④ Spiegare il significato della frase: «L'insieme dei razionali è totalmente ordinato».

Applicazioni

① Rappresentare le semirette e i segmenti descritti dalle seguenti formule:

$x \leq -1$ $\qquad$ $x \geq -2$

$0 \leq x \leq 4$ $\qquad$ $-3 \leq x \leq 0$

② Stabilire quali fra le formule seguenti sono corrette e correggere quelle errate, basandosi anche sull'esercizio precedente.

$-3>-1$ $\qquad$ $-1<-2$

$0<2<4$ $\qquad$ $-3<2<0$

③ Rappresentare le semirette descritte dalle seguenti frasi:
«4 e tutti i razionali x che seguono 4»
«i razionali positivi»
«-5 e tutti i razionali che precedono -5»
«i razionali negativi»

Figura 6
Numeri razionali positivi e negativi

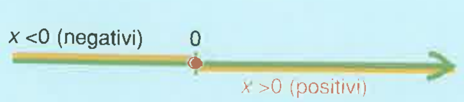
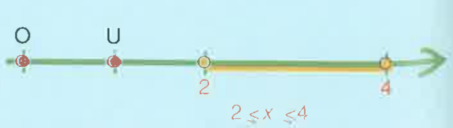


Figura 7
I razionali compresi fra 2 e 4



L'insieme dei numeri del calcolatore tascabile

Il calcolatore non lavora con numeri grandi quanto si vuole

Attività 1

Le tecniche di calcolo «a mano» non conoscono limitazioni: si può operare con numeri grandissimi (per esempio 10^{100}, che ha 100 zeri dopo 1).

Sarà così anche per il calcolatore?

Si può provare ad esplorare le possibilità del calcolatore, svolgendo proprio il calcolo indicato prima ed altri analoghi per completare la seguente tabella:

Calcolo	Tasti	Visualizzatore	Risultato
10^{100}	1 0 y^x 1 0 0 =		
10^{99}		1. 99	$1 \cdot 10^{99}$
$9 \cdot 10^{99}$			
$9{,}99999 \cdot 10^{99}$			

La tabella suggerisce una prima osservazione: i numeri 10^{100} e $9{,}99999 \cdot 10^{99}$, sono troppo grandi per il calcolatore, che non riesce a svolgere i calcoli neanche con la notazione esponenziale.

A quale numero si ferma il calcolatore?

La risposta non è basata direttamente su proprietà matematiche, dipende piuttosto dalle scelte fatte dai costruttori di calcolatori; per questo è bene consultare le istruzioni del proprio calcolatore.

Comunque, si può dare una risposta valida per la maggior parte dei tascabili per uso scientifico: *il calcolatore non lavora con numeri più grandi di* $9{,}9999 \cdot 10^{99}$.

Il calcolatore non lavora con numeri «troppo vicini a zero»

Attività 2

Si possono ora continuare ad esplorare le possibilità del calcolatore, svolgendo i calcoli per completare la seguente tabella:

Calcolo	Tasti	Visualizzatore	Risultato
$0{,}1^{99}$	0 · 1 y^x 9 9	1. -99	$1 \cdot 10^{-99}$
$0{,}1^{100}$			
$0{,}09^{100}$			
$0{,}9999 \cdot 0{,}1^{99}$			

La tabella mostra che il calcolatore non riesce a lavorare con numeri molto vicini a zero come $0{,}1^{100}$: si trova che *la maggior parte dei calcolatori tascabili non può lavorare con numeri positivi più piccoli di* 10^{-99}.

Tuttavia, i vari calcolatori reagiscono diversamente quando si prova a svolgere dei calcoli con numeri positivi più piccoli di 10^{-99} (come $0{,}1^{100}=10^{-100}$):

- in alcuni calcolatori si ottiene un messaggio di errore, analogo a quello dato per un numero troppo grande;
- altri calcolatori invece visualizzano soltanto 0, come se non riuscissero a leggere le cifre dopo tanti zeri.

Limitazioni per i numeri del calcolatore tascabile

Attività 3

Si arriva così ad una prima conclusione, visualizzata in fig. 1.

Il calcolatore lavora con numeri positivi n *che rispettano le seguenti limitazioni:*

$$10^{-99} \le n \le 9{,}9999 \cdot 10^{99}$$

Ma il calcolatore lavora anche con numeri negativi; quali sono le limitazioni in questo caso? La fig. 1 ne suggerisce di analoghe a sinistra di 0; limitazioni che possono essere confermate svolgendo i calcoli per completare la tabella seguente:

Calcolo	Tasti	Visualizzatore	Risultato
$-0{,}1^{99}$	0 · 1 y^x 9 9 = +/–	-1. -99	$-1\cdot 10^{-99}$
$-0{,}1^{100}$			
-10^{99}			
-10^{100}			

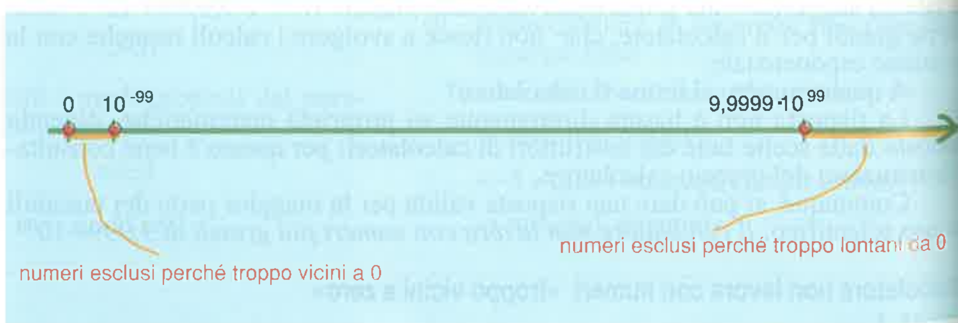


Figura 1
I numeri positivi nel calcolatore tascabile

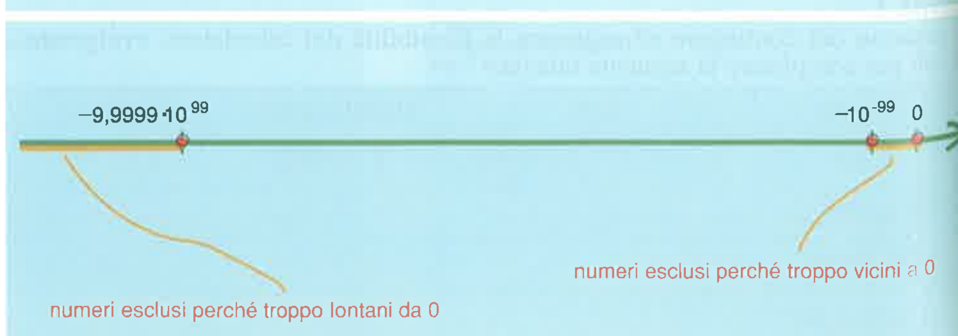


Figura 2
I numeri negativi nel calcolatore tascabile

Si trova così che *il calcolatore lavora con numeri negativi* n *che rispettano le limitazioni seguenti:*

$$-9{,}9999 \cdot 10^{99} \le n \le -10^{-99}$$

La fig. 2 visualizza le conclusioni finora raggiunte.

L'insieme dei numeri del calcolatore tascabile

Per completare la descrizione dei numeri disponibili in un calcolatore tascabile conviene rileggere la scheda «I numeri decimali nel calcolatore tascabile», p. 60, dove si era detto che il calcolatore lavora solo con numeri decimali finiti.

Così, per esempio, il calcolatore non lavora con la frazione $\frac{2}{3}$, ma con il decimale 0,6666667 che approssima la frazione a meno di 10^{-7}.

Ecco allora una descrizione più precisa dell'insieme dei numeri disponibili nel calcolatore (fig. 3). I numeri del calcolatore sono contenuti nei due insiemi seguenti:

A. i razionali positivi n che sono decimali finiti con 7 cifre dopo la virgola e rispettano le limitazioni:

$$10^{-99} \le n \le 9{,}9999 \cdot 10^{99}$$

B. i razionali negativi n che sono decimali finiti con 7 cifre dopo la virgola e rispettano le limitazioni:

$$-9{,}9999 \cdot 10^{-99} \le n \le -10^{-99}$$

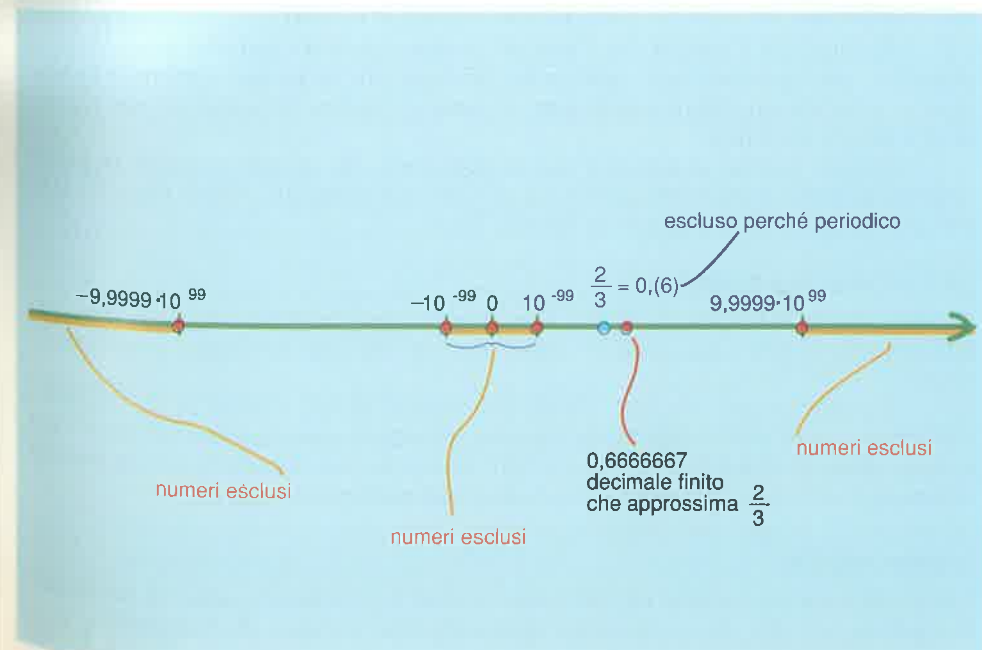


Figura 3
I numeri nel calcolatore

L'insieme dei razionali come ampliamento dei naturali

I numeri naturali

Risalgono alla preistoria le prime tracce dei numeri naturali: ossa di animali che portano incise delle intaccature, probabilmente usate per tenere il conto degli animali: ad ogni animale corrispondeva un'incisione e ogni giorno si controllava che non restassero incisioni senza un animale corrispondente.

Ancora oggi molti popoli primitivi tengono il conto delle pecore allo stesso modo: un'incisione su un tronco corrisponde ad un animale.

Ma questo non significa avere il concetto di numero; questo concetto si sviluppa successivamente ed è suggerito da alcune analogie ricorrenti:

- gli occhi, le orecchie, le braccia, etc. possono essere messi tutti in corrispondenza con le ali di un uccello e queste possono simbolizzare il numero 2;
- le zampe di un cavallo, di un bisonte, etc. possono essere messe in corrispondenza con le zampe di un cane e queste possono simbolizzare il numero 4;
- le dita di una mano possono simbolizzare il numero 5 e così via.

Il numero naturale così generato si basa dunque sul procedimento di mettere in corrispondenza due insiemi; non richiede ancora di *contare*.

È stata fatta l'ipotesi che l'arte del contare sia sorta insieme ai riti religiosi primitivi: per rappresentare i miti della creazione era necessario chiamare i partecipanti secondo un ordine particolare, e forse il contare fu inventato per rispondere a questa esigenza.

Questa ipotesi si accorda con la divisione dei numeri naturali in pari e dispari, i primi considerati femminili e i secondi maschili: simili distinzioni si trovano in molte civiltà sparse su tutta la Terra.

Le frazioni e i numeri decimali

Sembra che le tribù primitive non avessero bisogno delle frazioni: per le necessità pratiche si potevano scegliere unità piccole, che non dovevano essere suddivise.

È nelle grandi civiltà che si trovano le prime tracce delle frazioni. «Inventate» nell'antico Egitto, le frazioni dovettero aspettare ben 35 secoli per vedere definitivamente affermato il loro uso e la loro «traduzione» in numeri decimali: vedi «Le frazioni e i numeri decimali nella storia», p. 62.

I numeri negativi

L'introduzione dei numeri negativi non sembra legata strettamente ad immediati bisogni sociali: che senso può avere infatti togliere 5 «cose» da 3 «cose»?

Sembra perciò che l'introduzione dei numeri negativi sia dovuta all'interesse per indagini matematiche di tipo astratto. Tuttavia questo interesse nasce in epoche molto lontane: si trovano infatti cenni sui numeri col segno e sulle operazioni con questi numeri in tavolette babilonesi del XIX secolo a.C.

Ma i numeri negativi erano tanto lontani dall'uso abituale che, ancora nel Cinquecento, erano chiamati dal matematico italiano Raffaele Bombelli *numeri surdi*, cioè *numeri assurdi*: in effetti – dice Bombelli – è assurdo introdurre dei numeri più piccoli di niente!

Proprio per questo Bombelli nella sua *Algebra* cerca di rendere concreti questi strani numeri, appoggiandosi ad un esempio ancora oggi usato per introdurre i numeri negativi: «Se io mi trovassi con 15 scudi e fossi in debito di 20, una volta che avessi dato i 15, resterei debitore solo di 5, cioè avrei meno 5».

Operazioni impossibili e successivi ampliamenti dei naturali

Questa storia dei numeri a grandi tappe arriva dunque alla fine del Cinquecento con i numeri naturali, le frazioni, i numeri decimali ed i numeri negativi che compaiono nelle opere dei matematici o nei calcoli commerciali.

Tuttavia, i matematici dell'epoca continuavano a distinguere le operazioni in due categorie:

- *le operazioni dirette* (addizione e moltiplicazione), che erano *sempre possibili*, nel senso che la somma o il prodotto di due numeri naturali è sempre un numero naturale;
- *le operazioni inverse* (sottrazione e divisione) che erano *possibili solo sotto certe condizioni*.

Così si diceva che, per esempio, erano possibili solo operazioni come le seguenti:

$$5-3 \qquad 12:6 \qquad 0:4$$

che avevano come risultato dei numeri naturali.

Ma, a partire dal Seicento, comincia un'indagine approfondita sul concetto di numero; questa indagine, dopo più di due secoli, arriva alle conclusioni seguenti.

I. L'operazione di sottrazione può essere sempre possibile: basta considerare, oltre ai numeri naturali, i numeri negativi; si ottiene così l'insieme dei numeri interi.

II. Anche l'operazione di divisione può essere quasi sempre possibile: basta considerare, oltre ai numeri interi, anche le frazioni; cioè bisogna lavorare nell'insieme dei numeri razionali. Rimane però impossibile la divisione per 0.

Si arriva allora ad un'importante conclusione: *il termine «possibile» o «impossibile» non caratterizza una data operazione, ma è legato all'insieme di numeri in cui l'operazione agisce*.

In particolare, lavorando nell'insieme dei razionali, sono sempre possibili le quattro operazioni – addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione – con un'unica eccezione: la divisione per 0.

Il principio di conservazione delle proprietà formali

È solo alla fine del secolo scorso che lo studio sui fondamenti della matematica diventa più approfondito e sistematico; così si riflette anche sugli insiemi numerici. In particolare, si stabilisce che:

- gli interi e i razionali possono essere introdotti ampliando l'insieme dei numeri naturali;
- un insieme di numeri ottenuto ampliando i naturali deve rispettare alcune fondamentali condizioni.

Fra le condizioni da rispettare per ampliare correttamente i naturali si segnalano le seguenti:

1. nel nuovo insieme numerico è contenuto l'insieme dei naturali;
2. nel nuovo insieme si possono eseguire sempre l'addizione e la moltiplicazione e queste operazioni godono di tutte le proprietà valide per i naturali.

Queste condizioni, esposte in modo rigoroso nel 1867 dal matematico tedesco Hermann Hankel, sono note con il nome di «principio di conservazione delle proprietà formali».

Come si applica il principio di conservazione delle proprietà formali

Ecco un esempio che permette di capire come si applica questo principio: come si stabiliscono le regole della moltiplicazione fra interi, cioè perché si arriva alla regola dei segni, richiamata qui sotto.

I. $(+5)\cdot(+3)=+15$
II. $(+5)\cdot(-3)=-15$
III. $(-5)\cdot(+3)=-15$
IV. $(-5)\cdot(-3)=+15$

Per arrivare alla regola, si ragiona nel modo seguente:

I. *Se i due numeri sono positivi*, si applicano le regole valide per i naturali.

II. *Se il primo numero è positivo e il secondo è negativo*, si deve stabilire una regola che conservi tutte le proprietà delle operazioni valide per i naturali. Così, per esempio, per calcolare:

$$5\cdot(-3)$$

si considera l'espressione:

$$5\cdot(3-3)$$

e si trova:

$$5\cdot(3-3)=5\cdot[3+(-3)]= \begin{cases} 5\cdot 0=0 & \text{annullamento del prodotto} \\ 5\cdot 3+5\cdot(-3) & \text{proprietà distributiva} \end{cases}$$

Per mantenere le due proprietà, deve risultare:

$$5\cdot 3+5\cdot(-3)=0$$

da cui:

$$5\cdot(-3)=-5\cdot 3$$

III. *Se il primo numero è negativo ed il secondo è positivo*, si stabilisce di nuovo una regola che mantenga le proprietà valide per i naturali. Per esempio, quando si calcola:

$$(-3)\cdot 5$$

deve risultare:

$$(-3)\cdot 5=5\cdot(-3) \qquad \text{proprietà commutativa}$$

Per mantenere la proprietà commutativa, deve allora risultare:

$$5\cdot(-3)=(-3)\cdot 5=-5\cdot 3$$

IV. *Se ambedue i numeri sono negativi*, si ripete il procedimento seguito per la regola II.
Per esempio, per calcolare:

$$(-5)\cdot(-3)$$

si considera l'espressione:

$$-5\cdot[3+(-3)]$$

e si trova:

$$-5\cdot[3+(-3)]= \begin{cases} -5\cdot 0=0 & \text{annullamento del prodotto} \\ -5\cdot 3+(-5)\cdot(-3) & \text{proprietà distributiva} \end{cases}$$

Per mantenere le due proprietà , deve essere:

$$-5\cdot 3+(-5)\cdot(-3)=0$$

da cui:

$$(-5)\cdot(-3)=5\cdot 3$$

La regola dei segni, dunque, permette di ampliare i naturali con gli interi negativi, mantenendo però tutte le proprietà valide per i naturali.

Ragionamenti analoghi permettono di ampliare l'insieme degli interi, fino ad ottenere l'insieme dei razionali (fig. 1).

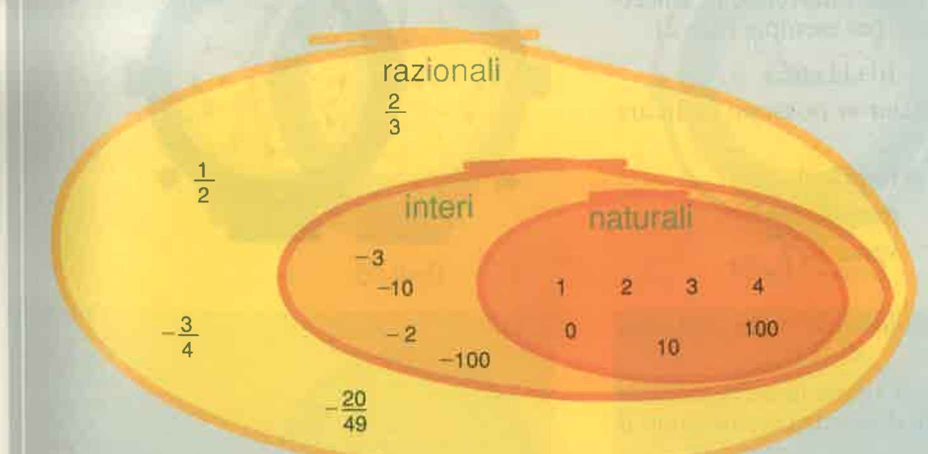


Figura 1
L'insieme dei razionali

4 Gli insiemi numerici finiti

Due insiemi numerici finiti

I calcoli della vita di tutti i giorni non si svolgono solo con i numeri razionali; ci sono anche due insiemi numerici molto particolari, costruiti a partire dai naturali:

- i numeri dell'orologio;
- i numeri che indicano i giorni della settimana.

I numeri dell'orologio, rappresentati in fig. 1, possono essere indicati così:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Questi numeri costituiscono un insieme *finito,* perché l'insieme contiene un numero *finito* di elementi, in questo caso 12 elementi.
La fig. 1 suggerisce anche un metodo particolare di eseguire le addizioni, muovendo le lancette dell'orologio; si trova per esempio (fig. 2):

8+4=0 10+11+6=3

I giorni della settimana si possono indicare così:

domenica=0	lunedì=1
martedì=2	mercoledì=3
giovedì=4	venerdì=5
sabato=6	

Si ottiene così un altro insieme finito, che contiene 7 elementi.

Anche questi numeri si ripetono ciclicamente: dopo il sabato torna la domenica e cioè dopo il 6 si ritrova lo 0.

Si può allora pensare di disporre questi numeri su una specie di «orologio con 7 numeri», come in fig. 3, in modo da svolgere facilmente le addizioni; così si trova, per esempio (fig. 4):

6+5=4 5+4+6=1 5+6+6+6=2

Numeri della settimana e resti della divisione per 7

È proprio necessario ricorrere all'orologio con 7 numeri per eseguire l'addizione con i numeri della settimana? Certamente no, se si riflette meglio sui calcoli finora eseguiti; ecco che cosa si trova:

6+5=4

ottenuto eseguendo 6+5=11 e poi 11–7=4;

5+4+6=1

ottenuto eseguendo 5+4+6=15 e poi 15–2·7=1;

5+6+6+6=2

ottenuto eseguendo 5+6+6+6=23 e poi 23–3·7=2.

Le ultime uguaglianze conducono ad interpretare i risultati così:

4 è il resto della divisione di 11 per 7;
1 è il resto della divisione di 15 per 7;
2 è il resto della divisione di 23 per 7.

In questo modo, si possono indicare delle regole per addizionare i numeri della settimana senza alcun supporto grafico:

I. si addizionano i numeri con le regole valide per i naturali;

II. si divide la somma per 7 e se ne determina il resto;

III. il resto è il risultato dell'addizione fra i numeri della settimana.

Si ha così un particolare insieme di numeri: *è un insieme finito,* perché è costituito da soli 7 elementi.
Tuttavia, questo insieme è *chiuso rispetto all'addizione:* si possono addizionare ripetutamente più elementi dell'insieme, ottenendo un risultato che è ancora contenuto nell'insieme.
Questo risultato è legato al particolare modo di leggere i numeri considerati: *0, 1, ..., 6 non sono più i soliti numeri naturali, ma indicano i resti della divisione di un qualunque numero naturale per 7.*

Insiemi numerici finiti costruiti con i resti della divisione

Quest'ultimo punto di vista si presta ad essere facilmente generalizzato: si può estendere subito ai numeri dell'orologio, considerando i resti della divisione per 12.
In conclusione si trova che:

I. i numeri 0, 1, ..., 6, che si ripetono ciclicamente per rappresentare i giorni della settimana, sono i resti della divisione per 7; questi 7 numeri costituiscono un insieme numerico finito, chiuso rispetto all'addizione;

II. i numeri 0, 1, 2, ..., 11, disposti sull'orologio, rappresentano i resti della divisione per 12; questi 12 numeri costituiscono un altro insieme numerico finito, chiuso rispetto all'addizione.

Queste conclusioni hanno una notevole importanza teorica, perché indicano un procedimento che può essere ripetuto per creare tanti altri insiemi numerici finiti: saranno insiemi che non sono più direttamente collegati alla vita reale, ma hanno interesse prevalentemente matematico.

Figura 1
I numeri dell'orologio

Figura 2
Addizione sull'orologio

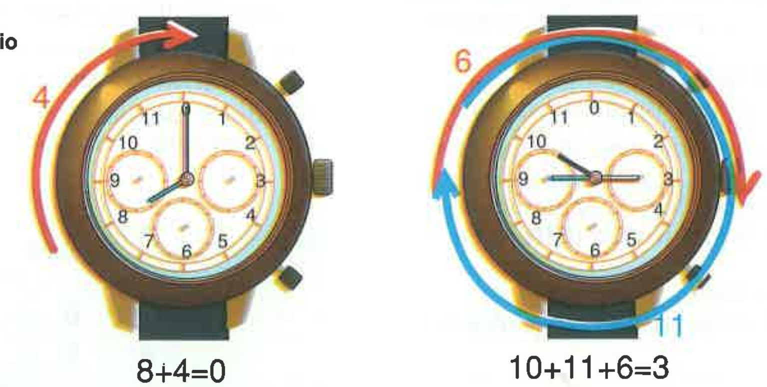


Figura 3
I numeri che indicano i giorni della settimana si ripetono ciclicamente

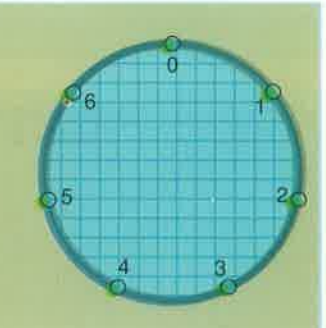
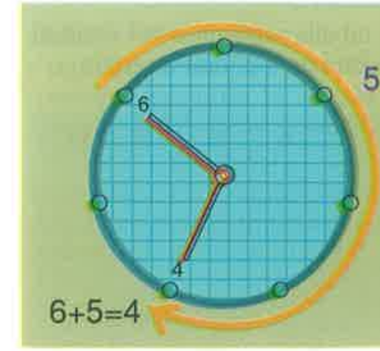


Figura 4
Addizione con i numeri che indicano i giorni della settimana



Il più piccolo insieme finito è quello costruito con i resti della divisione per 2: è costituito solo dai numeri 0 e 1.

E si può continuare ad inventare:

- con i resti della divisione per 3 si ottiene l'insieme costituito da 0, 1, 2;
- con i resti della divisione per 4 si ottiene l'insieme costituito da 0, 1, 2, 3; e così via.

Il prossimo paragrafo sarà destinato appunto a studiare le proprietà aritmetiche valide in questi particolari insiemi finiti.

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Elencare i numeri dell'orologio e descrivere le regole per eseguire l'addizione fra due di questi numeri.

② Elencare i numeri usati per indicare i giorni della settimana e descrivere le regole per eseguire l'addizione fra due di questi numeri.

Comprensione

① Considerare l'insieme costituito dai numeri naturali 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, addizionati secondo le abituali regole dell'addizione fra interi e rispondere alle seguenti domande:
a. l'insieme è finito?
b. l'insieme è chiuso rispetto all'addizione?

② Considerare l'insieme costituito dai numeri 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, resti della divisione per 7 e, appoggiandosi ad opportuni esempi, spiegare il significato delle seguenti frasi:
a. l'insieme è finito;
b. l'insieme è chiuso rispetto all'addizione.

Applicazioni

① Completare la tabella seguente con i risultati dell'addizione fra i numeri dell'orologio.

+	0	1	3	6	8	9	11
0							
1							
6							
9							
11							

② Completare la tabella seguente con i risultati dell'addizione fra i numeri che indicano i giorni della settimana.

+	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

Collegamento con il capitolo precedente

① Considerare l'insieme A dei numeri naturali scritti per mezzo delle cifre 0 e 1, secondo la numerazione binaria, e rispondere alle seguenti domande:
a. l'insieme è chiuso rispetto all'addizione?
b. l'insieme è finito?

② Considerare l'insieme B costituito dai numeri 0 e 1, resti della divisione per 2, e rispondere alle seguenti domande:
a. l'insieme è chiuso rispetto all'addizione?
b. l'insieme è finito?

③ Esaminare le due tabelle qui sotto e rispondere alle domande seguenti:
a. quale tabella descrive l'addizione fra interi scritti nel sistema binario?
b. quale tabella descrive l'addizione fra i resti della divisione per 2?

Tabella A

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Tabella B

+	0	1
0	0	1
1	1	0

5 Le aritmetiche finite

Dal paragrafo precedente si ricava un modo rapido per costruire insiemi numerici finiti: considerare i resti della divisione per un dato intero. Per esempio, si possono considerare i resti della divisione per 3, per 4, per 5, etc.
In ciascun insieme si può poi introdurre l'addizione e la moltiplicazione e, quindi, studiare le proprietà di queste operazioni introdotte. Si ottiene così *un'aritmetica finita*.

Un primo esempio di aritmetica finita: i resti della divisione per 3

I resti della divisione per 3 sono 0, 1 e 2.
L'addizione e la moltiplicazione in questo insieme sono descritte dalle tabelle seguenti, che si leggono come l'abituale tavola pitagorica.

Addizione

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Moltiplicazione

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Su queste tabelle si trovano dei risultati insoliti, che però è facile spiegare: le operazioni si eseguono con i criteri indicati nel paragrafo precedente e richiamati nella tabella che segue.

Regole
I. si esegue l'operazione secondo le regole valide per i naturali
II. si divide il risultato per 3 e si calcola il resto
III. il resto è il risultato dell'operazione

Studiando le operazioni ora introdotte, si trovano delle notevoli proprietà:

- l'addizione e la moltiplicazione sono commutative;
- 0 è l'elemento neutro dell'addizione;
- 1 è l'elemento neutro della moltiplicazione.

Osservando la tabella dell'addizione, si trova in ogni riga 0; in particolare:

- risulta 0+0=0 perciò l'opposto di 0 è 0;
- risulta 1+2=2+1=0 perciò l'opposto di 1 è 2 e viceversa.

Si trova dunque che:

- ogni elemento ha un opposto e perciò si può sempre eseguire la sottrazione fra due elementi dell'insieme: basta sommare al primo l'opposto del secondo.

Esaminando poi la tabella della moltiplicazione, si scopre che 0, moltiplicato per qualunque numero, dà come prodotto 0, cioè:

- il numero 0 è l'elemento assorbente della moltiplicazione.

Inoltre si trova che:

$1 \cdot 1 = 1$ perciò l'inverso di 1 è 1;

$2 \cdot 2 = 1$ perciò l'inverso di 2 è 2.

Questo vuol dire che:

- ogni elemento diverso da 0 ha un inverso e perciò si può sempre eseguire la divisione fra due elementi dell'insieme: basta moltiplicare il primo per l'inverso del secondo.

È immediato infine verificare che:

- vale la proprietà associativa per addizione e moltiplicazione;
- vale la proprietà distributiva.

I resti della divisione per 3 si comportano come i razionali

Si arriva così alle seguenti conclusioni:

- *l'insieme dei resti della divisione per 3 è un insieme finito, costruito a partire dai numeri naturali;*
- *addizione e moltiplicazione in questo insieme finito godono delle stesse proprietà valide nell'insieme dei razionali.*

Questo insieme è dunque una specie di «modello in miniatura» dell'insieme dei razionali.

Un secondo esempio di aritmetica finita: i resti della divisione per 4

Non sempre un insieme di resti si comporta come quello esaminato prima; ecco un secondo esempio: i resti della divisione per 4, e cioè 0, 1, 2 e 3.

L'addizione e la moltiplicazione in questo insieme operano in modo analogo al caso precedente; si ottengono perciò i risultati presentati nelle seguenti tabelle:

Addizione

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Moltiplicazione

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Si ritrovano dunque molte proprietà valide nel caso precedente, e cioè:

- l'addizione e la moltiplicazione sono commutative;
- 0 è l'elemento neutro dell'addizione;
- 1 è l'elemento neutro della moltiplicazione.

Inoltre, nella tabella dell'addizione, si trova in ogni riga 0; in particolare risulta:

$0+0=0$ perciò l'opposto di 0 è 0;

$3+1=1+3=0$ perciò l'opposto di 3 è 1 e viceversa;

$2+2=0$ perciò l'opposto di 2 è 2.

Questo vuol dire che:

- ogni elemento ha un opposto e perciò si può sempre eseguire la sottrazione.

Sulla tabella della moltiplicazione si ritrova poi che:

- 0 è elemento assorbente della moltiplicazione.

Sembra proprio di avere ancora una volta tutte le proprietà valide per i razionali; ma non è così. La tabella della moltiplicazione presenta infatti un risultato che non si verifica mai nei razionali:

$2 \cdot 2 = 0$

Questo vuol dire che il prodotto vale 0, ma nessun fattore vale 0, cioè:

- non vale la legge di annullamento del prodotto.

Strettamente legato a questo inconsueto risultato ce n'è un altro: nella riga corrispondente a 2 manca il risultato 1; questo vuol dire che, oltre a 0, anche 2 non ha inverso.

Risulta dunque:

$1 \cdot 1 = 1$ perciò l'inverso di 1 è 1;

$3 \cdot 3 = 1$ perciò l'inverso di 3 è 3;

ma:

- 0 e 2 non hanno inverso, perciò non è possibile dividere né per 0, né per 2.

I resti della divisione per 4 non si comportano come i razionali

Si arriva dunque ad una conclusione diversa da quelle precedenti: *nell'insieme dei resti della divisione per 4 addizione e moltiplicazione* ***non*** *godono di tutte le proprietà valide nell'insieme dei razionali.*

In particolare:

- non vale la legge di annullamento del prodotto;
- non è possibile dividere per 2, perché 2 non ha inverso.

Confronto fra i due esempi

Le conclusioni relative ai due esempi esaminati presentano dunque delle notevoli differenze, che possono essere riassunte nel modo seguente:

- i resti della divisione per 3 si comportano come i razionali;
- i resti della divisione per 4 *non* si comportano come i razionali, perché *non* vale la legge di annullamento del prodotto.

Ci si chiede allora: che cosa si può prevedere per altri insiemi di resti? Come si comporteranno i resti della divisione per 5? E i resti della divisione per 6?

Per fare delle previsioni si può cercare di capire l'origine del particolare comportamento del secondo esempio. Tutto sembra legato al risultato seguente:

$2 \cdot 2 = 0$

Questo risultato si trova perché 4, nell'insieme dei naturali, non è un numero primo, ma si scompone nella forma:

$4 = 2 \cdot 2$

E così, moltiplicando 2 per se stesso, si riproduce 4, che, nell'insieme dei resti, dà luogo al resto 0.

Tutto questo non succede nei resti della divisione per 3, perché 3 è un numero primo, cioè non si può scomporre in fattori.

Il ragionamento seguito può essere ripetuto per esaminare il comportamento dei resti negli altri casi; si troverà dunque che:

- *i resti della divisione per un numero primo si comportano come i razionali;*
- *i resti della divisione per un numero che* ***non*** *è primo* ***non*** *si comportano come i razionali, perché* ***non*** *vale la legge di annullamento del prodotto.*

Verifiche

Conoscenze

① Riprodurre le tabelle relative all'addizione e alla moltiplicazione nell'insieme dei resti della divisione per 3 e per 4.

② Elencare le proprietà delle operazioni valide nell'insieme dei razionali e nell'insieme dei resti della divisione per 3.

③ Elencare le proprietà delle operazioni che valgono nell'insieme dei razionali, ma non valgono nell'insieme dei resti della divisione per 4.

Comprensione

① Spiegare come si eseguono l'addizione e la moltiplicazione nell'insieme dei resti della divisione per 3.

② Spiegare perché nell'insieme dei resti della divisione per 3 si può dividere per qualunque numero (escluso 0).

③ Spiegare come si eseguono l'addizione e la moltiplicazione nell'insieme dei resti della divisione per 4.

④ Spiegare perché nell'insieme dei resti della divisione per 4 non vale la legge di annullamento del prodotto.

⑤ Spiegare perché nell'insieme dei resti della divisione per 4 non si può dividere per 2.

Applicazioni

① Compilare le tabelle relative all'addizione e alla moltiplicazione nell'insieme dei resti della divisione per 5.

② Esaminare l'aritmetica costruita nell'insieme dei resti della divisione per 5.

③ Compilare le tabelle relative all'addizione e alla moltiplicazione nell'insieme dei resti della divisione per 6.

④ Esaminare l'aritmetica costruita nell'insieme dei resti della divisione per 6.

Gli insiemi numerici finiti nei linguaggi di programmazione

Bit e word

Un calcolatore elettronico rappresenta i numeri per mezzo di appositi circuiti che possono assumere due stati diversi, chiamati convenzionalmente 0 e 1.

Per semplificare il discorso, si può immaginare, al posto del circuito, una casella dove si può scrivere 0 oppure 1, cioè una cifra binaria (cfr. il par. 5 del secondo capitolo, p. 70); questa casella si chiama *bit*, dal termine inglese *binary digit*.

Ma, per memorizzare un numero, il calcolatore può occupare solo un determinato numero di bit; questo numero di bit prende il nome di *word*, termine inglese che significa «parola».

Dunque, il termine *word* indica il numero di bit che si possono occupare per registrare un numero nella memoria di un calcolatore.

Memorizzare i numeri interi su un personal computer

Il problema di rappresentare i numeri interi in un personal computer è legato a due tipi di scelte possibili:

- la scelta del tipo di calcolatore;
- la scelta del linguaggio per comunicare con il calcolatore.

Per quanto riguarda il calcolatore, molte macchine dispongono di word di 16 bit, altre dispongono di word di 8 bit, che però possono essere accoppiate.

Nella maggior parte dei casi dunque, *si hanno a disposizione 16 bit per rappresentare un numero intero.*

Sarà poi il linguaggio di programmazione che deciderà come gestire una word: se occuparla tutta o solo in parte o, addirittura, accoppiare più word. Ecco un breve panorama dei casi più frequenti.

Rappresentazione degli interi nel linguaggio Pascal

Il linguaggio Pascal, per rappresentare un numero intero, occupa completamente una word di 16 bit nel modo seguente (fig. 1):

- un bit per il segno;
- i restanti 15 bit per rappresentare il numero.

Questo vuol dire che il più grande intero che si può rappresentare è:

$$+111111111111111_2=+32\,767$$

Che cosa succede se, nel corso dei calcoli, si arriva ad un risultato che supera queste limitazioni?

In questi casi il calcolatore non invia un messaggio di errore, ma dà il risultato come se gli interi disponibili fossero sistemati su una circonferenza (fig. 2); per esempio, si ottiene:

$$32\,767+1=-32\,768$$

Rappresentazione degli interi nel linguaggio Forth

Anche in questo linguaggio, per rappresentare un intero si usa completamente una word di 16 bit e, quindi, il massimo numero che si può rappresentare è sempre 32 767.

Ma ora viene risolto in modo diverso il problema di un risultato che supera il limite previsto: vengono memorizzati solo i 16 bit più a destra del risultato e gli altri vengono cancellati, senza inviare alcun messaggio d'errore.

Così, per esempio, si ottiene:

$$1000\cdot 1000=16\,960$$

Questo risultato si spiega ricordando che, ovviamente, risulta:

$$1000\cdot 1000=1\,000\,000$$

Ma risulta anche, nel sistema binario:

$$1\,000\,000=11110100001001000000_2$$

Il numero scritto nel sistema binario presenta 20 cifre, di cui solo le ultime 16 sono conservate; perciò il risultato memorizzato dal calcolatore è appunto:

$$0100001001000000_2=16\,960$$

Rappresentazione degli interi nel linguaggio Basic

Il Basic è oggi disponibile su tutti i personal computer, anche i più piccoli ed economici.

Anche questo linguaggio rappresenta un numero intero occupando una word di 16 bit e, quindi, il massimo numero accettabile è sempre 32 767. Tuttavia si trova una notevole differenza rispetto ai due casi precedenti: quando un risultato supera la limitazione, il calcolatore avverte che non può svolgere il calcolo. Il messaggio visualizzato è il termine inglese *overflow*, che significa «trabocco».

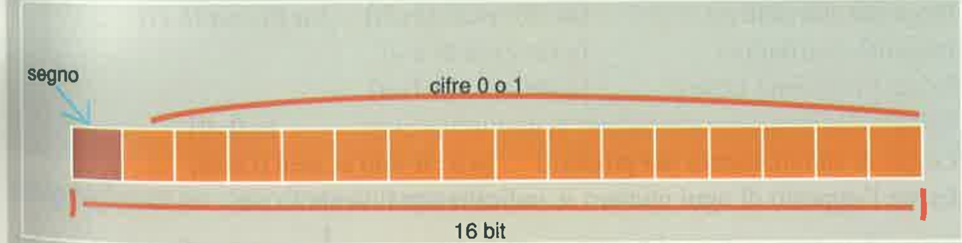


Figura 1
Un intero rappresentato in Pascal

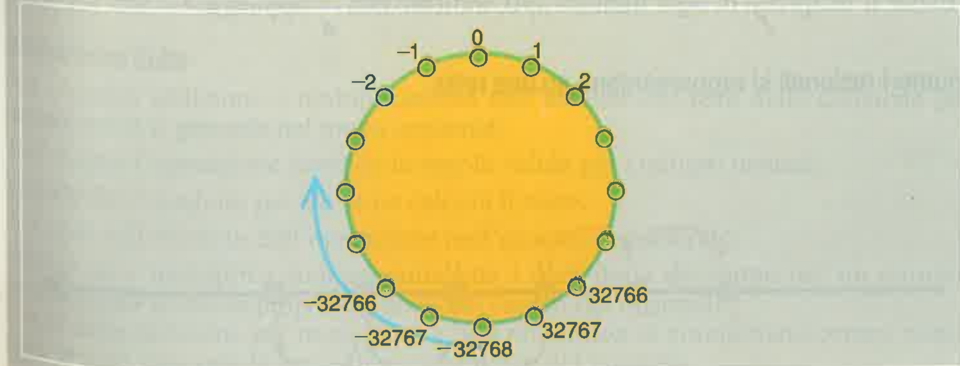


Figura 2
L'insieme Integer nel Pascal

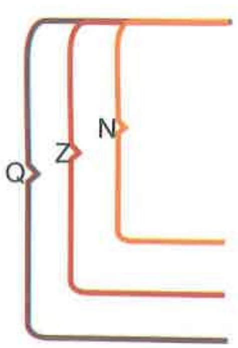
Che cosa bisogna sapere

Numeri razionali

I numeri razionali sono quelli che si possono scrivere sotto forma di frazione. Nell'insieme Q dei numeri razionali si trovano:

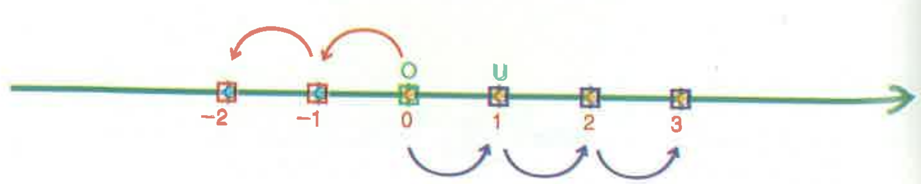
- numeri *razionali positivi* quali $\frac{3}{2}$ $\frac{9}{7}$
- numeri *razionali negativi* quali $-\frac{4}{5}$ $-\frac{12}{11}$
- l'insieme Z dei numeri *interi* quali –5 –3 0 1 25
- l'insieme N dei numeri *naturali* quali 0 1 2 38

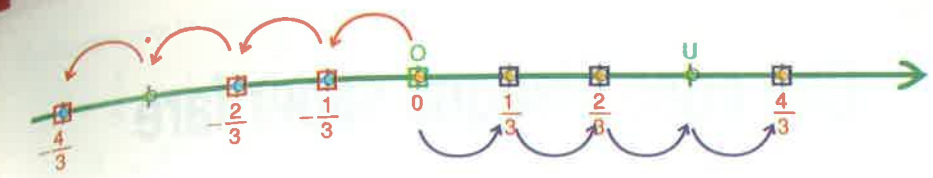
Le proprietà dell'addizione e della moltiplicazione nei vari insiemi numerici



- Proprietà commutativa $[a+b=b+a]$ $[a \cdot b=b \cdot a]$
- Proprietà associativa $[(a+b)+c=a+(b+c)]$ $[(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)]$
- Propretà distributiva $[a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c]$
- Esiste l'elemento neutro $[a+0=a]$ $[a \cdot 1=a]$
- Esiste l'elemento assorbente per la moltiplicazione $[a \cdot 0=0]$
- Legge di annullamento del prodotto [$a \cdot b=0$ **solo se** $a=0$ *o* $b=0$]
- Esiste l'opposto di ogni numero a, indicato con il simbolo $-a$
- Esiste il reciproco di ogni numero $a \neq 0$, indicato con $\frac{1}{a}$ oppure a^{-1}

I numeri razionali si rappresentano su una retta

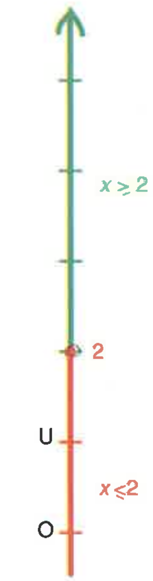




Proprietà dell'insieme dei razionali

L'insieme dei razionali è *denso*: fra due razionali è sempre contenuto un altro razionale.

L'insieme dei razionali è *ordinato*: scelti due razionali si può sempre dire se uno precede l'altro.



Segni di disuguaglianza: > (maggiore), < (minore)

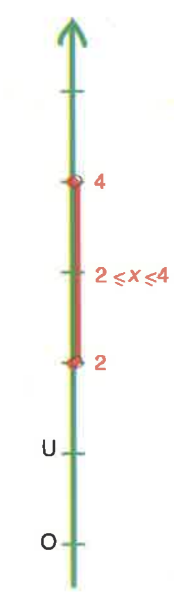
Si scrive	Si legge
3>2	«3 segue 2» oppure «3 è maggiore di 2»
2<3	«2 precede 3» oppure «2 è minore di 3»

Disuguaglianze per descrivere una semiretta

Si scrive	Si legge
$x \geq 2$	« 2 e tutti i razionali x che seguono 2» oppure «tutti i razionali x maggiori o uguali a 2»
$x \leq 2$	« 2 e tutti i razionali x che precedono 2» oppure «tutti i razionali x minori o uguali a 2»

Disuguaglianze per descrivere un segmento

$2 \leq x \leq 4$ che si legge «tutti i razionali x compresi fra 2 e 4»



Aritmetiche finite

Per eseguire addizione e moltiplicazione nell'insieme dei resti della divisione per un numero n si procede nel modo seguente:

1. si esegue l'operazione secondo le regole valide per i numeri naturali;
2. si divide il risultato per n e se ne calcola il resto;
3. il resto è il risultato dell'operazione nell'insieme considerato.

Addizioni e moltiplicazioni eseguite con i resti della divisione per un numero primo hanno le stesse proprietà valide nel campo dei razionali.
I resti della divisione per un numero n non primo ***non*** si comportano come i razionali, perché ***non*** vale la legge di annullamento del prodotto.

Che cosa bisogna saper fare

Questo capitolo è dedicato all'insieme dei numeri razionali ed è completato con qualche idea sulle aritmetiche finite. Le attività connesse alle nozioni introdotte nel capitolo si possono dunque schematicamente suddividere in tre gruppi:

A. Rappresentazione di numeri razionali sulla retta

B. Confronto di razionali

C. Studio di aritmetiche finite

A. Rappresentazione dei numeri razionali sulla retta

Attività 1

Completare il grafico di fig. 1, associando ad ogni punto il corrispondente numero razionale scritto sotto forma di frazione ridotta ai minimi termini.

Attività 2

Disegnare una retta con tutti gli elementi necessari per rappresentare i numeri e rappresentarvi i seguenti numeri razionali:

$$1 \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{7}{6} \quad 0 \quad -1 \quad -\frac{3}{4} \quad -\frac{4}{3} \quad -\frac{1}{12} \quad -\frac{1}{6} \quad -\frac{5}{6} \quad -\frac{7}{6}$$

B. Confronto di numeri razionali

Attività 3

Nell'attività precedente sono stati rappresentati i numeri $\frac{1}{6}$ e -1, che possono essere collegati da una delle due disuguaglianze seguenti:

$\frac{1}{6} > -1$ che si legge «$\frac{1}{6}$ segue -1» o «$\frac{1}{6}$ maggiore di -1»

$-1 < \frac{1}{6}$ che si legge «-1 precede $\frac{1}{6}$» o «-1 minore di $\frac{1}{6}$»

Collegare con le opportune disuguaglianze le seguenti coppie di numeri:

$-\frac{1}{6}$ e -1 $\qquad -\frac{7}{6}$ e -1 $\qquad \frac{7}{6}$ e 1

$\frac{1}{12}$ e $\frac{1}{6}$ $\qquad \frac{3}{4}$ e 1 $\qquad \frac{4}{3}$ e 1

Attività 4

Basandosi anche sullo svolgimento dell'attività precedente, completare le frasi seguenti, sostituendo ai puntini gli aggettivi maggiore o minore.

a. Un numero positivo è sempre .... di un numero negativo.

b. Una frazione positiva $\frac{n}{d}$ è maggiore di 1, quando il numeratore n è .... del denominatore d.

c. Una frazione positiva $\frac{n}{d}$ è .... di 1, quando il numeratore n è minore del denominatore d.

d. Se una frazione positiva $\frac{n}{d}$ è maggiore di 1, la sua inversa $\frac{d}{n}$ è .... di 1.

e. Se una frazione positiva $\frac{n}{d}$ è minore di 1, la sua inversa $\frac{d}{n}$ è .... di 1.

Attività 5

Sulla retta di fig. 2 è indicato il segmento descritto dalla formula:

$$-1 \leq x \leq 0$$

Descrivere con le corrispondenti disuguaglianze gli altri segmenti indicati nella figura.

Attività 6

Disegnare una retta con tutti gli elementi necessari per rappresentarvi i numeri e rappresentare i segmenti o le semirette descritti dalle seguenti disuguaglianze:

$$-2 \leq x \leq -1 \qquad x \leq -3 \qquad 0 \leq x \leq 2 \qquad x \geq 3$$

Spiegare perché non si possono trovare i segmenti descritti dalle seguenti disuguaglianze:

$$-1 \leq x \leq -2 \qquad 0 \leq x \leq -2$$

Figura 1

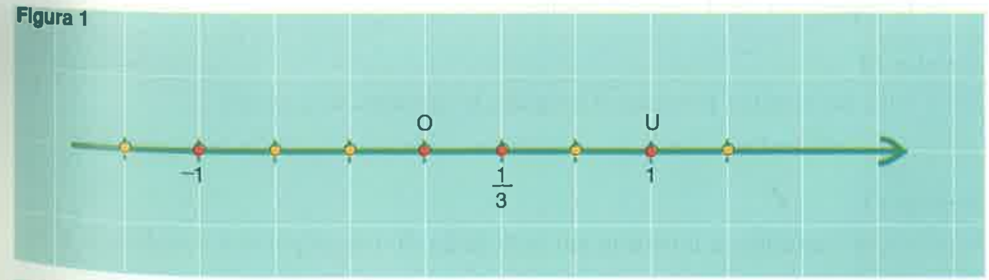
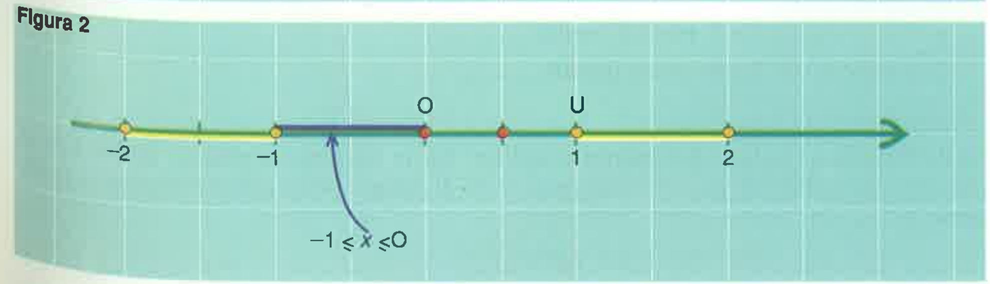


Figura 2



Attività 7

Sono dati i seguenti insiemi di numeri:

I. $1, 2, 4, 8$ II. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$

III. $-1, -2, -4, -8$ IV. $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}$

Rappresentare su una retta tutti i numeri assegnati.

Attività 8

Esaminando il primo insieme di numeri assegnato nell'attività precedente, si può dire che:

«Si passa dal primo numero ai successivi procedendo sulla retta nel verso fissato, perciò *i numeri diventano sempre più grandi*».

Esaminando il secondo insieme si può dire che:

«Si passa dal primo numero ai successivi procedendo sulla retta nel verso opposto a quello fissato, perciò *i numeri diventano sempre più piccoli*».

Completare le seguenti frasi:

a. Esaminando il terzo insieme si può dire che:
«Si passa dal primo numero ai successivi procedendo sulla retta nel verso ...., perciò *i numeri diventano sempre più* ....».

b. Esaminando il quarto insieme si può dire che:
«Si passa dal primo numero ai successivi procedendo sulla retta nel verso ...., perciò *i numeri diventano sempre più* ....».

C. Studio di aritmetiche finite

Attività 9

Riprendere l'aritmetica costruita sui resti della divisione per 3 e completare le seguenti frasi:

a. L'opposto di 1 è 2, perché risulta ....
b. L'opposto di 2 è 1, perché risulta ....

Attività 10

Sulla base dei risultati precedenti eseguire le seguenti sottrazioni:

2–1=2+ .... = ... 1–2=1+ .... = ... 2–2=2+ .... = ...

Attività 11

Riprendere l'aritmetica costruita sui resti della divisione per 4 e completare le seguenti frasi:

a. L'inverso di 3 è 3, perché risulta ....
b. L'inverso di 2 non esiste perché ....

Attività 12

Sulla base dei risultati precedenti scegliere fra le seguenti divisioni quelle che si possono eseguire nell'insieme dei resti della divisione per 4 e determinarne il risultato.

1:2 2:2 3:3 3:2 2:3