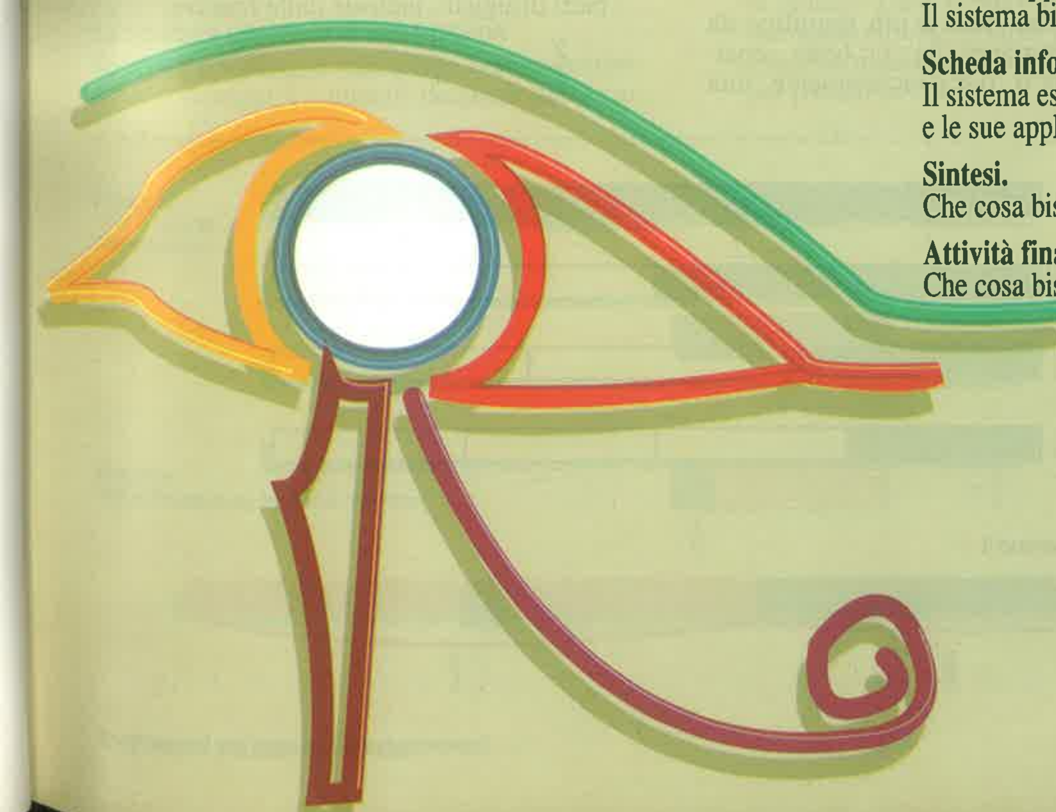
I NUMERI E LA LORO SCRITTURA



1

Le frazioni e la scrittura decimale

Frazionare l'unità

Le frazioni hanno origini molto antiche (cfr. anche la scheda storica, p. 62), perché è facile incontrare problemi che conducono a dividere una data quantità in più parti; ad esempio:

- dividere un dolce fra più persone;
- dividere un terreno fra più eredi;
- dividere il denaro disponibile fra varie spese.

Anticamente si usavano solo frazioni come le seguenti:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5}$$

Questo tipo di frazione è il più semplice da scrivere e da interpretare (fig. 1): basta considerare una «cosa» o, più concretamente, una striscia di carta da suddividere in parti uguali:

- il *denominatore* (2, 3, 4 o 5) indicava il numero delle parti;
- il *numeratore* 1 ricordava che si sceglieva una sola delle parti.

Le frazioni

Altre frazioni nascono da due esigenze diverse.

I. Suddividere un oggetto in parti disuguali.
Ecco un esempio (fig. 2). Una «cosa» è stata divisa in 5 parti uguali; poi ad una persona sono state date 2 parti e ad un'altra 3; in questo modo la cosa è stata suddivisa in parti disuguali, indicate dalle frazioni:

$$\frac{2}{5} \quad \text{e} \quad \frac{3}{5}$$

II. Dividere più oggetti fra più persone.
Per esempio, per suddividere 5 «cose» fra 3 persone, si può procedere così (fig. 3):

- si divide la prima cosa in 3 parti uguali e si distribuisce ad ogni persona una parte che vale $\frac{1}{3}$;
- si ripete la stessa operazione per tutte e 5 le cose da distribuire.

Alla fine di questa suddivisione, ogni persona viene ad avere una quantità espressa dalla frazione $\frac{5}{3}$.

Tra le frazioni si trovano anche i numeri interi

Le stesse figure 2 e 3 suggeriscono qualche altra considerazione, visualizzata in fig. 4:

- la «cosa» di fig. 2 è composta di 5 parti da $\frac{1}{5}$;
- le 5 «cose» di fig. 3 sono composte di 15 parti da $\frac{1}{3}$.

Si ha dunque:

$$1 = \frac{5}{5} \qquad 5 = \frac{15}{3}$$

Perciò tra le frazioni si trovano anche i numeri interi come 1 e 5.

La scrittura decimale di una frazione

In epoca più recente (cfr. anche la scheda storica «Le frazioni e i numeri decimali nella storia», p. 62), alle frazioni si affiancano i numeri decimali, risultato della divisione del numeratore per il denominatore.
Ecco qualche esempio:

$$\frac{1}{10} = 1 : 10 = 0{,}1$$

$$\frac{3}{5} = 3 : 5 = 0{,}6$$

$$\frac{9}{2} = 9 : 2 = 4{,}5$$

Frazioni equivalenti

La scrittura decimale porta a ritrovare una nota proprietà: uno stesso numero decimale può provenire da tante frazioni diverse.
Ecco un primo esempio:

$$\frac{1}{10} = \frac{2}{20} = \frac{3}{30} = \ldots = 0{,}1$$

Le frazioni che danno luogo ad uno stesso numero decimale si chiamano equivalenti.

Le frazioni equivalenti presentano delle proprietà caratteristiche.

I. C'è una «prima frazione», e cioè $\frac{1}{10}$, che ha numeratore e denominatore primi fra loro (cioè senza divisori comuni).
In questo caso si dice che la frazione è *ridotta ai minimi termini*, proprio perché ha i suoi termini (numeratore e denominatore) più piccoli possibile.

Figura 1
Frazioni con 1 al numeratore

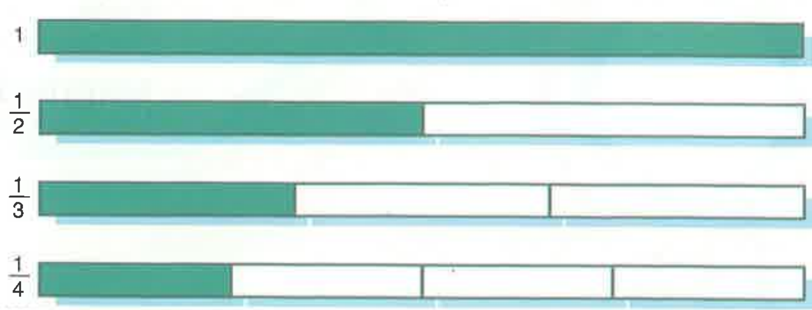


Figura 2
Frazioni che non superano 1

Figura 3
Una frazione che supera 1

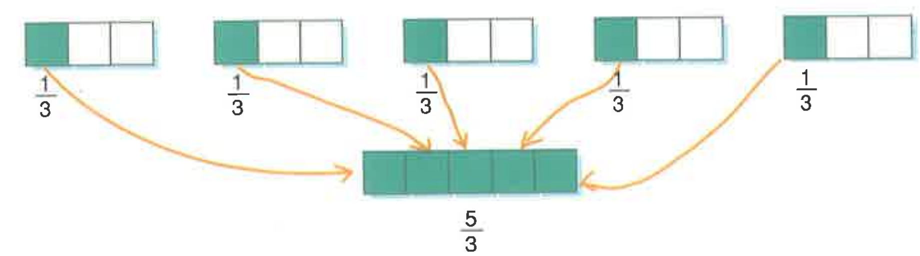
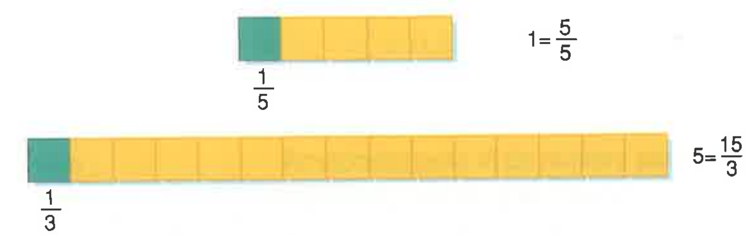


Figura 4
Tra le frazioni si trovano gli interi



II. Tutte le altre frazioni sono ottenute moltiplicando per uno stesso numero i due termini della prima; risulta infatti:

$$\frac{2}{20} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 10} \qquad \frac{3}{30} = \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 10}$$

In modo analogo si possono costruire tante frazioni equivalenti a $\frac{3}{5}$; si ha per esempio:

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} = \dots = 0{,}6$$

Viceversa, si può dire che $\frac{45}{10}$ è equivalente a $\frac{9}{2}$, dato che risulta:

$$\frac{45}{10} = \frac{9 \cdot 5}{2 \cdot 5} = 4{,}5$$

Verifiche

Conoscenze

① Nella frazione $\frac{2}{3}$ qual è il numeratore e qual è il denominatore?

② Nella frazione $\frac{3}{2}$ qual è il numeratore e qual è il denominatore?

③ Come si ottiene la scrittura decimale di una frazione?

④ Come si riconoscono due frazioni equivalenti?

⑤ Come si riconosce una frazione ridotta ai minimi termini?

Comprensione

① Portare qualche esempio di frazioni equivalenti.

② Spiegare perché tra le frazioni si trovano anche i numeri interi.

Applicazioni

① Basarsi sulla fig. 1 per rappresentare le frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$.

② Disegnare una figura adatta a rappresentare le seguenti frazioni:

$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{5}{6}$$

③ Scrivere almeno quattro frazioni equivalenti a $\frac{3}{4}$.

④ Tra le frazioni equivalenti a $\frac{3}{4}$ scrivere quella che ha denominatore 100.

⑤ Ridurre ai minimi termini la frazione $\frac{48}{100}$.

⑥ Scrivere in forma decimale le frazioni seguenti:

$$\frac{1}{4} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{7}{8}$$

⑦ Determinare le frazioni corrispondenti ai seguenti numeri decimali:

0,2 0,25 0,005

2 Numeri decimali periodici. Valori approssimati

Numeri decimali periodici

La scrittura delle frazioni in forma decimale presenta in alcuni casi una notevole difficoltà, che si può evidenziare a partire da un esempio. Quando si esegue a mano la divisione 1:3 il procedimento si sviluppa così:

$$\begin{array}{r|l} 1 & 3 \\ \hline 10 & 0{,}33 \\ 10 & \\ 1 & \end{array}$$

La divisione non dà mai resto 0 e perciò, continuandola indefinitamente, si troverebbe come quoziente un numero decimale con infinite cifre dopo la virgola.
Tuttavia sembra inutile continuare la divisione, perché nel quoziente si ripete sempre la cifra 3. Si dice allora che la frazione dà luogo ad un numero *decimale periodico*, che si indica con:

$0{,}(3)$ oppure con $0{,}\overline{3}$

Si ha dunque:

$$\frac{1}{3} = 0{,}(3)$$

Analogamente si ottiene, per esempio:

$$\frac{1}{6} = 0{,}1(6) \qquad \frac{10}{7} = 1{,}(428571)$$

In conclusione, *un numero decimale periodico è un numero che presenta la seguente caratteristica: un gruppo di cifre dopo la virgola si ripete indefinitamente.*

Valori approssimati per troncamento

Le frazioni come quelle ora esaminate non possono essere tradotte *esattamente* in un numero decimale: per avere esattamente la frazione bisognerebbe scrivere un numero con infinite cifre dopo la virgola e questo è impossibile.
In problemi di carattere pratico si considera solo un certo numero di cifre dopo la virgola, ottenendo un numero decimale che *approssima* la frazione.
Il modo più semplice per approssimare un decimale periodico è il seguente: *troncare* il numero periodico, cioè scrivere le prime cifre dopo la virgola ed eliminare tutte le altre.
Così, per esempio, si scrive:

$$\frac{1}{3} \cong 0{,}33 \qquad \frac{1}{6} \cong 0{,}16 \qquad \frac{10}{7} \cong 1{,}42$$

Due osservazioni:
- il simbolo ≅ si legge «circa uguale» e ricorda che *il numero decimale finito non è esattamente uguale alla frazione;*
- il numero è scritto fino alla cifra dei centesimi e perciò *approssima la frazione a meno di un centesimo.*

E così, per approssimare una frazione a meno di un decimo, si scrive:

$$\frac{1}{3} \cong 0{,}3 \qquad \frac{1}{6} \cong 0{,}1 \qquad \frac{10}{7} \cong 1{,}4$$

E, per approssimare una frazione a meno di un millesimo, si scrive:

$$\frac{1}{3} \cong 0{,}333 \qquad \frac{1}{6} \cong 0{,}166 \qquad \frac{10}{7} \cong 1{,}428$$

Arrotondamento di un numero periodico

L'approssimazione per troncamento risulta in molti casi veramente grossolana; per esempio, un numero come 0,4(98), vicinissimo a 0,5, verrebbe approssimato a meno di un decimo nel modo seguente:

$$0{,}4(98) \cong 0{,}4$$

Approssimazioni migliori si ottengono invece *arrotondando* il numero periodico, cioè scrivendo solo le prime cifre dopo la virgola ed eliminando tutte le altre sulla base delle regole seguenti:

I. se la prima cifra eliminata è 0, 1, 2, 3 o 4, si lascia la cifra rimanente inalterata;

II. se la prima cifra eliminata è 5, 6, 7, 8 o 9, si aumenta di 1 la cifra rimanente.

In questo modo si scrive, per esempio, approssimando a meno di un centesimo:

$$\frac{1}{3} \cong 0{,}33 \qquad \frac{1}{6} \cong 0{,}17 \qquad \frac{10}{7} \cong 1{,}43$$

Questo tipo di approssimazione per arrotondamento è usato anche per rappresentare i decimali periodici nei calcolatori tascabili.

Frazioni che danno luogo a decimali periodici

Quando si eseguono delle divisioni con il calcolatore tascabile, è bene sapere in quali casi la macchina fornisce risultati che sono soltanto approssimati. In particolare, si tratta di riconoscere le frazioni che danno luogo ad un decimale periodico.

Per questo basta seguire un ragionamento articolato in tre passi.

I. Danno luogo ad un decimale finito le frazioni che hanno come denominatore una potenza di 10. Si ha per esempio:

$$\frac{1}{10} = 0{,}1 \qquad \frac{7}{10} = 0{,}7$$

$$\frac{9}{100} = 0{,}09 \qquad \frac{23}{1000} = 0{,}023$$

II. Danno luogo ad un decimale finito le frazioni equivalenti a frazioni che hanno come denominatore una potenza di 10. Si ha per esempio:

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0{,}6 \qquad \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

In questo caso le frazioni, ridotte ai minimi termini, hanno come denominatore un divisore di una potenza di 10; questo significa che il denominatore deve essere composto esclusivamente dai fattori 2 o 5.

III. In conclusione, *danno luogo a decimali periodici le frazioni che, ridotte ai minimi termini, non hanno il denominatore composto esclusivamente dai fattori 2 o 5.*

E così danno luogo a decimali periodici le frazioni seguenti:

$$\frac{2}{3} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{5}{13}$$

Danno invece luogo a decimali finiti, ad esempio, le frazioni seguenti:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Verifiche

Conoscenze

① In quali casi una frazione dà luogo ad un decimale finito?

② In quali casi una frazione dà luogo ad un decimale periodico?

③ Come si tronca un decimale periodico?

④ Come si arrotonda un decimale periodico?

Comprensione

① Che cosa vuol dire che un numero è approssimato a meno di un decimo o a meno di un centesimo?

② Svolgere le seguenti operazioni:

A. $\frac{1}{4} \cdot 4 - 1$ B. $\frac{1}{3} \cdot 3 - 1$

Svolgere le stesse operazioni scrivendo la frazione in forma decimale e confrontare i risultati ottenuti.

Applicazioni

① Riconoscere quali, fra le frazioni seguenti, danno luogo a decimali periodici.

$$\frac{7}{3} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{3}{12} \quad \frac{26}{13} \quad \frac{25}{9} \quad \frac{9}{25}$$

② Delle frazioni precedenti che danno luogo a decimali periodici scrivere i decimali approssimati a meno di un decimo e a meno di un centesimo ottenuti per troncamento e per arrotondamento.

3 Errore assoluto ed errore relativo

Approssimazione di numeri periodici

Nel paragrafo precedente si è visto che danno luogo a numeri decimali periodici le frazioni che, ridotte ai minimi termini, non hanno il denominatore composto solo da 2 o 5. Ecco un esempio:

$$\frac{3}{7} = 0{,}(428571)$$

Il numero decimale presenta dunque infinite cifre dopo la virgola, e tutte le cifre si ottengono ripetendo il periodo 428571, racchiuso fra parentesi.

Racchiudere fra parentesi il periodo è però solo una convenzione, scelta per continuare ad usare i numeri decimali anche quando la scrittura decimale non riesce a tradurre esattamente la frazione.

In pratica, però, non si usano le cifre fra parentesi, ma si considera solo un certo numero di cifre dopo la virgola, troncando o arrotondando il decimale; così si scrive, per esempio:

$$\frac{3}{7} \cong 0{,}4$$

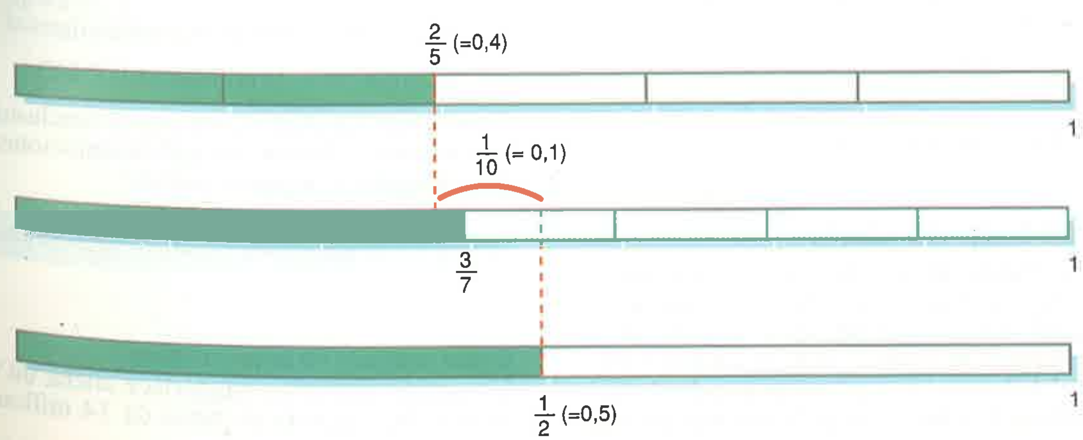
In questo caso risulta:

$$0{,}4 < 0{,}(428571) < 0{,}5$$

e perciò si è certi (fig. 1) che 0,4 dista da $\frac{3}{7}$ meno di:

$$0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$$

Figura 1
Il decimale 0,4 approssima $\frac{3}{7}$ a meno di 0,1



Proprio per questo si dice che *0,4 è un valore approssimato di* $\frac{3}{7}$ *a meno di* 10^{-1}.

Analogamente, si avrà che:

- 0,43, che ha 2 cifre dopo la virgola, approssima $\frac{3}{7}$ a meno di 10^{-2};
- 0,429, che ha 3 cifre dopo la virgola, approssima $\frac{3}{7}$ a meno di 10^{-3}.

Se poi si esegue con il calcolatore la divisione 3:7, sul visualizzatore compare:

$$0{,}4285714$$

numero con 7 cifre dopo la virgola; si può allora dire che *il calcolatore approssima la frazione a meno di* 10^{-7}.

Che cosa vuol dire «buona approssimazione»

L'approssimazione data dal calcolatore sembra davvero molto buona.

In realtà, *non si può parlare di approssimazione «buona» in assoluto*, perché un'approssimazione che va bene per certi problemi diventa inadeguata per altri.

Ecco qualche esempio.

A. Quando si misura una strada, si esprime la lunghezza in kilometri e, come sottomultiplo, si arriva al metro (che è 10^{-3} km); questo vuol dire che la lunghezza della strada è ben espressa da un numero con tre cifre dopo la virgola.

B. Quando si misurano le dimensioni di una stanza per rifare il pavimento, si esprimono le lunghezze in metri e centimetri (che sono 10^{-2} m); questo vuol dire che le dimensioni sono ben espresse da numeri con due cifre dopo la virgola.

C. Il meccanico che costruisce un oggetto con il tornio, misura le lunghezze in metri, arrivando anche ai decimillimetri (che sono 10^{-4} m); questo vuol dire che le dimensioni di un pezzo meccanico sono adeguatamente espresse da numeri con quattro cifre dopo la virgola.

L'errore di approssimazione

Un problema che conduce a riflettere meglio sulle approssimazioni può essere il seguente.

Gli aiuti che una nazione invia ai paesi in via di sviluppo sono spesso indicati da una frazione del bilancio; perciò si può calcolare la somma da stanziare usando le frazioni o i decimali. Quali errori si possono commettere usando i decimali?

Per capire meglio di che si tratta, conviene lavorare su un caso numerico: si stabilisce di inviare $\frac{1}{700}$ del bilancio, tenendo presente che risulta:

$$\frac{1}{700} = \frac{1}{7} \cdot 10^{-2} = 0{,}00(142857)$$

Ecco che cosa può succedere in due casi diversi:

A. Nel bilancio annuale di una singola persona che guadagna 14 milioni di lire, la somma da inviare, calcolata con le frazioni, sarà:

$$\frac{1}{700} \cdot 14\,000\,000 = \frac{1}{7} \cdot 10^{-2} \cdot 14 \cdot 10^{6} =$$
$$= 2 \cdot 10^{4} = 20\,000$$

Approssimando la frazione a meno di 10^{-3} si avrà invece:

$$0{,}001 \cdot 14\,000\,000 = 14\,000$$

L'approssimazione scelta porta dunque ad inviare 14 000 lire, invece che 20 000 lire; si inviano perciò 6000 lire in meno.

Ora, 6000 indica proprio l'*errore* commesso; si ha cioè

$$6000 = 20\,000 - 14\,000$$

B. Nel bilancio annuale di un comune, che ammonta a 14 miliardi, la somma da inviare, calcolata con le frazioni, sarà:

$$\frac{1}{700} \cdot 14\,000\,000\,000 =$$
$$= \frac{1}{7} \cdot 10^{-2} \cdot 14 \cdot 10^{9} = 2 \cdot 10^{7} = 20\,000\,000$$

Approssimando la frazione a meno di 10^{-3} sarà invece:

$$0{,}001 \cdot 14\,000\,000\,000 = 14\,000\,000$$

Ora, l'*errore* commesso è dato da:

$$20\,000\,000 - 14\,000\,000 = 6\,000\,000$$

Il problema conduce ad una prima conclusione: per valutare l'errore di approssimazione, si deve eseguire il seguente calcolo:

errore = risultato esatto – risultato approssimato

Errore assoluto ed errore relativo

L'esempio numerico suggerisce anche un'osservazione: quando si passa da 14 milioni a 14 miliardi, che è 14 milioni moltiplicato per 1000, anche l'errore si moltiplica per 1000.

In tutti e due i casi rimane invece costante il rapporto fra l'errore ed il risultato esatto; si ha infatti:

$$\textit{caso A.}\quad \frac{\text{errore}}{\text{risultato esatto}} = \frac{6000}{20\,000} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

$$\textit{caso B.}\quad \frac{\text{errore}}{\text{risultato esatto}} = \frac{6\,000\,000}{20\,000\,000} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

Il rapporto che rimane costante prende anche il nome di *errore relativo*; proprio per questo l'errore introdotto inizialmente prende anche il nome di *errore assoluto*.

In conclusione si ha:

errore assoluto =
risultato esatto – risultato approssimato

$$\textit{errore relativo} = \frac{\textit{errore assoluto}}{\textit{risultato esatto}}$$

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Come è scritto un decimale che approssima una frazione a meno di 10^{-3}?

② Quando si usano i valori approssimati, come si calcola l'errore assoluto?

③ Quando si usano i valori approssimati, come si calcola l'errore relativo?

Comprensione

① Spiegare perché non ha senso parlare di buona approssimazione in assoluto, portando almeno due esempi diversi da quelli dati dal testo.

② L'errore relativo può essere un numero più grande di 1?

Applicazioni

① Molti calcolatori mostrano sul visualizzatore 7 cifre dopo la virgola, ma lavorano con valori approssimati con 10 cifre dopo la virgola; in tal caso qual è l'approssimazione effettiva data dal calcolatore?
Leggere le istruzioni del proprio calcolatore sull'argomento.

② Calcolare l'espressione:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{12}$$

nei seguenti modi:

a. lavorando con le frazioni;
b. lavorando con i decimali che approssimano le frazioni a meno di 10^{-1};
c. lavorando con i decimali che approssimano le frazioni a meno di 10^{-3};
d. lavorando con il calcolatore.

Valutare l'errore assoluto e relativo negli ultimi tre casi.

③ Calcolare con il calcolatore l'espressione seguente:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{4}$$

Spiegare il risultato ottenuto, tenendo presenti i primi due esercizi.

④ Ripetere l'esercizio 2 a partire dall'espressione seguente:

$$\frac{13}{14} \cdot \frac{7}{26}$$

⑤ Calcolare con il calcolatore l'espressione seguente:

$$\frac{13}{14} \cdot \frac{7}{26} - \frac{1}{4}$$

Spiegare il risultato ottenuto.

I numeri decimali nel calcolatore tascabile

Il calcolatore ha delle limitazioni, che è indispensabile conoscere; questa scheda conduce appunto a scoprire alcune importanti limitazioni del calcolatore tascabile.

Il calcolatore lavora solo con numeri decimali finiti

Attività 1

Quando si lavora con i numeri razionali, si riesce sempre ad eseguire la divisione; inoltre si può controllare l'esattezza del risultato con la corrispondente prova della divisione. Ecco un esempio:

$$4 : 28 = \frac{1}{7} \quad \text{perché} \quad \frac{1}{7} \cdot 28 = 4$$

Sarà così anche per il calcolatore?

Per capire la situazione conviene eseguire alcune divisioni a mano e con il calcolatore, e completare la tabella seguente:

Calcolo	Risultato ottenuto a mano	Risultato dato dal calcolatore
$\frac{24}{6} = 24 : 6$	4	4
$\frac{6}{24} = 6 : 24$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	0.25
$\frac{8}{24} = 8 : 24$	$\frac{1}{3} = 0{,}(3)$	0.3333333
$\frac{180}{30} =$		
$\frac{18}{15} =$		
$\frac{15}{18} =$		

Osservando la tabella, si vede subito che, per le prime due operazioni, si ottiene lo stesso risultato eseguendo i calcoli a mano o con il calcolatore.

Ma, quando si esegue la divisione 8:24, si ottengono due risultati diversi:

A. Eseguendo i calcoli a mano si ottiene:

$$\frac{8}{24} = \frac{1}{3} = 0{,}(3)$$

Il risultato è dunque una frazione che, scritta in forma decimale, dà un numero periodico con infinite cifre dopo la virgola.

B. Il calcolatore dà invece come risultato soltanto

0,3333333

cioè un numero decimale finito con 7 cifre dopo la virgola.

Si scopre così una notevole limitazione: *il calcolatore lavora solo con numeri decimali finiti.*

I casi in cui il calcolatore dà risultati approssimati della divisione

Dopo aver eseguito a mano la divisione 8:24 è facile verificare che il risultato ottenuto è esatto: basta eseguire la prova della divisione; si ha:

$$24 \cdot \frac{1}{3} = \text{..........}$$

Invece, non è esatto il risultato dato dal calcolatore, e cioè 0,3333333; risulta infatti:

$$24 \cdot 0{,}333333 = 7{,}9999992$$

Si trova così un'importante conseguenza della limitazione del calcolatore tascabile scoperta prima: *in alcuni casi il risultato della divisione dato dal calcolatore non è esatto, ma solo approssimato.*

In quali casi il calcolatore non riesce a fornire il risultato esatto della divisione?

Una prima risposta è ovviamente la seguente: in tutti i casi in cui il quoziente è un numero che presenta più cifre di quelle che il visualizzatore può mostrare. In particolare, quindi, *il calcolatore calcola in modo approssimato il quoziente quando il risultato della divisione è un numero periodico.*

Ma questa risposta è incompleta, perché manca ancora un'informazione: in quali casi il risultato della divisione è un numero periodico?

Nel paragrafo 2 (p. 56), si è detto che danno luogo a decimali periodici le frazioni che, ridotte ai minimi termini, non hanno il denominatore composto esclusivamente dai fattori 2 o 5.

Quindi *il calcolatore calcola in modo approssimato il quoziente quando il risultato della divisione è una frazione che, ridotta ai minimi termini, non ha il denominatore composto esclusivamente dai fattori 2 o 5.*

Le frazioni e i numeri decimali nella storia

Le frazioni dell'antico Egitto

In papiri egizi che risalgono al XIX secolo a.C., le frazioni compaiono a proposito di problemi pratici, quali ad esempio: «Come dividere 2 pani fra 3 persone? E 5 pani fra 4 persone? Quale parte di pane va ad ognuno?».

Tutti questi problemi vengono risolti trasformando la frazione nella somma di più unità frazionarie, cioè di frazioni che hanno 1 come numeratore. Per esempio si trova scritto:

$$\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$$

Nell'unità frazionaria gli egizi vedevano qualcosa di molto concreto, tanto che non scrivevano:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4}$$

ma solo i numeri 2, 3, 4, sormontati da una specie di ovale allungato, che rappresentava la quantità da frazionare (fig. 1).

Le operazioni con le frazioni erano perciò molto difficili, dato che, prima di tutto, si doveva trasformare ogni frazione nella somma di più unità frazionarie; però gli egizi, già alla fine del III millennio a.C., riuscivano ad eseguire addizioni e moltiplicazioni.

La leggenda attribuisce a Horus, un personaggio mitico, l'invenzione delle frazioni, e questo perché il suo occhio, spezzato in 6 parti dal dio del male (fig. 2), rappresentava 6 frazioni dell'unità, e precisamente:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{64}$$

L'occhio di Horus è da considerarsi quindi, fra mito e leggenda, uno dei più antichi strumenti di calcolo.

Figura 1
Le frazioni nell'antico Egitto

La scrittura delle frazioni ancora oggi in uso

Passa un lungo periodo che attraversa civiltà come quella greca, quella romana e quella araba, ma il calcolo delle frazioni non progredisce perché è intralciato dalla mancanza di un simbolismo snello.

Solo nel XIII secolo, in un famoso libro di aritmetica del matematico italiano Leonardo Pisano, compare il simbolo di frazione ancora oggi in uso e cioè:

$$\frac{m}{n}$$

dove le lettere m e n indicano due numeri interi.

Una curiosità: la linea orizzontale che compare nella frazione era chiamata *virgula*, che in latino significa «piccola verga», cioè «bastoncino».

Tuttavia, per trovare le regole sulle operazioni con le frazioni, bisogna arrivare al 1494, quando il matematico italiano Luca Pacioli pubblica uno dei primi libri stampati: *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*, grandioso compendio dei risultati a quel tempo noti in vari campi della matematica.

Stevin e la rappresentazione decimale

Solo alla fine del Cinquecento si diffonde in Europa l'uso di tradurre le frazioni in numeri decimali; è l'ingegnere fiammingo Simon Stevin che spiega chiaramente il sistema decimale nel suo libretto *La disme*, cioè «Il decimo» (fig. 3). Ecco come Stevin presenta il suo libro:

«Io vi offro questo libretto: gli uomini apprenderanno da queste pagine una meravigliosa invenzione! Impareranno a svolgere le quattro operazioni senza l'uso delle frazioni, ma calcolando sui "numeri rotti" come se fossero numeri interi. Si tratta di una cosa così semplice che quasi non merita il nome di invenzione; perché è accaduto a me quello che accade talvolta all'uomo rozzo e incolto, il quale, proprio per caso, si trova davanti uno splendido e grandioso tesoro senza essersi minimamente affaticato per cercarlo».

Anche se presentato con tanta modestia, il libro di Stevin fu senza dubbio molto importante per l'Europa in un'epoca in cui si sviluppavano le banche, si scoprivano nuove terre, si indagava più profondamente sui corpi celesti, un'epoca quindi in cui erano sempre più necessari calcoli ed operazioni.

Tuttavia, i numeri decimali, poco conosciuti in Europa fino alla fine del Cinquecento, erano già noti più di un secolo prima nel mondo islamico, come risulta dal libro *La chiave aritmetica*, scritto intorno al 1430 dall'arabo al-Kashi. Ma forse neanche al-Kashi è l'inventore di questo metodo di scrittura dei numeri: pare infatti che i numeri decimali fossero già noti due secoli prima in Cina.

Si può capire bene perché i numeri decimali si trovano in epoca tanto antica in Oriente: questi numeri erano uno strumento essenziale in un mondo largamente basato sul commercio.

LA

DISME,

Enseignant facilement expedier par nombres entiers sans rompuz, tous comptes se rencontrans aux affaires des Hommes.

Premierement descripte en Flameng, & maintenant convertie en François, par Simon Stevin *de Bruges.*

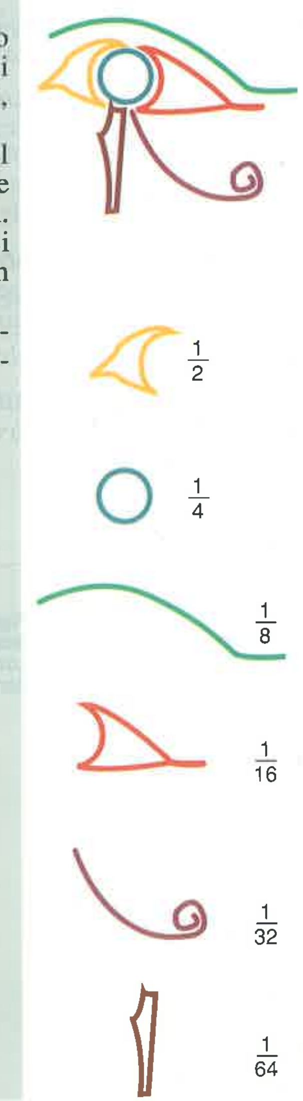
AVX ASTROLOGVES, ARPENTEURS, MESVREVRS DE TAPISSERIE, GAVIEVRS, STEREOMETRIENS EN general, Maistres de monnoye, & à tous Marchans:

Simon Stevin *Salut.*

*Quelcun voyant la petitesse de ce livret, & la comparant à la grandeur de vous mes Tres-*honnorez Seigneurs, *ausquels il est dedié, estimera peut estre nostre concept absurd; Mais s'il considere la Proportion, qui est, comme la petite quantité de cestui cy, à l'humaine imbecillité de ceux la, ainsi ses grandes utilitez, à leurs hauts & ingenieux entendements, il trouvera avoir faict comparaison des termes extremes, lesquels ne la permettent en conversion de proportion quelconque. Soit doncques le troisiesme au quatriesme. Mais que sera ce proposé? d'aventure quelque invention admirable? non certes, mais chose si simple qu'elle ne merite quasi le nom d'invention, car comme l'homme rustique, & lourd, trouve bien d'aventure quelque grand tresor, sans y avoir usé de science, tout ainsi le semblable est il advenu en cest affaire: Pourtant si quelcun me vouloit estimer pour vanteur de mon entendement à cause de l'explication de ces utilitez, sans doubte il demonstre, ou qu'il n'y a en luy*

Figura 3
Frontespizio del libro
La disme

Figura 2
L'occhio di Horus e l'unità frazionaria



Calcoli con le frazioni

Addizionare frazioni con lo stesso denominatore

È immediato addizionare frazioni con lo stesso denominatore: *la frazione somma ha lo stesso denominatore e il numeratore che è la somma dei numeratori.*

Attività 1
Ecco qualche esempio, da svolgere basandosi anche sulla fig. 1.

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{2+1}{5}=\frac{3}{5} \qquad \frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{...}{...} \qquad \frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{...}{...}$$

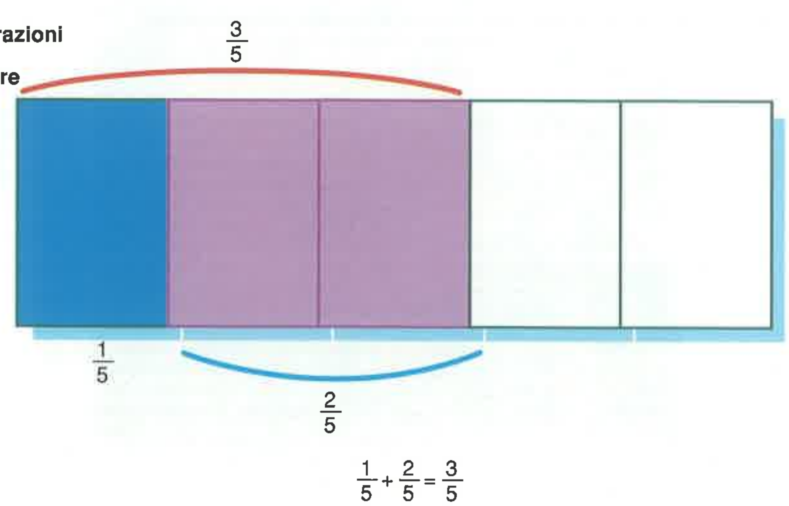
Addizionare frazioni con denominatore diverso

Nel caso di frazioni con denominatore diverso, si procede nel modo seguente: *si calcola la somma a partire da due frazioni che siano equivalenti a quelle date, ma abbiano lo stesso denominatore.*

Attività 2
Ecco due esempi, da svolgere basandosi anche sulla fig. 2.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{...}{...}$$

Figura 1
Somma di frazioni con uguale denominatore



$$\frac{3}{5}+\frac{1}{10}=\frac{....}{10}+\frac{1}{10}=\frac{...}{...}$$

Non sempre però è facile scegliere il denominatore comune; perciò conviene basarsi sulla nota regola generale: si sceglie come denominatore il minimo comune multiplo dei denominatori.

Attività 3
Calcolare:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{...}{6}+\frac{...}{6}=\frac{...}{...}$$

$$\frac{3}{2}+\frac{2}{5}=\frac{....}{10}+\frac{....}{10}=\frac{...}{...}$$

Procedimento generale per addizionare più frazioni

Conviene infine richiamare il procedimento generale per addizionare più frazioni; si tratta del procedimento basato sui passi seguenti:

a. scomporre i denominatori in fattori;

b. calcolare il minimo comune multiplo dei denominatori, cioè il prodotto dei fattori comuni e non comuni, presi ciascuno con il massimo esponente (per brevità, tale minimo comune multiplo viene spesso indicato con la sigla m.c.m.);

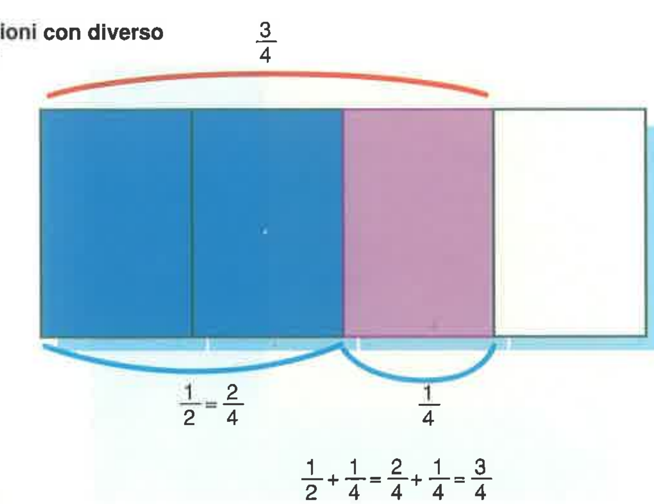
c. ad ogni frazione sostituire la frazione equivalente, che ha per denominatore il m.c.m. prima determinato; per ottenere questo conviene procedere nel modo seguente:

   I. si divide il m.c.m. per il denominatore;

   II. il risultato si moltiplica per il numeratore;

d. sommare le frazioni ottenute, che hanno tutte lo stesso denominatore.

Figura 2
Somma di frazioni con diverso denominatore



Attività 4

Applicare la regola, per addizionare le seguenti frazioni:

$$\frac{7}{8}+\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$$

a. $8=2^3$ $\quad 6=2\cdot\ldots$ $\quad 4=\ldots$

b. m.c.m.=......=24

c.1. *per la frazione* $\frac{7}{8}$

I. 24:8=3 $\quad$ II. $\frac{7}{8}=\frac{7\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{21}{24}$

c.2. *per la frazione* $\frac{5}{6}$

I. 24: ...=...... $\quad$ II. $\frac{5}{6}=\frac{5\cdot \ldots}{6\cdot \ldots}=\frac{\ldots}{24}$

c.3. *per la frazione* $\frac{3}{4}$

I. .... =...... $\quad$ II. $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot \ldots}{4\cdot \ldots}=\frac{\ldots}{24}$

d. $\frac{7}{8}+\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{\ldots}{24}+\frac{\ldots}{24}+\frac{\ldots}{24}=\frac{59}{24}$

Moltiplicazione di frazioni

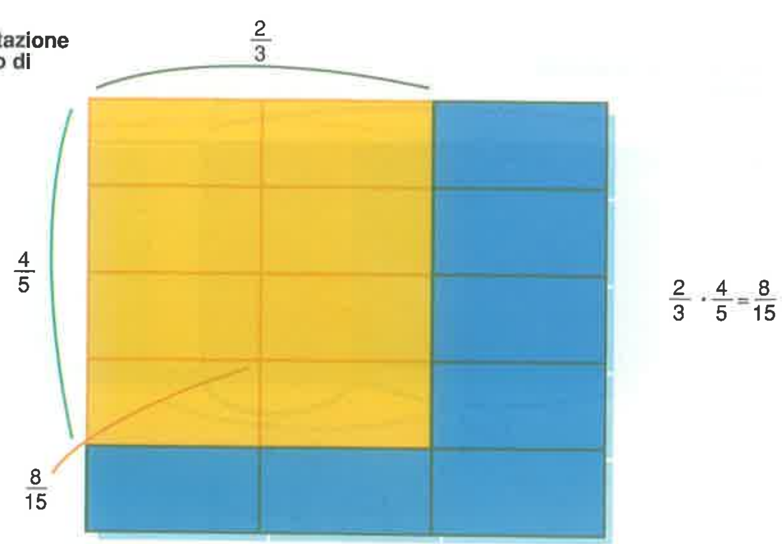
La regola di moltiplicazione è molto semplice: si moltiplicano i numeratori fra loro e i denominatori fra loro. Questa regola può essere interpretata intuitivamente basandosi sulla fig. 3.

Attività 5

Calcolare, per esempio:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{8}{15}$$

Figura 3
Un'interpretazione del prodotto di frazioni



$$\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{2}=\frac{\ldots}{\ldots}$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\ldots}{\ldots}$$

Potenza di frazioni

Per l'elevazione a potenza ci si basa sulle regole richiamate nei paragrafi 4, 5 e 6 del primo capitolo (pp. 22-29).

Attività 6

Ecco qualche esempio su cui lavorare:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16} \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}=\frac{\ldots}{\ldots} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^0=\ldots$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\ldots \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{\ldots}{\ldots}\right)^3=\ldots\ldots$$

Sottrazione e divisione di frazioni

Queste operazioni si svolgono secondo le regole esposte nel paragrafo 3 del primo capitolo (p. 15) e cioè:

- la differenza di due frazioni è la somma della prima con l'opposta della seconda;
- il quoziente di due frazioni è il prodotto della prima per il reciproco della seconda.

Attività 7

Ecco due esempi su cui lavorare:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\left(\frac{-1}{3}\right)=\frac{\ldots}{\ldots}$$

$$\frac{3}{2}:\frac{2}{5}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{\ldots}{\ldots}$$

Espressioni con frazioni

Per calcolare il risultato di un'espressione in cui compaiono più operazioni diverse si seguono le indicazioni date nel paragrafo 7 del primo capitolo (pp. 36-37) e cioè:

- si svolgono per prime le operazioni racchiuse fra parentesi;
- in assenza di parentesi si segue la priorità delle operazioni.

Attività 8

Svolgere le seguenti espressioni:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot 6-\frac{3}{2}:\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 6-\frac{3}{2}:\frac{1}{2}$$

$$\left[\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)\cdot 4\right]^{-1}$$

$$\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)\cdot 4^{-1}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\cdot 4^{-1}$$

$$\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{3}\cdot 4\right)^{-1}$$

4

La scrittura posizionale dei numeri

Sistema posizionale in base 10

Ormai da circa cinque secoli si scrivono i numeri seguendo delle regole fisse, che sono richiamate qui sotto:

- si usano *le dieci cifre*: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
- *il valore di una cifra dipende dalla posizione che la cifra occupa.*

Ecco un primo esempio: il numero:

$$22{,}2$$

è scritto ripetendo più volte la cifra 2; ma ogni cifra ha un significato diverso perché risulta:

$$22{,}2=20+2+0{,}2=2\cdot 10+2\cdot 1+2\cdot 0{,}1$$

Per completare l'esame di questo numero, bisogna ricordare come si scrivono le potenze di 10, e cioè:

$$10=10^1 \qquad 1=10^0 \qquad 0{,}1=10^{-1}$$

Così si trova che:

$$22{,}2=2\cdot 10^1+2\cdot 10^0+2\cdot 10^{-1}$$

Più in generale, la scrittura decimale di un numero è basata sulle seguenti regole:

I. *si considerano le cifre a sinistra della virgola*, sapendo che:
   - la cifra al *1°* posto deve essere moltiplicata per $\mathbf{10^0}$;
   - la cifra al *2°* posto deve essere moltiplicata per $\mathbf{10^1}$;
   - la cifra che occupa il posto *n* deve essere moltiplicata per $\mathbf{10^{n-1}}$.

II. *si considerano le cifre a destra della virgola*, sapendo che:
   - la cifra al **1°** posto deve essere moltiplicata per $\mathbf{10^{-1}}$;
   - la cifra al **2°** posto deve essere moltiplicata per $\mathbf{10^{-2}}$;
   - la cifra che occupa il posto *n* deve essere moltiplicata per $\mathbf{10^{-n}}$.

Si capisce così il nome dato al sistema di numerazione abituale e cioè *sistema posizionale in base 10*:

- il sistema è *posizionale* perché il valore di ogni cifra dipende dalla sua posizione;
- il sistema è *in base 10*, perché ogni cifra deve essere moltiplicata per un'opportuna potenza della base 10.

Si ha, per esempio:

$$302{,}14=3\cdot 10^2+0\cdot 10^1+2\cdot 10^0+1\cdot 10^{-1}+4\cdot 10^{-2}$$

Un esempio di sistema posizionale in base diversa da 10

La scelta della base 10 ha un'origine storica facile da capire: le dieci dita delle mani sono state il primo strumento di calcolo dell'uomo.
Ma ormai non è più necessario contare con le dita e si può scegliere una qualunque altra base per scrivere i numeri; ecco un primo esempio.
Si sceglie la base 5.
In tal caso, per scrivere e leggere un numero, si procede così:

- si usano le cinque cifre 0, 1, 2, 3, 4;
- ogni cifra deve essere moltiplicata per un'opportuna potenza di 5.

E così lo stesso numero 302,14 ha un valore diverso; perciò, per non confondersi, si usa scrivere nel numero l'indicazione della base 5 in basso a destra. Si ha allora:

$$302{,}14_5=3\cdot 5^2+0\cdot 5^1+2\cdot 5^0+1\cdot 5^{-1}+4\cdot 5^{-2}$$

Svolgendo i calcoli indicati si ha:

$$3\cdot 5^2+0\cdot 5^1+2\cdot 5^0+1\cdot 5^{-1}+4\cdot 5^{-2}=$$
$$=3\cdot 25+0+2+1\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}04$$

e perciò risulta:

$$302{,}14_5=77{,}24$$

Un numero decimale periodico non è più periodico, quando è scritto in un'altra base

Ecco un secondo esempio: *il sistema posizionale in base 3.*
Ora, per scrivere e leggere un numero, si procede così:

- si usano le tre cifre 0, 1, 2;
- ogni cifra deve essere moltiplicata per un'opportuna potenza di 3.

Così, per esempio, si ha:

$$210{,}21_3=2\cdot 3^2+1\cdot 3^1+0\cdot 3^0+2\cdot 3^{-1}+1\cdot 3^{-2}$$

Ora, svolgendo i calcoli indicati, si trova:

$$2\cdot 3^2+1\cdot 3^1+0\cdot 3^0+2\cdot 3^{-1}+1\cdot 3^{-2}=$$
$$=2\cdot 9+3+0+2\cdot 0,(3)+1\cdot 0,(1)$$

In definitiva risulta:

$$210{,}21_3=21,(7)$$

Si scopre così un risultato interessante: il numero 21,(7) che è periodico nella scrittura decimale, non è più periodico quando si adotta il sistema di numerazione in base 3.
Dunque *il fatto che un numero sia periodico dipende dalla base del sistema di numerazione usato.*
Ecco qualche altro esempio:

$$0{,}1_3 = 1\cdot 3^{-1} = \frac{1}{3} = 0,(3)$$

$$0{,}02_3 = 2\cdot 3^{-2} = \frac{2}{9} = 0,(2)$$

$$0{,}12_3 = 1\cdot 3^{-1} + 2\cdot 3^{-2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9} = 0,(5)$$

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Che cosa vuol dire sistema posizionale in base 10?

② Elencare le regole che si usano per scrivere un numero secondo il sistema posizionale in base 10.

③ Elencare le regole che si usano per scrivere un numero secondo il sistema posizionale in base 5.

④ Elencare le regole che si usano per scrivere un numero secondo il sistema posizionale in base 3.

Comprensione

① Individuare ***l'errore*** nei seguenti numeri:

$435{,}3_3 \qquad 789{,}75_5$

② Dire quali regole si debbono seguire per scrivere un numero in base 4 e portare qualche esempio di numero scritto in questa base.

③ Spiegare perché la frazione $\frac{1}{3}$ non dà luogo ad un decimale periodico nel sistema di numerazione in base 3.

④ In quale base $\frac{1}{7}$ non dà certamente luogo ad un decimale periodico?

⑤ Completare il seguente schema, dove *n* indica un qualunque intero compreso fra 2 e 10:

1_n=...... =......
10_n=...... +...... =......
100_n=...... +......+...... =......
$0{,}1_n$=...... +...... =......
$0{,}01_n$=...... +......+...... =......

Applicazioni

① Dare il valore in base 10 dei seguenti numeri scritti in altra base:

$202{,}1_3 \qquad 430{,}4_5 \qquad 65{,}1_7$

② Completare il seguente schema:

10_3=...$\cdot 3^1$+0$\cdot$...=......
10_5=1$\cdot$...+...$\cdot 5^0$=......
10_4=...$\cdot 4^1$+...$\cdot 4^0$=......
10_7=...... +...... =......

③ Indicare una regola generale, valida per qualunque numero intero *n* compreso fra 2 e 10, per esprimere:

10_n=......+......=......

5

Il sistema binario

Il sistema binario

Il sistema binario è il sistema posizionale in base 2.

La scelta della base 2 è importante per le sue notevoli applicazioni nel campo dei calcolatori (cfr. la scheda «Il sistema binario nei calcolatori», p. 72) .

Nel sistema binario, per scrivere e leggere un numero, si procede così:

- si usano le due cifre 0 e 1;
- ogni cifra viene moltiplicata per una potenza di 2.

Leggere un numero scritto nel sistema binario

Applicando le regole precedenti è facile leggere un numero scritto nel sistema binario; ecco qualche esempio:

$1_2=1\cdot2^0=\mathbf{1}$

$10_2=1\cdot2^1+0\cdot2^0=\mathbf{2}$

$11_2=1\cdot2^1+1\cdot2^0=\mathbf{3}$

$100_2=1\cdot2^2+0\cdot2^1+0\cdot2^0=\mathbf{4}$

$101_2=1\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0=\mathbf{5}$

$110_2=1\cdot2^2+1\cdot2^1+0\cdot2^0=\mathbf{6}$

$111_2=1\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0=\mathbf{7}$

Scrivere numeri nel sistema binario

Si tratta ora di risolvere il problema seguente: è dato un numero scritto in base 10 e si vuole scrivere lo stesso numero in base 2.

Basta qualche esempio per capire come procedere.

A. Scrivere il numero 27

Si può procedere nel modo seguente:

I. Si scrivono le potenze di 2 fino a raggiungere (o superare) il numero 27; si ha:

$2^0=1$ *
$2^1=2$ *
$2^2=4$
$2^3=8$ *
$2^4=16$ *
$2^5=32$

II. Si scrive il numero 27 come somma di potenze di 2 (sono quelle indicate con l'asterisco); si ha:

$27=16+8+2+1$ cioè $27=2^4+2^3+2^1+2^0$

e quindi:

$27=1\cdot2^4+1\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0$

In conclusione risulta:

$27=11011_2$

B. Scrivere il numero 32

Basta riprendere la precedente tabella con le potenze di 2 per trovare:

$32=2^5$

e quindi:

$32=1\cdot2^5+0\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+0\cdot2^0$

In conclusione risulta:

$32=100000_2$

Calcoli nel sistema binario

Le operazioni di *addizione e moltiplicazione nel sistema binario* sono basate sulle regole indicate nella seguente tabella:

Addizione	Moltiplicazione
$0+0=0$	$0\cdot0=0$
$1+0=0+1=1$	$0\cdot1=1\cdot0=0$
$1+1=10$	$1\cdot1=1$

La moltiplicazione si svolge dunque secondo le regole abituali.

L'addizione presenta invece una particolarità da tenere presente; risulta:

$1+1=10$ cioè 0 «col riporto di 1»

È facile verificare che è esatto il risultato delle seguenti operazioni:

$$\begin{array}{r} 110\,+ \\ \underline{1001\,=} \\ 1111 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 111\,+ \\ \underline{110\,=} \\ 1101 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11\,\times \\ \underline{11\,=} \\ 11 \\ \underline{11} \\ 1001 \end{array}$$

Verifiche

Conoscenze

① Che cosa vuol dire sistema binario?

② Quali cifre si usano per scrivere un numero nel sistema binario?

③ Scrivere le regole su cui si basano l'addizione e la moltiplicazione nel sistema binario.

Comprensione

① Spiegare perché le seguenti uguaglianze ***sono errate*** nel sistema binario:

$1+1=2$ $\qquad 11\cdot11=121$

② Spiegare perché le seguenti uguaglianze ***sono corrette*** nel sistema binario:

$10\cdot10=100$ $\qquad 11\cdot10=110$

Applicazioni

① Scrivere nel sistema decimale i numeri seguenti, scritti nel sistema binario.

$1010=1\cdot\ldots+0\cdot\ldots+1\cdot\ldots+0\cdot\ldots=\ldots\ldots$

$1100=1\cdot\ldots+1\cdot\ldots+0\cdot\ldots+0\cdot\ldots=\ldots\ldots$

② Scrivere nel sistema binario i numeri seguenti, scritti nel sistema decimale.

$19=16+2+1=1\cdot\ldots+0\cdot\ldots+0\cdot\ldots+1\cdot\ldots+1\cdot\ldots= =\ldots\ldots$

$25=16+8+1=1\cdot\ldots+1\cdot\ldots+0\cdot\ldots+0\cdot\ldots+1\cdot\ldots= =\ldots\ldots$

③ Eseguire i seguenti calcoli nel sistema binario:

$11+11\cdot11$ $\qquad (11+11)\cdot11$

Eseguire le operazioni corrispondenti nel sistema decimale, controllando l'esattezza dei risultati.

Il sistema binario nei calcolatori

Il sistema decimale e l'abaco

Il sistema binario risolve in modo semplice un antico problema: rappresentare i numeri su un supporto meccanico.

Quando si usava solo il sistema decimale, il supporto meccanico più diffuso era l'abaco (fig. 1). Se, per esempio, si volevano rappresentare numeri di 4 cifre, occorrevano 4 caselle dove mettere dei gettoni; così ogni casella poteva assumere dieci stati diversi – contenere 0, 1, 2, ..., 9 gettoni – e ogni stato rappresentava la cifra corrispondente.

Dunque, per rappresentare i numeri nel sistema decimale occorrono delle caselle capaci di assumere *dieci* stati diversi.

Figura 1
Per rappresentare i numeri decimali si usava l'abaco

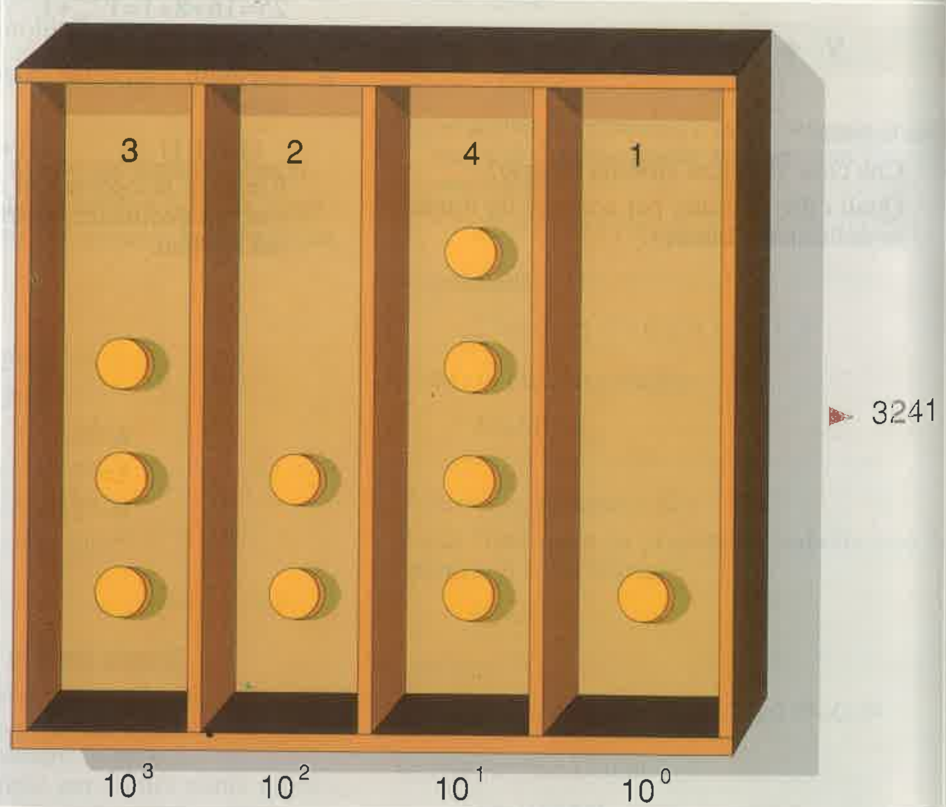
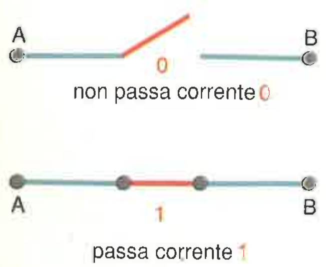


Figura 2
Per rappresentare una cifra binaria basta un circuito con un interruttore



Il sistema binario e i calcolatori

Nel sistema binario le cifre sono soltanto 0 e 1, perciò, per rappresentare i numeri, occorrono delle caselle capaci di assumere solo *due* stati diversi.

Ma allora, per rappresentare una cifra binaria, invece di una casella, si può usare un circuito capace di assumere due stati: passa corrente (1) o non passa corrente (0) (fig. 2).

Proprio su questo sono basati i calcolatori elettronici che rappresentano i numeri e svolgono i calcoli nel sistema binario.

Tradurre i numeri dal sistema decimale a quello binario

Il calcolatore tascabile è basato sul sistema binario; eppure sulla tastiera del tascabile sono rappresentate le nove cifre decimali. La macchina dovrà perciò tradurre i numeri nel sistema binario, basandosi sulla scrittura binaria delle cifre decimali, richiamata qui sotto:

$0=0_2$	$1=1_2$	$2=10_2$	$3=11_2$	$4=100_2$
$5=101_2$	$6=110_2$	$7=111_2$	$8=1000_2$	$9=1001_2$

Occorrono dunque quattro cifre binarie per rappresentare le nove cifre decimali; così si può immaginare nel calcolatore, sotto ad ogni tasto, una serie di quattro interruttori, disposti come in fig. 3:

- un *interruttore chiuso* fa passare corrente e rappresenta la cifra *1*;
- un *interruttore aperto* non fa passare corrente e rappresenta *0*.

Per esempio, quando si preme il tasto $\boxed{7}$ (fig. 4), si chiudono i tre interruttori indicati in figura e si forma il numero 0111, che è proprio 7 scritto in base 2.

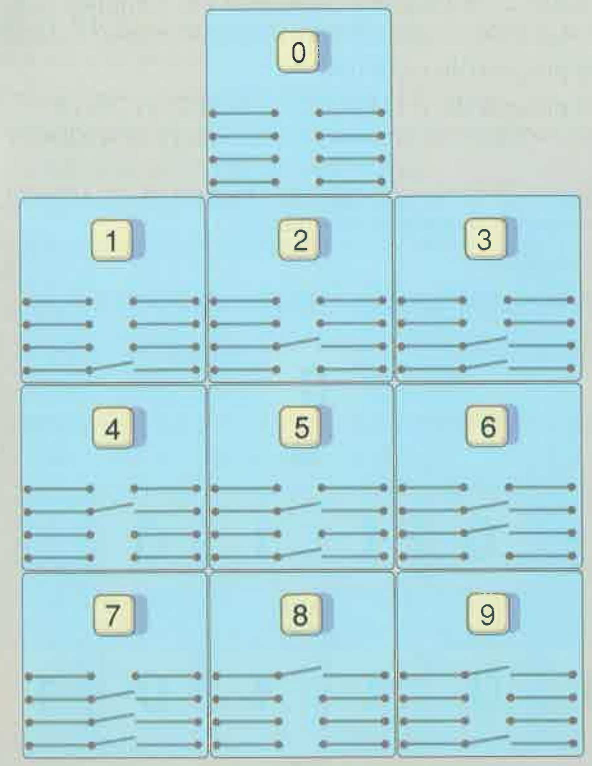
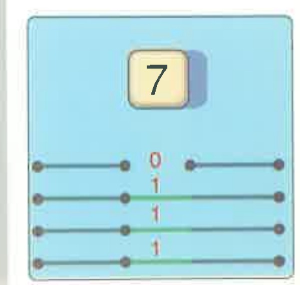


Figura 3
Sotto ogni tasto del calcolatore si possono immaginare 4 interruttori

Figura 4
Quando si preme il tasto 7 si ottiene la scrittura binaria del numero



Il sistema esadecimale e le sue applicazioni

Bit, nibble, byte

Un calcolatore elettronico rappresenta i numeri per mezzo di appositi circuiti che possono assumere due stati diversi, chiamati convenzionalmente 0 e 1 (cfr. anche «Il sistema binario nei calcolatori», p. 72).

Per semplificare il discorso si può immaginare, al posto del circuito, una casella dove scrivere 0 oppure 1, cioè una cifra binaria; questa casella si chiama *bit*, dal termine inglese *binary digit*, che significa, appunto, «cifra binaria».

In conclusione, il termine *bit* indica una cifra binaria.

Tuttavia, nella costruzione dei calcolatori è conveniente raggruppare più bit; i raggruppamenti più usati sono i seguenti (fig. 1):

- *nibble*, che è un gruppo di 4 bit;
- *byte*, che è un gruppo di 8 bit.

L'idea del sistema di numerazione in base 16

Un gruppo di quattro cifre binarie è dunque il più semplice raggruppamento di bit; quali numeri si possono rappresentare in questo modo? È facile rispondere:

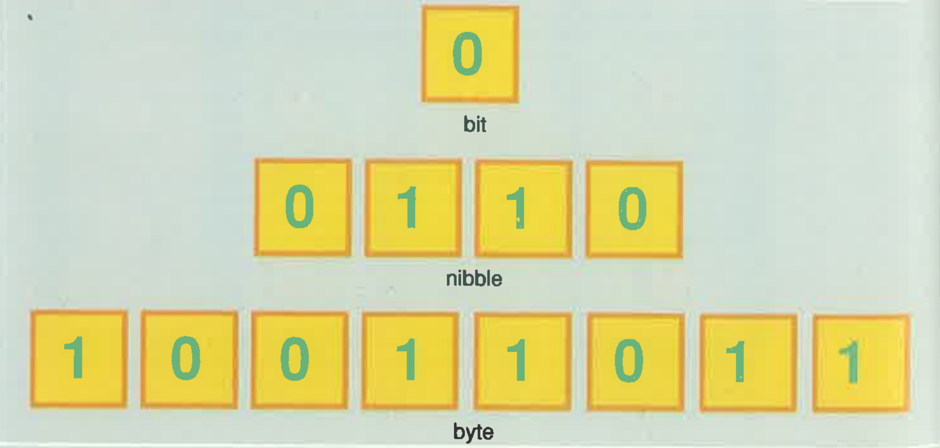
- il numero più piccolo è $0000=0$
- il numero più grande è $1111=1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0=15$

Dunque *un nibble corrisponde ad una casella capace di assumere 16 stati possibili.*

Questo suggerisce l'idea di scrivere i numeri *in un sistema posizionale in base 16*, chiamato anche *sistema esadecimale*:

- si usano 16 cifre;
- ogni cifra deve essere moltiplicata per una potenza di 16.

Figura 1
Bit, nibble, byte



Le cifre del sistema esadecimale

La scrittura dei numeri nel sistema esadecimale pone un problema: occorrono 16 cifre, mentre le cifre del sistema decimale sono solo 10.

Il problema è stato risolto usando le lettere dell'alfabeto per rappresentare le ultime sei cifre; così *le 16 cifre del sistema in base 16 sono le seguenti:*

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Leggere e scrivere numeri nel sistema esadecimale

Ecco qualche esempio di numero scritto nel sistema esadecimale:

10 A0 F5 A8C 0,1 FA,BE

Quanto valgono questi numeri nel sistema decimale? Basta leggere i numeri tenendo presenti le regole del sistema posizionale; si ha:

$10_{16}=1\cdot 16^1+0\cdot 16^0=16$
$A0_{16}=10\cdot 16^1+0\cdot 16^0=160$
$F5_{16}=15\cdot 16^1+5\cdot 16^0=245$
$A8C_{16}=10\cdot 16^2+8\cdot 16^1+12\cdot 16^0=2700$
$0{,}1_{16}=1\cdot 16^{-1}=0{,}0\,625$
$FA{,}BE_{16}=15\cdot 16^1+10\cdot 16^0+11\cdot 16^{-1}+14\cdot 16^{-2}=250{,}742\,187\,5$

Viceversa, per tradurre un numero dal sistema decimale a quello esadecimale, bisogna scriverlo come somma di potenze di 16; ecco qualche esempio:

$10=A_{16}$
$100=6\cdot 16^1+4\cdot 16^0=64_{16}$
$1000=3\cdot 16^2+14\cdot 16+8\cdot 16^0=3E8_{16}$

Spunti di discussione e di lavoro

① Spiegare il significato dei termini *bit, nibble, byte*.
② Spiegare il significato del termine *sistema esadecimale*.
③ Scrivere le sedici cifre del sistema esadecimale.
④ Spiegare perché la tecnica dei calcolatori suggerisce il sistema esadecimale.
⑤ Calcolare il più grande numero che si può rappresentare con due nibble (cioè con un byte).
⑥ Tradurre i numeri seguenti dal sistema esadecimale a quello decimale.
$BA_{16}=11\cdot$......$+10\cdot$......$=$.........
$F{,}E_{16}=15\cdot$......$+14\cdot$......$=$.........
⑦ Tradurre i numeri seguenti dal sistema decimale a quello esadecimale.
$175=160+15=$......$\cdot 16^1+$......$\cdot 16^0=$.........
$2730=10\cdot 256+10\cdot 16+10=$......$\cdot 16^2+$......$\cdot 16^1+$......$\cdot 16^0=$.........

Sintesi

Che cosa bisogna sapere

Frazioni

Sono numeri scritti nella forma $\frac{a}{b}$, dove le lettere a e b indicano due numeri interi; a si chiama *numeratore*, b si chiama *denominatore*.

Esempi: $\frac{3}{4}$ $\quad -\frac{2}{3}$ $\quad -3 = -\frac{6}{2}$

$4 = \frac{12}{3}$ $\quad 1 = \frac{3}{3}$ $\quad 0 = \frac{0}{4}$

Le frazioni si possono scrivere in forma decimale

Per scrivere una frazione in forma decimale si esegue la divisione indicata dalla linea di frazione.

Esempi: $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75$

$\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0{,}5$

Frazioni equivalenti

Sono frazioni che corrispondono allo stesso numero decimale.

Esempi: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \ldots = 0{,}75$

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots = 0{,}5$

Frazioni ridotte ai minimi termini

È ridotta ai minimi termini la frazione che ha numeratore e denominatore primi fra loro (cioè senza fattori comuni).

Esempi: $\frac{2}{5}$ $\quad \frac{5}{2}$

$\frac{3}{4}$ $\quad \frac{4}{3}$

Numeri decimali finiti e numeri decimali periodici

Quando si scrive una frazione in forma decimale si trovano due casi possibili:

I. Il numero decimale ha, dopo la virgola, un numero finito di cifre.

Esempi: $\frac{3}{8} = 0{,}375$ $\quad \frac{1}{5} = 0{,}2$ $\quad \frac{3}{4} = 0{,}75$

II. Il numero decimale ha, dopo la virgola, infinite cifre che si ripetono (periodo).

Esempi: $\frac{5}{12} = 0{,}41(6)$ $\quad \frac{2}{3} = 0{,}(6)$ $\quad \frac{3}{7} = 0{,}(428571)$

Questo secondo caso si verifica quando la frazione, ridotta ai minimi termini, non ha il denominatore composto solo da 2 o 5.

Esempi: $\frac{4}{3}$ $\quad \frac{1}{6}$ $\quad \frac{5}{12}$

Approssimazioni

I numeri periodici si approssimano con numeri decimali finiti in due modi:
- per *troncamento*: si scrivono solo le prime cifre dopo la virgola, eliminando le altre;
- per *arrotondamento*: si scrivono solo le prime cifre, eliminando le altre con la regola seguente:
  a. si lascia inalterata la cifra rimanente, se la prima cifra eliminata è inferiore a 5;
  b. altrimenti si aumenta di 1 la cifra rimanente.

Esempi: $0{,}41(6) \cong 0{,}41$ troncato

$0{,}41(6) \cong 0{,}42$ arrotondato

Numeri scritti nel sistema posizionale in base 10

Si usano le dieci cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Ogni cifra deve essere moltiplicata per un'opportuna potenza di 10.

Esempio: $478{,}25 = 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$

Numeri scritti nel sistema binario

Il sistema binario è il sistema posizionale in base 2 e perciò:
- si usano le due cifre 0 e 1;
- ogni cifra deve essere moltiplicata per un'opportuna potenza di 2.

Esempio: $111{,}11_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$

Che cosa bisogna saper fare

A. Riconoscere le frazioni che danno luogo ad un numero periodico

Conviene applicare il procedimento seguente:

I. ridurre la frazione ai minimi termini;
II. scomporre in fattori il denominatore;
III. se i fattori del denominatore sono solo 2 o 5 o entrambi il decimale è finito, altrimenti è periodico.

Attività 1
Stabilire se dà luogo ad un decimale finito la frazione:

$$\frac{9}{24}$$

I. $\frac{9}{24} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{8}$

II. 8=........

III. il denominatore è composto solo con il fattore ...., perciò la frazione dà luogo ad un decimale ....; si ha infatti:

$$\frac{9}{24} = 0{,}375$$

Attività 2
Stabilire se dà luogo ad un decimale finito la frazione:

$$\frac{4}{24}$$

I. $\frac{4}{24} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{6}$

II. 6=.......

III. il denominatore è composto dai fattori .... e ...., perciò la frazione dà luogo ad un decimale ....; si ha infatti:

$$\frac{4}{24} = \dots\dots\dots$$

B. Approssimare numeri decimali periodici

Attività 3
Data la frazione:

$$\frac{1}{11}$$

calcolarne alcuni valori approssimati valendosi prima del troncamento e poi dell'arrotondamento.

Eseguita la divisione

$$1:11=0,(09)$$

si trovano i seguenti valori approssimati a meno di 0,1:

- per troncamento $\frac{1}{11} \cong \dots\dots\dots$

- per arrotondamento $\frac{1}{11} \cong \dots\dots\dots$

Determinare i valori approssimati a meno di 0,01 e 0,001.
Esaminare quindi il risultato dato dal calcolatore tascabile.

Attività 4
Data la frazione:

$$\frac{1}{13}$$

calcolarne i seguenti valori approssimati:
- a meno di 0,1 per troncamento e per arrotondamento;
- a meno di 0,01 per troncamento e per arrotondamento;
- trovare il valore dato dal calcolatore tascabile.

C. Leggere e scrivere numeri nel sistema binario

Attività 5
Tradurre i seguenti numeri binari nel sistema decimale.

$$10{,}1_2 = \dots\cdot 2^1 + \dots\cdot 2^0 + \dots\cdot 2^{-1} = \dots\dots$$

$$101{,}11_2 = \dots\cdot 2^2 + \dots\cdot 2^1 + \dots\cdot 2^0 + \dots\cdot 2^{-1} + \dots\cdot 2^{-2} \dots\dots$$

Attività 6
Tradurre i seguenti numeri decimali nel sistema binario.

$$10 = 8+2 = \dots\cdot 2^3 + \dots\cdot 2^2 + \dots\cdot 2^1 + \dots\cdot 2^0 = \dots\dots$$

$$100 = 64+32+4 = \dots\cdot 2^6 + \dots\cdot 2^5 \dots\cdot 2^4 + \dots\cdot 2^3 + \dots\cdot 2^2 + \dots\cdot 2^1 + \dots\cdot 2^0 \dots\dots$$