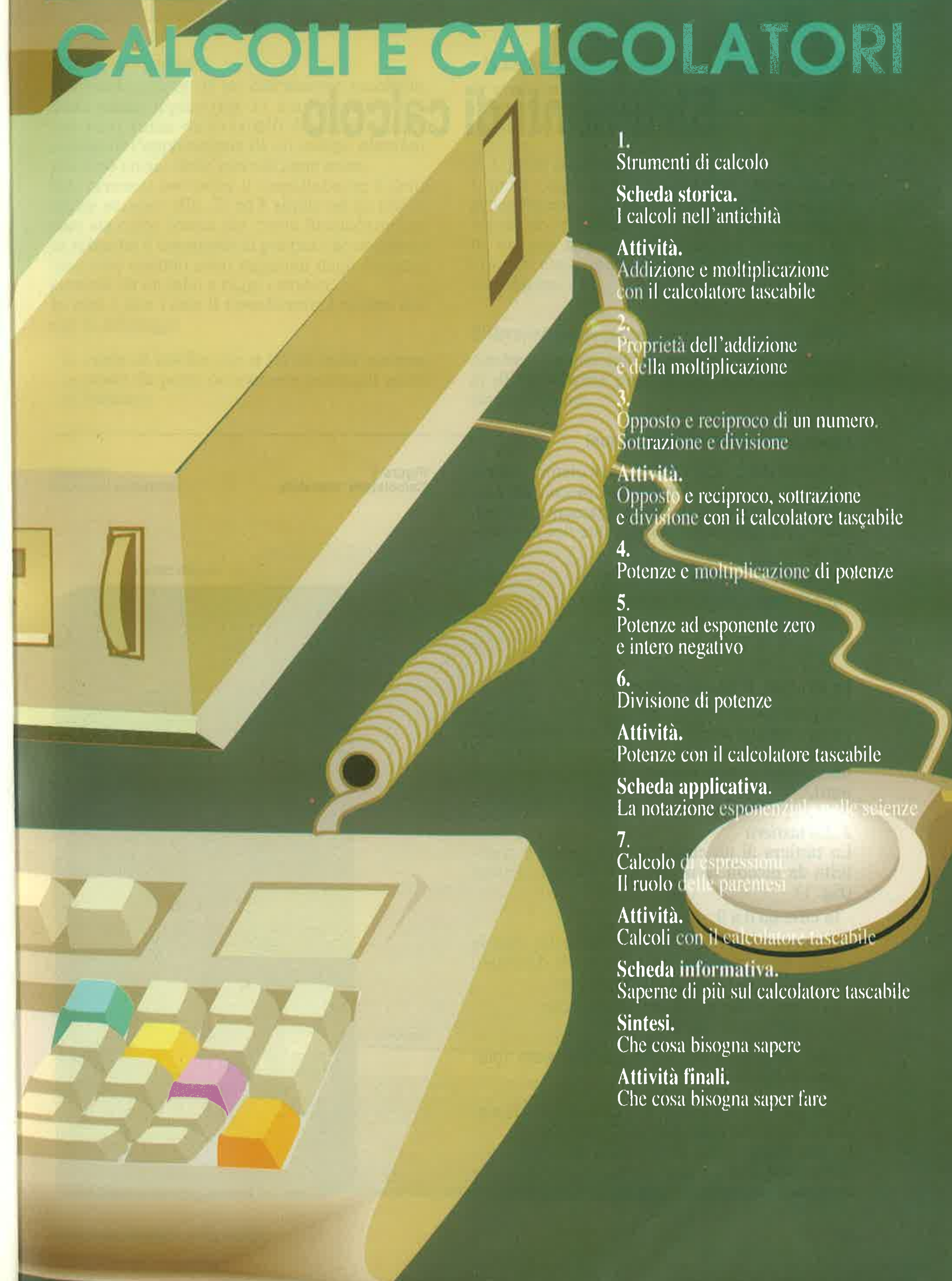
CAPITOLO PRIMO

CALCOLI E CALCOLATORI



1.
Strumenti di calcolo

Scheda storica.
I calcoli nell'antichità

Attività.
Addizione e moltiplicazione con il calcolatore tascabile

2.
Proprietà dell'addizione e della moltiplicazione

3.
Opposto e reciproco di un numero. Sottrazione e divisione

Attività.
Opposto e reciproco, sottrazione e divisione con il calcolatore tascabile

4.
Potenze e moltiplicazione di potenze

5.
Potenze ad esponente zero e intero negativo

6.
Divisione di potenze

Attività.
Potenze con il calcolatore tascabile

Scheda applicativa.
La notazione esponenziale nelle scienze

7.
Calcolo di espressioni. Il ruolo delle parentesi

Attività.
Calcoli con il calcolatore tascabile

Scheda informativa.
Saperne di più sul calcolatore tascabile

Sintesi.
Che cosa bisogna sapere

Attività finali.
Che cosa bisogna saper fare

1 Strumenti di calcolo

I calcolatori elettronici più comuni

A partire dagli anni ottanta i calcolatori elettronici sono diventati sempre più piccoli ed economici e perciò si sono rapidamente diffusi. Sono diventati molto comuni due tipi di calcolatore:

- il calcolatore tascabile (fig. 1);
- il personal computer, abbreviato p.c. (fig. 2).

La struttura di un calcolatore

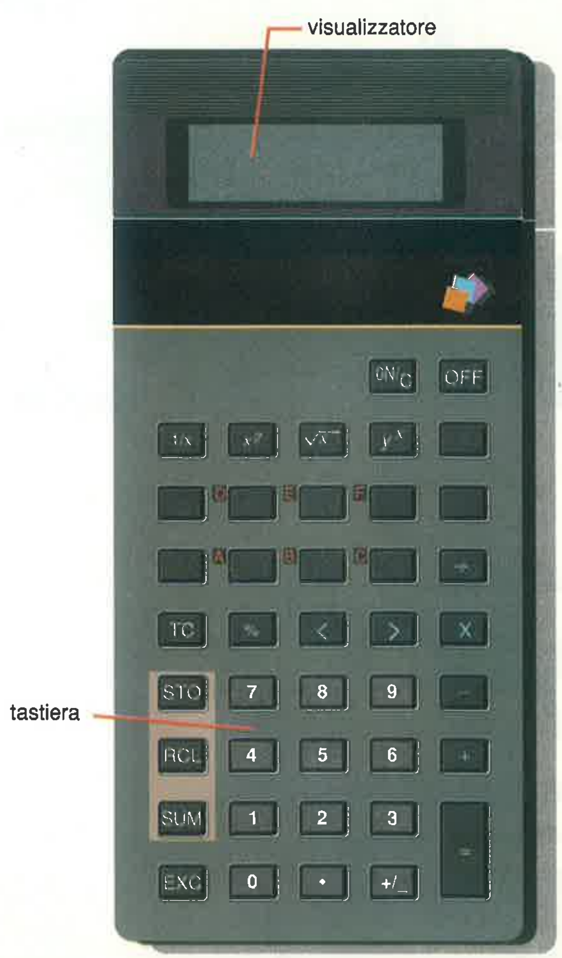
Un personal computer ed un piccolo tascabile hanno aspetto diverso; tuttavia si possono individuare tre parti che sono presenti in tutti e due, anche se con dimensioni e capacità differenti.

1. La tastiera
La tastiera di un calcolatore tascabile è costituita da piccoli tasti che portano vari simboli (fig. 1):

- le cifre da 0 a 9;
- il punto (·), che prende il posto della virgola nella rappresentazione dei numeri decimali, secondo l'uso inglese ed americano;
- i simboli delle operazioni aritmetiche:
  $+ \; - \; \times \; \div$
- altri simboli, di cui verrà gradualmente spiegato il significato.

In un personal computer, invece, spesso la tastiera è staccata dal resto del calcolatore (fig. 2).
In tutti e due i casi la tastiera è un *dispositivo d'ingresso*, cioè un dispositivo che serve a «far entrare» le richieste e i dati nel calcolatore.

Figura 1
Calcolatore tascabile



2. Il visualizzatore
Il visualizzatore di un calcolatore tascabile, detto anche *display* (fig. 1), è un piccolo schermo costituito da *cristalli liquidi*; questi, mediante l'applicazione di un campo elettrico, possono creare delle piccole zone scure.
Nel personal computer il visualizzatore è detto anche *monitor* (fig. 2) ed è simile ad un televisore sia come forma che come funzionamento: lo schermo è composto di puntini che emettono luce solo quando sono raggiunti dagli elettroni prodotti da un tubo a raggi catodici.
In tutti e due i casi il visualizzatore mostra due tipi di messaggi:

- la copia di quello che si scrive sulla tastiera, in modo da poter riconoscere eventuali errori di battitura;
- la risposta del calcolatore alle richieste inserite

Il visualizzatore è dunque un *dispositivo di uscita*, cioè un dispositivo capace di «far uscire» dei messaggi dal calcolatore.

3. L'unità centrale
L'unità centrale è il dispositivo che esegue i procedimenti richiesti e controlla il funzionamento del calcolatore; è la parte più importante, ma non si vede dall'esterno: è costituita da circuiti elettronici, alloggiati all'interno del calcolatore.

Differenze fra un p.c. ed un calcolatore tascabile

Anche se hanno una struttura comune, i due tipi di calcolatore presentano varie differenze; eccone alcune.

Figura 2
Personal computer

Un calcolatore tascabile ha la tastiera formata da pochi tasti, mentre un personal computer ha una tastiera simile a quella di una macchina da scrivere (fig. 3).
Un calcolatore tascabile può soltanto eseguire dei calcoli; un personal computer può fare molto di più (tracciare grafici, giocare a scacchi, gestire un bilancio, far suonare uno strumento elettronico, etc.).
Un calcolatore tascabile, appena acceso, è pronto ad eseguire i calcoli; invece, un personal computer, per poter funzionare, ha bisogno di molte informazioni, che abitualmente vengono inserite per mezzo di dischi.
Un calcolatore tascabile dimentica subito i calcoli eseguiti; invece un personal computer ha la possibilità di ricordare risultati e procedimenti, che possono essere registrati anche su appositi dischi o nastri magnetici (chiamati *memoria di massa*).

I calcolatori tascabili programmabili

La differenza fra calcolatori tascabili e personal computer non è però così netta quanto sembra finora. Sono infatti molto diffusi i calcolatori tascabili programmabili, che sono piccoli come un calcolatore tascabile, ma hanno parte delle capacità di un personal computer (fig. 4): per esempio, alcuni possono tracciare dei grafici sul display.

Il calcolatore diventa «ruote per la mente»

A che cosa serve un calcolatore? Come tante altre macchine (automobile, gru, lavatrice...) aumenta le capacità dell'uomo o lo sostituisce nei lavori più pesanti e ripetitivi.
Ma il calcolatore ha una caratteristica particolare: è destinato ad aumentare le capacità mentali dell'uomo o a sostituirlo in alcune attività intellettuali (svolgere lunghi calcoli numerici, applicare formule per risolvere delle equazioni, etc.).
Per questo motivo, nei paesi anglosassoni, il calcolatore è stato chiamato *wheels for the mind*, cioè «ruote per la mente».

Figura 3
La tastiera di un personal computer e quella di una macchina da scrivere

Perché un calcolatore può sbagliare

Tuttavia un calcolatore può sbagliare, e questo avviene soprattutto per due motivi:

I. perché la macchina funziona male (per esempio, un tascabile può avere le pile quasi scariche);

II. perché chi usa il calcolatore organizza i calcoli in modo errato (basta sbagliare nel premere un tasto).

La causa più frequente di errore è senza dubbio la seconda.
È molto importante dunque imparare ad usare nel modo migliore queste preziose «ruote per la mente»: nel volumetto destinato all'informatica si trovano tutte le indicazioni per usare un personal computer, mentre le «Attività» di questo capitolo e dell'analogo capitolo del secondo volume conducono ad impadronirsi del calcolatore tascabile.

Figura 4
Calcolatore tascabile programmabile

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Descrivere la struttura di un calcolatore tascabile.

② Descrivere la struttura di un personal computer.

③ Spiegare il significato dei termini seguenti: p.c., monitor, display.

④ Spiegare il significato dei termini seguenti: dispositivo d'ingresso, dispositivo di uscita, unità centrale.

⑤ Elencare le principali differenze tra un p.c. ed un calcolatore tascabile.

Comprensione

① Che cos'è la memoria di massa di un calcolatore?

② Spiegare a che cosa serve la tastiera di un calcolatore.

③ Spiegare a che cosa serve il visualizzatore di un calcolatore.

④ Spiegare a che cosa serve l'unità centrale di un calcolatore.

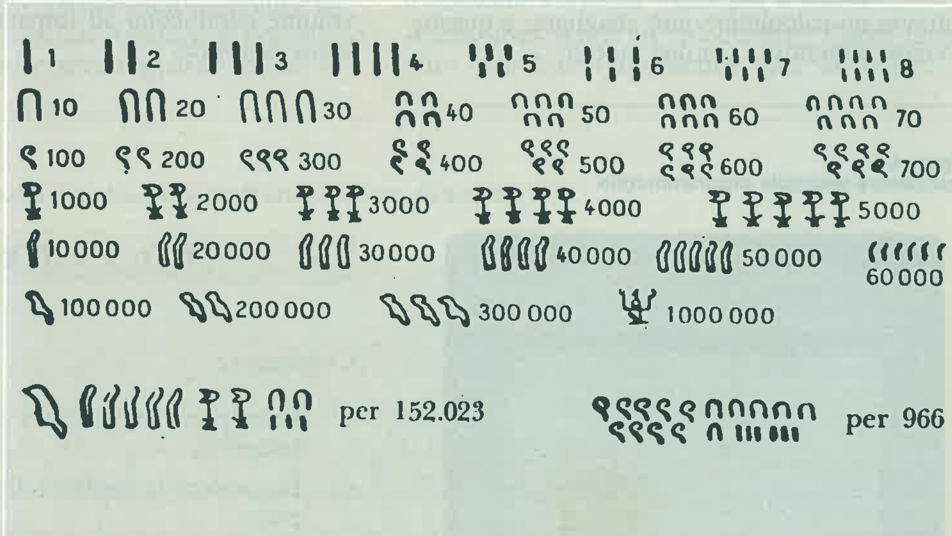
⑤ Spiegare perché un calcolatore può sbagliare.

I calcoli nell'antichità

I numeri egizi

Agli inizi della storia dell'antico Egitto (III millennio a.C.) si trova già affermato un sistema di numerazione decimale molto simile a quello oggi in uso: la scrittura egizia ha segni speciali per le unità, per le decine, etc. come mostra la fig. 1.

Figura 1
I numeri nell'antico Egitto



Si nota subito, guardando la figura, che non c'è un simbolo per lo zero; infatti lo zero compare nei testi indiani e arabi molto più tardi (VII-VIII secolo d.C.) e viene introdotto in Europa ancora più tardi (XII secolo d.C.). Perciò, per scrivere, per esempio, il numero 2030, gli egizi procedevano così: disegnavano 2 volte il simbolo che indicava 1000 e 3 volte il simbolo che indicava 10. In fig. 1 si trova qualche esempio di numero scritto alla maniera degli antichi egizi.

Come si eseguiva la moltiplicazione nell'antico Egitto

È interessante vedere come gli egizi eseguivano le moltiplicazioni senza imparare a memoria le tavole pitagoriche, ma ricorrendo solo alle moltiplicazioni per 2; un semplice esempio – moltiplicare 13 per 7 – farà capire il procedimento.

- Lo scriba addetto ai calcoli iniziava compilando una tabella come la seguente, in cui i numeri 1 e 7 scritti sulla prima riga venivano raddoppiati più volte.

1	7
2	14
4	28
8	56

- Si lavorava quindi sulla tabella nel modo seguente:

$$13=1+4+8 \quad \left\{\begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & 7 \\ 2 & & 14 \\ 4 & \rightarrow & 28 \\ 8 & \rightarrow & 56 \end{array}\right\} \quad 13\times7=7+28+56=91$$

In definitiva, gli egizi svolgevano le moltiplicazioni basandosi sulla proprietà distributiva:

$$7\times13=7\times(1+4+8)=7\times1+7\times4+7\times8=7+28+56=91$$

Il sistema di calcolo egizio è lento, ma non esige alcuno sforzo di memoria e permette di eseguire facilmente moltiplicazioni anche molto lunghe.

Come si eseguiva la moltiplicazione nel XV secolo

In Europa, alla fine del Quattrocento, eseguire le moltiplicazioni era ancora un problema complicato e ogni addetto ai calcoli aveva un suo metodo.

Il primo libro di aritmetica, stampato a Treviso nel 1478, fa conoscere alcuni dei metodi allora più diffusi per svolgere i calcoli. Ecco tre metodi interessanti.

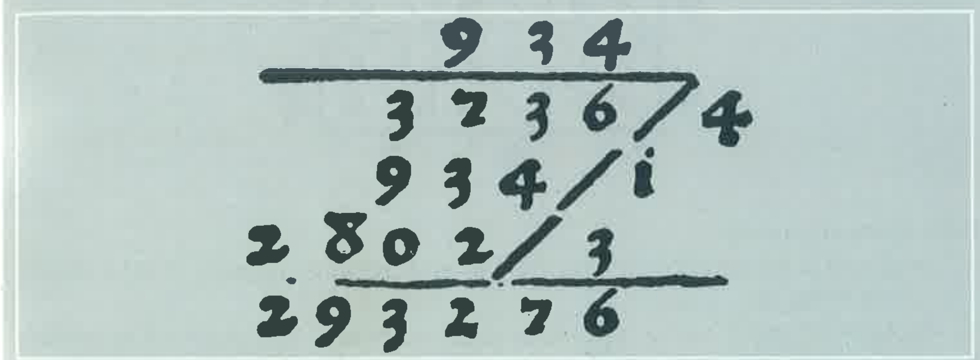


Figura 2
Una moltiplicazione in Italia alla fine del Quattrocento

I. Metodo usato ancora oggi

Il metodo è illustrato in fig. 2, dove viene eseguita la moltiplicazione 934×314, ed è basato sulla proprietà distributiva; si ha infatti:

$$934\times314=934\times(300+10+4)=934\times300+934\times10+934\times4$$

cioè:

$$934\times314=280200+9340+3736$$

Ora, eseguendo l'addizione in colonna, si trova:

$$\begin{array}{r} 3736+ \\ 9340+ \\ 280200= \\ \hline 293276 \end{array}$$

La colonna dei numeri suggerisce un'osservazione: si ottengono le stesse cifre incolonnate nel medesimo modo basandosi sulla regola seguente:

1. scrivere il prodotto 934×4=3736;
2. sotto al numero precedente, ma «spostandosi di una cifra verso sinistra», scrivere 934×1=934;
3. sotto ai due numeri precedenti, ma «spostandosi ancora di una cifra verso sinistra», scrivere 934×3=2802;
4. addizionare i tre numeri ottenuti.

Questo è proprio il metodo usato ancora oggi per eseguire le moltiplicazioni a mano.

II. Metodo per graticola (o per gelosia)
La fig. 3 mostra una diversa tecnica per svolgere la stessa moltiplicazione.

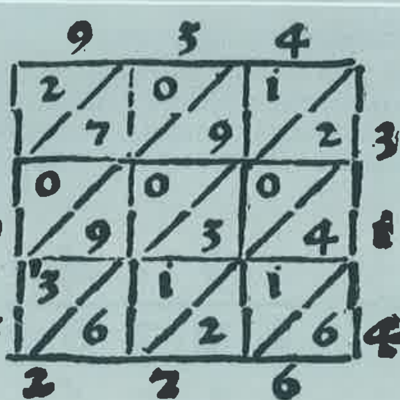


Figura 3
Una moltiplicazione per graticola

Ecco come si procede:
1. si scrive il primo numero (934) in alto ed il secondo numero (314) a destra come in fig. 4;
2. in ogni casella si scrive il prodotto dei due numeri corrispondenti scrivendo le due cifre come indicato in fig. 5;
3. si completa la tabella (fig. 6);
4. si addizionano le cifre seguendo l'allineamento delle diagonali, partendo dall'angolo in basso a destra e riportando le decine alla diagonale superiore (fig. 7);
5. si completano tutte le addizioni e si ottiene il risultato (293 276), da leggere da sinistra in alto verso destra in basso (fig. 8).

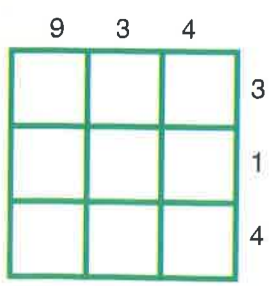


Figura 4
Si imposta la moltiplicazione

Questo metodo di svolgere le moltiplicazioni era chiamato *per graticola* o *per gelosia* (dal nome dato alle persiane delle finestre).

In fig. 9 è riportata una moltiplicazione molto più lunga, eseguita con la stessa tecnica: i disegni ornamentali alleviano la fatica del calcolo e rendono questa pagina aritmetica del Cinquecento più gradevole.

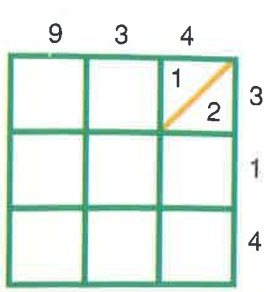


Figura 5
In ogni casella il prodotto dei due numeri corrispondenti

III. Metodo per scapezzo
Un'altra tecnica di calcolo molto diffusa nel Rinascimento era la moltiplicazione *per scapezzo*. Ecco come si eseguiva, per esempio, la moltiplicazione 2093×17.

1. si scomponeva il numero 17 nel modo seguente:

17=10+5+2

2. si calcolava il prodotto con il procedimento schematizzato qui sotto:

	2093
per 10	20930+
per 5	10465+
per 2	4186
per 17	35581

Si osserva subito che questo metodo ricorda il procedimento egizio.

Naturalmente, era allora molto apprezzato chi riusciva a scomporre un numero nel modo più semplice e rapido e così eseguire le operazioni diventava anche un'arte (fig. 10).

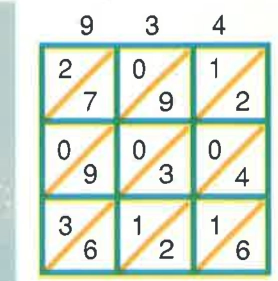


Figura 6
Si completano le moltiplicazioni

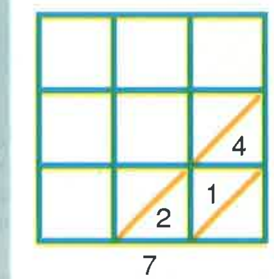


Figura 7
Si addizionano i numeri delle diagonali

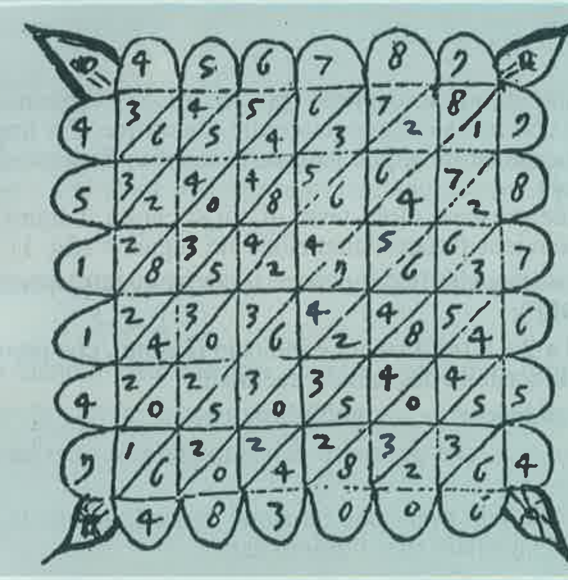


Figura 9
Una moltiplicazione «per graticola» del XVI secolo

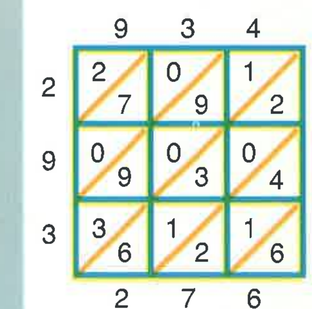


Figura 8
Si completano le addizioni e si ottiene il risultato

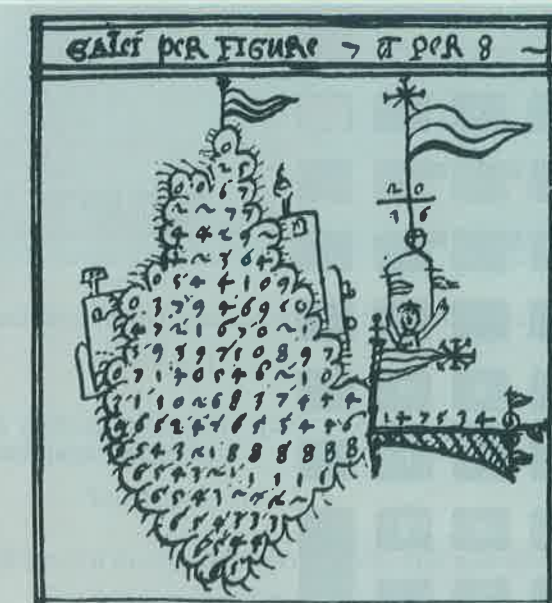


Figura 10
Una divisione con il «metodo del galeone»

Addizione e moltiplicazione con il calcolatore tascabile

Qui e nelle successive «Attività» di questo capitolo (pp. 18, 30, 38) vengono proposte delle attività da svolgere con un calcolatore tascabile scientifico. Per imparare a riconoscere questo tipo di calcolatore si può leggere la scheda «Saperne di più sul calcolatore tascabile», a p. 41.

La tastiera di un tascabile presenta molti tasti, di cui si capirà il significato nell'arco di più anni; per ora conviene fissare l'attenzione sui seguenti (fig. 1):

- il tasto per accendere e spegnere il calcolatore (contrassegnato spesso dai termini inglesi ON e OFF);
- i tasti con le cifre da 0 a 9 e il tasto su cui è indicato il punto, che prende il posto della virgola nella scrittura dei numeri decimali;
- i tasti con i simboli di addizione $\boxed{+}$ e moltiplicazione $\boxed{\times}$;
- il tasto con il simbolo $\boxed{=}$, che permette di completare le operazioni e mostrare il risultato;
- il tasto per cancellare, che può avere due funzioni: cancellare tutte le operazioni in corso oppure cancellare solo l'ultimo dato.

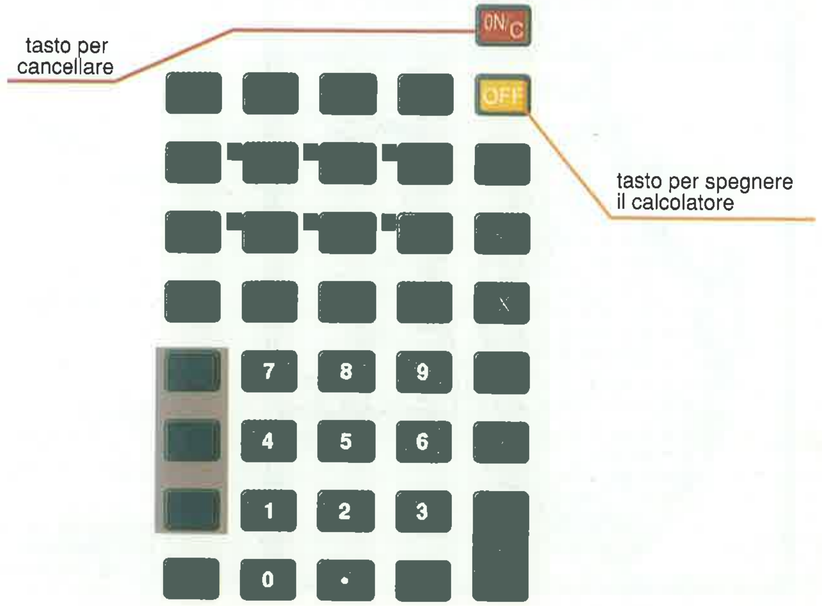


Figura 1
La tastiera del calcolatore tascabile

Per usare nel modo migliore quest'ultimo tasto conviene consultare le istruzioni del proprio calcolatore.

Addizionare due o più numeri

Attività 1

È facile eseguire un'addizione; conviene provare completando la tabella seguente:

Calcolo da eseguire	Tasti da premere	Visualizzatore
120+75	1 2 0 + 7 5 =	195.
Cancellare tutto	CLR	0.
75+120		
Cancellare tutto		
0,32+55,005		

Si osserva subito che le prime due addizioni danno lo stesso risultato; è ovvio, perché per l'addizione vale la *proprietà commutativa* e perciò risulta:

120+75=75+120

Si può ora provare ad addizionare tre numeri, cominciando per esempio con:

5+8+2

Osserviamo il visualizzatore, mentre premiamo i tasti; ecco che cosa si ottiene:

Tasto	Visualizzatore	Commenti
5	5.	
+	5.	
8	8.	
+	13.	Viene subito eseguita la prima addizione
2	2.	
=	15.	Si completano tutte le operazioni

Il calcolatore ha dunque eseguito l'addizione, associando i numeri in questo modo:

(5+8)+2=13+2=15

Ma se dobbiamo eseguire quello stesso calcolo a mente, conviene associare i numeri nel modo seguente:

5+(8+2)=5+10=15

Si applica così *la proprietà associativa* dell'addizione, per cui risulta:

(5+8)+2=5+(8+2)

Moltiplicare due o più numeri

Attività 2

In matematica la moltiplicazione si indica spesso scrivendo un puntino fra i due numeri; si scrive per esempio:

$$50 \cdot 4=200$$

Invece, al calcolatore si deve indicare la moltiplicazione con il simbolo ×, come si usa alla scuola elementare. Per il resto la moltiplicazione presenta molte analogie con l'addizione, come si vede subito completando la tabella seguente:

Calcolo da eseguire	Tasti da premere	Visualizzatore
$12 \cdot 15$	[1] [2] [×] [1] [5] [=]	180.
Cancellare tutto	[ ]	
$15 \cdot 12$	[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]	
Cancellare tutto	[ ]	
$0{,}58 \cdot 48{,}25$	[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]	

Si osserva subito che le prime due moltiplicazioni danno lo stesso risultato: è ovvio, perché anche per la moltiplicazione vale la *proprietà* .... e perciò risulta:

$12 \cdot 15$=.........

Si possono ora moltiplicare tre numeri, per esempio:

$9 \cdot 5 \cdot 2$

Osservare il visualizzatore mentre si premono i tasti e completare questa tabella:

Tasto	Visualizzatore	Commenti
[9]		
[ ]		
[5]		
[ ]		
[2]		
[ ]		

Il calcolatore ha eseguito la moltiplicazione, associando i numeri in questo modo:

(.........×.........)×.........=.........=.........

Ma, per eseguire lo stesso calcolo a mente, conviene procedere in un altro modo:

.........× (..........×..........)=..........=..........

Si applica così *la proprietà* .... della moltiplicazione, per cui risulta:

(..........×..........)×..........=..........×(..........×..........)

2 Proprietà dell'addizione e della moltiplicazione

Perché si parla ancora di proprietà delle operazioni

Le proprietà dell'addizione e della moltiplicazione sono molto importanti:

- sono state alla base delle antiche tecniche di calcolo (cfr. «I calcoli nell'antichità», p. 6);
- sono oggi alla base di un corretto e razionale uso del calcolatore (cfr. «Addizione e moltiplicazione con il calcolatore tascabile», p. 10);
- sono il punto di partenza di tutti gli sviluppi dell'algebra che saranno trattati successivamente in questo testo.

Proprio per la loro importanza, queste proprietà vengono richiamate più volte nel corso degli anni scolastici; introdotte alla scuola elementare e riprese alla scuola media, tuttavia vengono spesso dimenticate perché sembrano tanto ovvie da non meritare attenzione.
È per questo che anche qui, in un testo di scuola superiore, si ripetono le proprietà delle operazioni; sono presentate in una forma schematica, pronte ad essere richiamate ed applicate molto spesso: basta esaminare la tabella A, dove a, b, c indicano dei numeri qualunque.

Il numero 1 è l'elemento neutro della moltiplicazione

Il numero 1 ha un ruolo particolare nella moltiplicazione; risulta:

$\boldsymbol{a \cdot 1=a}$ per qualunque numero a

Dunque, un qualunque numero moltiplicato per 1 rimane inalterato; per questo si dice che *il numero 1 è l'elemento neutro della moltiplicazione.*

Il numero 0 è l'elemento neutro dell'addizione

Nell'addizione, quando si aggiunge 0 ad un numero non si modifica quel numero; si ha:

$\boldsymbol{a+0=a}$ per qualunque numero a

Si dice allora che *il numero 0 è l'elemento neutro dell'addizione.*

Tabella A
Le proprietà dell'addizione e della moltiplicazione

Proprietà	Addizione	Moltiplicazione
	$a+b$	$a \cdot b$
Commutativa	$a+b=b+a$	$a \cdot b=b \cdot a$
Associativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$
Distributiva	$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$	

Il numero 0 è l'elemento assorbente della moltiplicazione

Il numero 0 ha un ruolo particolare nella moltiplicazione; risulta:

$$a \cdot 0=0 \quad \text{per qualunque numero } a$$

Dunque, quando si moltiplica un numero per 0 si ottiene un effetto singolare: il numero scompare, come se fosse assorbito da 0; per questo si dice che *il numero 0 è l'elemento assorbente della moltiplicazione*.
Si osserva subito che non c'è un numero che abbia un ruolo analogo nell'addizione.

La legge di annullamento del prodotto

Questa legge descrive il comportamento del numero 0 nella moltiplicazione da un altro punto di vista: la legge di annullamento del prodotto afferma che *un prodotto vale 0 solo se vale 0 almeno uno dei due fattori*.
È una legge molto particolare: dal risultato di una moltiplicazione si riesce a determinare almeno uno dei due numeri che sono stati moltiplicati; ma questo è possibile solo se il risultato è 0.

Verifiche

Conoscenze

① Elencare le proprietà dell'addizione e della moltiplicazione.

② Che cosa vuol dire che 0 è l'elemento neutro dell'addizione?

③ Che cosa vuol dire che 1 è l'elemento neutro della moltiplicazione?

④ Che cosa vuol dire che 0 è l'elemento assorbente della moltiplicazione?

⑤ Esporre la legge di annullamento del prodotto.

Comprensione

① Esiste un elemento assorbente dell'addizione?

② Spiegare, anche attraverso degli esempi numerici, perché ***è falsa*** la seguente legge: «Un prodotto vale 1 solo se almeno uno dei due fattori vale 1».

③ Esaminare le seguenti uguaglianze e spiegare perché ***non sono vere*** per qualunque terna di numeri a, b, c.

$(a \cdot b) \cdot c=a \cdot c \cdot b \cdot c$

$a \cdot (1+c)=a \cdot c$

$a+b \cdot c=a+b \cdot a+c$

Applicazioni

① Quale proprietà garantisce che le seguenti uguaglianze sono vere per qualunque numero a?

$0+a=a+0 \qquad 1 \cdot a=a \cdot 1 \qquad 0 \cdot a=a \cdot 0$

② Quali proprietà garantiscono che le seguenti uguaglianze sono vere per qualunque numero a?

$0+a=a \qquad 1 \cdot a=a \qquad 0 \cdot a=0$

③ Quali proprietà garantiscono che le seguenti uguaglianze sono vere per qualunque coppia di numeri a, b?

$a+0+b=a+b \qquad 1 \cdot a \cdot b=a \cdot b$

$0 \cdot a \cdot b=0 \qquad a \cdot (1+c)=a+a \cdot c$

④ Quali proprietà garantiscono che le seguenti uguaglianze sono sempre vere per qualunque terna di numeri a, b, c?

$a \cdot (b+c)=(b+c) \cdot a$

$(b+c) \cdot a=a \cdot b+a \cdot c$

$(b+c) \cdot a=b \cdot a+c \cdot a$

Vocabolario

① Nella formula:

$5+3=8$

- *L'addizione* è l'operazione che collega i numeri 5 e 3.
- *Gli addendi* sono ....
- *La somma* è ....

② Nella formula:

$7 \cdot 4=28$

- *La moltiplicazione* è l'operazione che collega i numeri 7 e 4.
- *I fattori* sono ....
- *Il prodotto* è ....

3 Opposto e reciproco di un numero. Sottrazione e divisione

L'opposto di un numero

Quando si introducono i numeri relativi (i numeri «col segno»), si trova una notevole proprietà: ogni numero ha il suo *opposto*. Ecco qualche esempio:

- l'opposto di 4 è -4 perché $4+(-4)=0$
- l'opposto di -5 è 5 perché $-5+5=0$
- l'opposto di 0 è 0 perché $0+0=0$

L'opposto di un numero è il numero che, aggiunto a quello dato, dà come somma zero.

L'opposto di un numero si può ottenere moltiplicando il numero dato per (-1); si ha infatti:

$(-1) \cdot 4=-4 \qquad (-1) \cdot (-5)=5$

$(-1) \cdot 0=0$

In generale si ha:

$$(-1) \cdot a=-a$$

perciò *l'opposto di un qualunque numero* a *si indica con il simbolo* $-a$.

La sottrazione come particolare addizione

È importante fissare l'attenzione sull'opposto di un numero per il seguente motivo: la sottrazione può essere considerata come una particolare addizione. Ecco qualche esempio:

$4-3=4+(-3) \qquad -8-1=(-8)+(-1)$

In generale, dati due qualunque numeri relativi a e b, si può scrivere:

$$a-b=a+(-b)$$

Si dice anche che *per sottrarre due numeri si aggiunge al primo l'opposto del secondo.*

Il reciproco (o inverso) di un numero

Quando si lavora con le frazioni, si trova un'altra notevole proprietà: ogni numero ha il suo *reciproco*. Ecco qualche esempio:

- il reciproco di 4 è $\frac{1}{4}$ perché $4 \cdot \frac{1}{4}=1$
- il reciproco di $\frac{2}{3}$ è $\frac{3}{2}$ perché $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}=1$
- il reciproco di 1 è 1 perché $1 \cdot 1=1$
- il reciproco di -1 è -1 perché $(-1) \cdot (-1)=1$

Il reciproco di un numero è il numero che, moltiplicato per quello dato, dà come prodotto uno.
In generale, *il reciproco di un numero* a *si indica con* $\frac{1}{a}$.

Il reciproco di 0 non esiste

Si è detto prima che ogni numero ha il suo reciproco, ma questo non è del tutto esatto: lo 0, l'elemento assorbente della moltiplicazione, non può avere reciproco.
È facile capire perché: *nessun numero, moltiplicato per 0, riesce a dare un prodotto che vale* 1.
Perciò *la scrittura* $\frac{1}{0}$ *non ha senso*, perché indica un numero che non può esistere.

La divisione come particolare moltiplicazione

È importante fissare l'attenzione sul reciproco di un numero per il seguente motivo: la divisione può essere considerata come una particolare moltiplicazione. Ecco qualche esempio:

$$4:3=\frac{4}{3}=4\cdot\frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}$$

$$\frac{2}{5}:3=\frac{\frac{2}{5}}{3}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}$$

$$2:\frac{5}{3}=\frac{2}{\frac{5}{3}}=2\cdot\frac{3}{5}$$

In generale, dati due qualunque numeri razionali a e b, si può scrivere:

$$a:b=\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$$

Si dice che *per dividere due numeri si moltiplica il primo per il reciproco del secondo.*

Diversi modi di indicare la divisione fra due numeri

Conviene fissare di nuovo l'attenzione sui precedenti esempi per osservare che la divisione è stata indicata con due simboli differenti:

- i due punti (:);
- la linea di frazione (—).

Il secondo simbolo è spesso origine di errori e confusioni, come si può facilmente immaginare considerando gli esempi esaminati prima.

È facile infatti distinguere le due scritture:

$$\frac{2}{5}:3 \quad \text{e} \quad 2:\frac{5}{3}$$

Ma è molto più difficile interpretare correttamente le corrispondenti espressioni scritte con la linea di frazione e cioè:

$$\frac{\frac{2}{5}}{3} \quad \text{e} \quad \frac{2}{\frac{5}{3}}$$

Basta una disattenzione nel disporre i numeri rispetto alle due linee di frazione per ottenere un'espressione del tutto diversa.

Non si può dividere per 0

Interpretare la divisione come moltiplicazione conduce a fissare l'attenzione sul ruolo particolare che ha il numero 0 nella divisione. Ecco qualche esempio.
Risulta:

$$0:5=\frac{0}{5}=0\cdot\frac{1}{5}=0$$

perché 0 è l'elemento assorbente della moltiplicazione.
Invece ***non ha significato*** *la scrittura:*

$$5:0=\frac{5}{0}=5\cdot\frac{1}{0}$$

dato che non esiste il reciproco di 0.
Per lo stesso motivo ***non ha significato*** *la scrittura:*

$$0:0=\frac{0}{0}=0\cdot\frac{1}{0}$$

Le stesse considerazioni si possono ripetere sostituendo al numero 5 un qualunque numero razionale a; si trova così che risulta:

$$0:a=\frac{0}{a}=0$$

$$a:0=\frac{a}{0}\ \text{senza significato}$$

$$0:0=\frac{0}{0}\ \text{senza significato}$$

Verifiche

Conoscenze

① Che cos'è l'opposto di un numero?
② Come si indica l'opposto di un qualunque numero a?
③ Che cos'è il reciproco di un numero?
④ Qual è l'altro termine usato per indicare il reciproco di un numero?
⑤ Come si indica il reciproco di un qualunque numero a?
⑥ In che modo la sottrazione $a–b$ si può considerare come un'addizione?
⑦ In che modo la divisione $a:b$ si può considerare come una moltiplicazione?

Collegamento con il paragrafo precedente

① Spiegare perché il reciproco di 0 non è 0.
② Spiegare perché 0 non può avere reciproco.
③ Spiegare perché 0:6 dà come risultato 0 e invece 6:0 non dà come risultato 0.
④ Spiegare perché non si può dividere per 0.

Comprensione

① Spiegare perché il simbolo $-a$ può indicare anche un numero positivo, portando qualche esempio.
② Spiegare perché il simbolo $\frac{1}{a}$ può anche indicare un numero intero, portando qualche esempio.

Applicazioni

① Sviluppare le seguenti espressioni:

(8–2)–4=[8+(–2)]+(–4)= ....

8–(2–4)=8+(–1)[2+(–4)]= ....

La sottrazione gode della proprietà associativa?

② Sviluppare le seguenti espressioni:

$(30:2):3=\left(30\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}=$ ....

$30:(2:3)=30:\left(2\cdot\frac{1}{3}\right)=$ ....

La divisione gode della proprietà associativa?

③ Scrivere le due espressioni (30:2):3 e 30:(2:3) indicando la divisione con la linea di frazione e ripetere i calcoli svolti nell'esercizio precedente.

④ Sviluppare le espressioni letterali seguenti, applicando la proprietà distributiva.

$(a-b)\cdot c=[a+(-b)]\cdot c$

$(a+b):c=(a+b)\cdot\frac{1}{c}$

$(a-b):c=[a+(-b)]\cdot\frac{1}{c}$

⑤ Sulla base dei calcoli eseguiti nell'esercizio precedente, dire quale proprietà garantisce che le uguaglianze seguenti sono tutte corrette.

$(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$

$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$

$\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$

⑥ Spiegare perché ***sono sbagliate*** le seguenti uguaglianze:

$$\frac{8+\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}_{\,1}}=10 \qquad \frac{{}^{5}\cancel{10}-3}{\cancel{2}_{\,1}}=2$$

Opposto e reciproco, sottrazione e divisione con il calcolatore tascabile

L'opposto di un numero

Attività 1

Il calcolatore prevede un apposito tasto per passare da un numero al suo opposto: è *il tasto contrassegnato con il simbolo* [+/–].

Questo tasto va premuto *dopo* aver digitato un numero, che deve essere presente sul visualizzatore; si può provarne l'uso completando la tabella seguente:

Tasti	Visualizzatore	Numero ottenuto
[9] [+/–]	-9.	–9
[+/–]	9.	–(–9)=9
[CLR]		
[ ] [ ] [ ] [ ]		–4,7
[+/–]		

Si ritrova così la nozione di *opposto di un numero: è il numero che, aggiunto a quello dato, dà come somma zero;* risulta infatti che:

- l'opposto di 9 è –9 perché 9+(–9)=0
- l'opposto di –9 è 9 perché –9+9=0

Il reciproco (o inverso) di un numero

Il calcolatore prevede anche un tasto per passare da un numero al suo reciproco: è *il tasto contrassegnato con il simbolo* $\boxed{\frac{1}{x}}$.

Questo tasto va premuto sempre *dopo* aver digitato un numero; per esempio, per avere il reciproco di 2, si deve premere la sequenza di tasti:

[2] $\boxed{\frac{1}{x}}$

Attività 2

Conviene provare subito l'uso di questo tasto completando la tabella seguente:

Tasti	Visualizzatore	Numero ottenuto
[2] $\boxed{\frac{1}{x}}$	0.5	$\frac{1}{2}=0,5$
$\boxed{\frac{1}{x}}$	2.	$\frac{1}{0,5}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$
[CLR]		
[ ] [ ]		$\frac{1}{5}$
$\boxed{\frac{1}{x}}$		
[CLR]		
[0] $\boxed{\frac{1}{x}}$		Il reciproco di 0 non esiste

Si ritrova così la nozione di *reciproco (o inverso) di un numero dato: è il numero che, moltiplicato per quello dato, dà come prodotto 1;* risulta infatti che:

- il reciproco di 2 è $\frac{1}{2}$ = 0,5 perché $2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot 0,5 = 1$
- non esiste il reciproco di 0 perché nessun numero, moltiplicato per 0, dà come prodotto 1.

Sottrarre due numeri

Attività 3

Per eseguire una sottrazione con il calcolatore non conviene basarsi sull'opposto, ma è meglio usare il tasto [–]; si può provare a completare la tabella seguente:

Calcolo da eseguire	Tasti da premere	Visualizzatore
20–13	[2] [0] [–] [1] [3] [=]	7.
Cancellare tutto	[CLR]	0.
13–20	[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]	-7.
Cancellare tutto	[ ]	
2,3–0,2	[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]	

Si osserva che le prime due operazioni non danno lo stesso risultato: *la sottrazione non è commutativa.*

Sottrarre tre o più numeri

Attività 4

Si possono sottrarre tre numeri, eseguendo ad esempio:

9–5–3

Osservare il visualizzatore mentre si premono i tasti, per riempire questa tabella:

Tasti	Visualizzatore	Commenti
9		
–		
5		
–		
3		
=		

Il calcolatore ha dunque eseguito la sottrazione, associando i numeri così:

(..........–.........)–........=........

Se invece si deve sottrarre a 9 la differenza (5–3), cioè si deve eseguire l'operazione:

........–(........–........)=........

non si può usare la sequenza di tasti precedente: *la sottrazione non è associativa.*

Bisogna allora usare i tasti con le parentesi e digitare l'espressione così come si scrive in matematica; proviamo a vedere che cosa si ottiene, completando la seguente tabella:

Tasti	Visualizzatore	Commenti
9		
–		
(		Tasto che apre la parentesi
5		
–		Non viene eseguita la prima sottrazione
3		
)		Tasto che chiude la parentesi; compare il risultato del calcolo racchiuso fra le due parentesi
=		Si completano tutte le operazioni

Se non si ha un calcolatore con i tasti per le parentesi, conviene leggere la scheda «Saperne di più sul calcolatore tascabile», p. 41, per vedere come si possono organizzare i calcoli.

Dividere due numeri

Attività 5

Nella maggior parte dei calcolatori tascabili c'è un solo tasto per eseguire la divisione: il tasto con il simbolo ÷; si può provarlo completando la tabella seguente:

Calcolo da eseguire	Tasti da premere	Visualizzatore
70:7	7 0 ÷ 7 =	10.
7:70	☐☐☐☐☐	0.1
210,45:15	☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐	

Gli esempi svolti suggeriscono due osservazioni.

I. Come per la sottrazione, le prime due operazioni non danno lo stesso risultato: anche *la divisione non è commutativa.*

II. Nella seconda operazione, se si indica la divisione con la linea di frazione, si ha:

$$\frac{7}{70}=\frac{1}{10}$$

Invece, i calcolatori più comuni non usano le frazioni, ma solo le corrispondenti espressioni in forma decimale; risulta infatti:

$$0{,}1=\frac{1}{10}$$

Dividere tre o più numeri

Attività 6

Nel dividere tre numeri si ritrovano situazioni analoghe a quelle incontrate a proposito della sottrazione. Impostiamo la divisione:

24:6:2

e osserviamo il visualizzatore per completare la seguente tabella:

Tasti	Visualizzatore	Commenti
2 4 ÷		
6 ÷		
2 =		

Il calcolatore ha dunque eseguito la divisione, associando i numeri in questo modo:

(........... : ....) : ....=...........

Se invece si deve dividere 24 per il quoziente (6:2), cioè si deve eseguire:

.... : (........... : ....)=...........

non si può usare la sequenza di tasti precedente: *la divisione non è* ....

Bisogna invece usare questa sequenza di tasti:

2 4 ÷ (6 ÷ 2) =

4

Potenze e moltiplicazione di potenze

L'operazione di elevazione a potenza

L'elevazione a potenza si introduce per abbreviare la scrittura, quando in un prodotto si ripete più volte lo stesso fattore; così si scrive, per esempio:

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5$$

dove:

- il simbolo 7^5 indica la *potenza* e si legge «sette alla quinta » o «sette elevato all'esponente cinque»;
- il numero 7, che viene moltiplicato per se stesso, si chiama *base*;
- il numero 5, che serve a contare il numero dei fattori, si chiama *esponente*.

In generale, quando si ripete n volte uno stesso fattore a, si scrive:

$$a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n$$

(n è il numero di fattori tutti uguali ad a)

Qualche caso particolare

Per calcolare il valore della potenza bisogna, quindi, eseguire più volte una moltiplicazione; ecco qualche caso di calcolo particolarmente semplice.

A. L'esponente è 1

$5^1=5 \qquad 8^1=8 \qquad 280^1=280$

Quando l'esponente è 1, si ripete la base a una volta sola e, perciò, risulta sempre:

$a^1=a$

B. La base è 1

$1^2=1 \cdot 1=1 \qquad 1^3=1 \cdot 1 \cdot 1=1$

Quando la base è 1, si moltiplica n volte 1 per se stesso e, perciò, risulta sempre:

$1^n=1$

C. La base è 0

$0^2=0 \cdot 0=0 \qquad 0^3=0 \cdot 0 \cdot 0=0$

Quando la base è 0, si moltiplica n volte 0 per se stesso e, perciò, risulta:

$0^n=0$

D. La base è 10

$10^2=10 \cdot 10=\mathbf{100}$

$10^3=10 \cdot 10 \cdot 10=\mathbf{1000}$

In generale, quando la base è 10, si moltiplica n volte 10 per se stesso e, perciò, risulta:

$10^n=$ 1 seguito da n zeri

E. La base è un numero negativo

$(-2)^2=(-2)(-2)=+4$

$(-2)^3=(-2)(-2)(-2)=-8$

$(-2)^4=(-2)(-2)(-2)(-2)=+16$

In generale, *quando la base* a *è negativa, la potenza* a^n *risulta negativa solo se l'esponente* n *è dispari.*

Una proprietà che non vale per l'elevazione a potenza

L'operazione di elevazione a potenza proviene dalla moltiplicazione, ma è una nuova operazione, con nuove proprietà. Ecco un primo esempio.

Se si scrive 5^2:

- la base 5 è il numero che viene moltiplicato per se stesso;
- l'esponente 2, invece, indica che si deve ripetere la base 2 volte.

Se, invece, si scrive 2^5:

- la base 2 è il numero che viene moltiplicato per se stesso;
- l'esponente 5 indica che si deve ripetere la base 5 volte.

Si ha perciò:

$2^5=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2=32 \quad e \quad 5^2=5 \cdot 5=25$

e, dunque, scambiando l'esponente con la base, si ottiene un risultato diverso.
In conclusione: *per l'elevazione a potenza non vale la proprietà commutativa.*

Proprietà che valgono per l'elevazione a potenza

Per l'elevazione a potenza valgono invece le seguenti proprietà:

I. $(a^m)^n=a^{m \cdot n}$
II. $a^m \cdot a^n=a^{m+n}$
III. $a^n \cdot b^n=(a \cdot b)^n$

Queste proprietà possono essere ricavate nel modo indicato nel riquadro qui sotto.

I. *Elevazione a potenza di una potenza*

$$(7^2)^3=\Big[\underbrace{7^2 \cdot 7^2 \cdot 7^2}_{3\text{ volte}}\Big]=\Big[\underbrace{7 \cdot 7}_{2\text{ volte}}\Big]\cdot\Big[\underbrace{7 \cdot 7}_{2\text{ volte}}\Big]\cdot\Big[\underbrace{7 \cdot 7}_{2\text{ volte}}\Big]=\underbrace{7^6}_{2 \cdot 3\text{ fattori}}$$

In generale, elevare ad esponente n la base a^m significa moltiplicare n volte a^m per se stesso e cioè moltiplicare $m \cdot n$ fattori uguali ad a; si ha dunque:

$(a^m)^n=a^{m \cdot n}$

II. *Moltiplicazione di due potenze con la stessa base*

$$7^3 \cdot 7^2=\Big[\underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7}_{3\text{ volte}}\Big]\cdot\Big[\underbrace{7 \cdot 7}_{2\text{ volte}}\Big]=\underbrace{7^5}_{3+2\text{ fattori}}$$

In generale, moltiplicando un numero a prima m volte e poi n volte per se stesso, si hanno complessivamente $m+n$ fattori uguali ad a; risulta dunque:

$a^m \cdot a^n=a^{m+n}$

III. *Moltiplicazione di due potenze con lo stesso esponente*

Conviene svolgere i calcoli applicando le proprietà delle operazioni; si ha:

definizione di potenza	$7^3 \cdot 5^3=7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
proprietà commutativa della moltiplicazione	$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5=7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5$
proprietà associativa della moltiplicazione	$7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5=(7 \cdot 5) \cdot (7 \cdot 5) \cdot (7 \cdot 5)$
definizione di potenza	$(7 \cdot 5) \cdot (7 \cdot 5) \cdot (7 \cdot 5)=(7 \cdot 5)^3$

In generale, moltiplicando n volte un numero a e n volte un numero b, si hanno complessivamente n fattori tutti uguali ad $a \cdot b$, e cioè risulta:

$a^n \cdot b^n=(a \cdot b)^n$

Come applicare le proprietà delle potenze

Le tre proprietà delle potenze possono anche essere scritte nella forma seguente:

I. $a^{m \cdot n}=(a^m)^n$

II. $a^{m+n}=a^m \cdot a^n$

III. $(a \cdot b)^n=a^n \cdot b^n$

Applicando queste proprietà, una potenza può essere scritta, di volta in volta, nella forma più conveniente. Ecco qualche esempio:

- la potenza 20^6 può essere considerata come $20^{2\cdot 3}$; in tal caso risulta:

$$20^6=20^{2\cdot 3}=(20^2)^3=400^3$$

- la stessa potenza 20^6 può essere considerata come 20^{4+2}; in tal caso si ha:

$$20^6=20^{4+2}=20^4\cdot 20^2=160\,000\cdot 400$$

- ancora la stessa potenza 20^6 può essere considerata come $(2\cdot 10)^6$; in tal caso si ha:

$$20^6=(2\cdot 10)^6=2^6\cdot 10^6=64\cdot 10^6$$

È quest'ultima scrittura la più conveniente, sia per svolgere il calcolo a mente che per scrivere il numero nella forma più concisa, senza l'ingombro di tanti zeri.

Verifiche

Conoscenze

① Che cosa indica il simbolo a^n?

② Nel simbolo a^n indicare la base, l'esponente e la potenza.

③ Elencare le tre proprietà delle potenze presentate in questo paragrafo.

Comprensione

① Spiegare perché ***sono sbagliati*** i seguenti calcoli:

$3^4+3^2=3^6$ $\qquad (9^4)^2=9^{16}$

$3^2\cdot 2^3=6^6$ $\qquad (-3)^2=-9$

② Spiegare la differenza fra le scritture seguenti e svolgere i calcoli corrispondenti.

5^{3^2} $\qquad 5^3\cdot 2$ $\qquad 5^{3\cdot 2}$

Applicazioni

① Calcolare le potenze seguenti, spiegando brevemente il procedimento seguito.

3^4 $\quad 4^3$ $\quad (4^3)^3$ $\quad (3^4)^4$

② Calcolare il risultato delle espressioni seguenti, spiegando brevemente il procedimento seguito.

$3^4\cdot 3^2$ $\quad 4^3\cdot 5^3$ $\quad 5^2\cdot 5$ $\quad 7^3\cdot 8^2$

③ Applicare opportunamente le proprietà delle potenze per completare la tabella qui sotto.

Numero dato	Numero scritto come potenza di potenza	Numero scritto come prodotto di potenze di uguale base	Numero scritto come prodotto di potenze di uguale esponente
15^4	$15^{2\cdot 2}=(15^2)^2$	$15^{2+2}=15^2\cdot 15^2$	$(5\cdot 3)^4=5^4\cdot 3^4$
30^6			
	$(12^2)^4=$		
		$24^7\cdot 24=$	
			$(7\cdot 3)^9$

5 Potenze ad esponente zero e intero negativo

Dividere una potenza per la base

Ecco qualche esempio numerico da esaminare:

- si divide la potenza 2^5 per la base 2; si ha:

$$\frac{2^5}{2}=2^5\cdot\frac{1}{2}=\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}_{5\text{ fattori}}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}_{5-1\text{ fattori}}\cdot\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)=2^4$$

- si divide la potenza 5^4 per la base 5; si ha:

$$\frac{5^4}{5}=5^4\cdot\frac{1}{5}=\underbrace{5\cdot 5\cdot 5\cdot 5}_{4\text{ fattori}}\cdot\frac{1}{5}=$$

$$=\underbrace{5\cdot 5\cdot 5}_{4-1\text{ fattori}}\cdot\left(5\cdot\frac{1}{5}\right)=5^3$$

- si divide la potenza 0^3 per la base 0; si ha:

$$\frac{0^3}{0}=0^3\cdot\frac{1}{0}$$

operazione senza significato perché $\frac{1}{0}$ ***non esiste.***

In generale, quando si divide una potenza a^m per la base a (che non è zero), l'esponente m diminuisce di un'unità; si ha dunque:

$$\frac{a^m}{a}=a^{m-1} \qquad \text{per qualunque } a\neq 0 \quad (1)$$

Potenze ad esponente zero

Che cosa succede se si applica la regola precedente nel caso di esponente m=1? Si ha:

$$\frac{a^1}{a}=a^{1-1} \qquad \text{ossia} \qquad \frac{a}{a}=a^0$$

Si arriva così ad una potenza con esponente 0, che non dovrebbe avere senso: come si può scrivere un prodotto con zero fattori?

Eppure dalla proprietà (1) si ricava il valore di questa «potenza assurda»: eseguendo la divisione indicata, si ottiene infatti:

$$\frac{a}{a}=1 \qquad \text{e perciò deve essere} \qquad 1=a^0$$

Ovviamente questo procedimento non vale se la base è 0, perché in tal caso non si può eseguire la divisione.

Escluso questo caso, il procedimento si può ripetere a partire da qualunque numero a; si conclude dunque che risulta:

$$\mathbf{a^0=1} \qquad \text{per qualunque } a\neq 0$$

Potenze con esponente –1

Ora che la potenza ad esponente 0 ha un significato, si è condotti ad applicare di nuovo la proprietà (1) nel caso m=0; si ha:

$$\frac{a^0}{a}=a^{0-1} \qquad \text{da cui} \qquad \frac{1}{a}=a^{-1}$$

E così si trova il valore di una potenza con esponente –1; si ha:

$$a^{-1}=\frac{1}{a} \qquad \text{per qualunque } a\neq 0$$

Anche ora non si può pensare la potenza come un prodotto di tanti fattori uguali: che senso avrebbe dire «scrivo –1 fattori tutti uguali»? Sono invece le proprietà delle operazioni che conducono a trovare il valore della potenza.

È questo uno dei procedimenti tipici della matematica: si stabiliscono delle proprietà, che poi si applicano per ampliare la matematica conosciuta.

Potenze ad esponente intero negativo

Si è condotti ora ad applicare anche alle potenze con esponente −1 le proprietà richiamate nel paragrafo precedente (p. 23).

Si può cominciare ad applicare la prima proprietà, e cioè:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Si ottiene, per esempio, nel caso $m=-1$ e $n=2$:

$$(a^{-1})^2 = a^{(-1)\cdot 2} \quad \text{cioè} \quad \left(\frac{1}{a}\right)^2 = a^{-2}$$

Calcolando poi la potenza indicata al primo membro dell'uguaglianza, si ottiene:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} \quad \text{e quindi} \quad \frac{1}{a^2} = a^{-2}$$

E analogamente, nel caso $m=-1$ e $n=3$, si ha:

$$\frac{1}{a^3} = a^{-3}$$

È facile ora arrivare ad una conclusione generale: si può dare un significato anche alle potenze ad esponente intero negativo (cioè del tipo a^{-n}), purché la base a non sia zero; risulta:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{per qualunque } a \neq 0$$

Qualche caso particolare di potenza ad esponente negativo

A. L'esponente è −1

Elevando un numero ad esponente −1 si ha, per esempio:

$$3^{-1} = \frac{1}{3} \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3 \qquad \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{4}$$

Dunque elevare ad esponente −1 equivale a calcolare il reciproco della base.

B. La base è 1

Elevando 1 ad un esponente negativo, si ha:

$$1^{-1} = \frac{1}{1} = 1 \qquad 1^{-2} = \frac{1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1$$

Quando la base è 1 risulta sempre:

$$1^{-n} = 1$$

C. La base è 10

Elevando 10 ad esponente negativo si ha, per esempio:

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

In generale, quando la base è 10, si ha:

10^{-n}=1 preceduto da n zeri

D. La base è un numero negativo

Elevando ad esponente negativo un numero negativo si ha, per esempio:

$$(-2)^{-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = +\frac{1}{4}$$

$$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$$

$$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = +\frac{1}{16}$$

In generale, *quando la base è negativa, la potenza è positiva solo se l'esponente è pari.*

Qualche applicazione delle potenze ad esponente negativo

Una notevole applicazione delle potenze ad esponente negativo è la seguente: non si parla più di reciproco di un numero, ma di potenza del numero con esponente −1. E così, per esempio:

$$\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4} \quad \text{diventa} \quad \frac{3}{4} = 3 \cdot 4^{-1}$$

Un'altra applicazione comune nelle scienze (cfr. anche «La notazione esponenziale nelle scienze», p. 33) è legata alla particolare struttura delle potenze di 10. Ecco qualche esempio:

0,07=7·0,01 diventa 0,07=$7\cdot 10^{-2}$

0,000 3=3·0,000 1 diventa 0,000 3=$3\cdot 10^{-4}$

In questo modo si scrivono in forma più concisa numeri piccoli, che altrimenti presenterebbero tanti zeri, scomodi da scrivere e da leggere.

Verifiche

Conoscenze

① Quanto vale a^0?
② Che cosa indica il simbolo a^{-1}?
③ Come si calcola a^{-n}?
④ Quanto vale 1^{-n}?
⑤ Come si indica il reciproco di un numero a con le potenze ad esponente negativo?
⑥ Come si scrive 10^{-n} in forma decimale?
⑦ In quali casi è positiva la potenza ad esponente negativo di una base negativa?

Comprensione

① Spiegare perché non ha senso il simbolo 0^0.
② Spiegare perché non ha senso il simbolo 0^{-n}.
③ Spiegare perché ***sono sbagliati*** i seguenti risultati:

$8^{-2}=-16$

$10^0=0$

$10^{-2}=-20$

$(-3)^{-1}=3$

④ Spiegare la differenza fra le seguenti scritture e svolgere i calcoli corrispondenti.

5^{-3^2} $\qquad (5^{-3})^2$

$(-3)^2$ $\qquad 3^{-2}$

2^{-1} $\qquad 2\cdot(-1)$

Applicazioni

① Calcolare le potenze seguenti, spiegando brevemente il procedimento seguito.

4^{-3} $\qquad (-4)^3$

3^{-4} $\qquad (-3)^4$

10^{-3} $\qquad (-10)^3$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$ $\qquad \left(-\frac{1}{4}\right)^{1}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$ $\qquad \left(-\frac{3}{2}\right)^{2}$

② Applicare le proprietà delle potenze per completare la tabella qui sotto.

Numero scritto sotto forma di frazione	Numero scritto con potenze ad esponente negativo	Numero scritto con le potenze di 10
$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5^2} = 5^{-2}$	0,04=4·0,01=$4\cdot 10^{-2}$
$\frac{1}{2}$		
	5^{-1}=	
		$5\cdot 10^{-2}$=
		0,005=

6 Divisione di potenze

Quoziente di potenze di uguale base

Le potenze ad esponente negativo permettono di ritrovare una proprietà relativa al quoziente di due potenze di uguale base; basta applicare la seguente proprietà:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Per esempio, nel caso $m=5$ e $n=-3$ si ha:

$$a^5 \cdot a^{-3} = a^{5+(-3)} \quad \text{cioè} \quad a^5 \cdot \frac{1}{a^3} = a^{5-3}$$

e quindi:

$$\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3}$$

E, analogamente, si può scrivere in generale:

$$a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} \quad \text{cioè} \quad a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^{m-n}$$

e quindi:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Si arriva così ad *una proprietà valida per il quoziente di due potenze di uguale base a (diversa da zero):*

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{per qualunque } a \neq 0$$

Quoziente di potenze di uguale esponente

Per esaminare il quoziente di due potenze con uguale esponente, occorre invece applicare successivamente diverse proprietà; si può procedere nel modo seguente:

$$\frac{a^n}{b^n} = a^n \cdot \frac{1}{b^n} = a^n \cdot b^{-n}.$$

$a^n \cdot b^{-n} = a^n \cdot (b^{-1})^n$ [potenza di potenza]

$a^n \cdot (b^{-1})^n = (a \cdot b^{-1})^n$ [prodotto di potenze con uguale esponente]

$$(a \cdot b^{-1})^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Questo procedimento conduce dunque a stabilire *una proprietà valida per il quoziente di due potenze di uguale esponente* n:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Applicazioni delle proprietà della divisione di potenze

Le proprietà relative al quoziente di due potenze di uguale base o di uguale esponente completano le tre proprietà ottenute nel paragrafo 4 (p. 23); si hanno dunque le cinque proprietà seguenti:

I. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

II. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

III. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

IV. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

V. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Insieme a queste proprietà possono essere considerate le definizioni di potenza ad esponente 0 o negativo scritte nella forma seguente:

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Applicando queste nozioni, una potenza può essere scritta, di volta in volta, nella forma più conveniente. Ecco qualche esempio:

- la potenza $0{,}7^3$ può essere considerata come $\left(\frac{7}{10}\right)^3$; in tal caso si ha:

$$\left(\frac{7}{10}\right)^3 = \frac{7^3}{10^3} = \frac{343}{1000} = 0{,}343$$

- la stessa potenza $0{,}7^3$ può essere considerata come $(7 \cdot 0{,}1)^3$; in tal caso si possono svolgere i calcoli nel modo seguente:

$$(7 \cdot 0{,}1)^3 = (7 \cdot 10^{-1})^3 = 7^3 \cdot (10^{-1})^3 =$$

$$= 343 \cdot 10^{-3} = 343 \cdot 0{,}001 = 0{,}343$$

Verifiche

Conoscenze

① Scrivere la proprietà relativa al quoziente di due potenze di uguale base.

② Scrivere la proprietà relativa al quoziente di due potenze di uguale esponente.

③ Scrivere tutte le proprietà delle potenze richiamate in questo paragrafo.

Comprensione

① Spiegare perché ***sono sbagliate*** le seguenti uguaglianze:

$7^6 - 7^2 = 7^4$ $\qquad$ $5^8 : 5^2 = 5^4$

$\frac{2}{3} = 3 \cdot 2^{-1}$ $\qquad$ $\frac{3}{2} = (3 \cdot 2)^{-1}$

② Spiegare la differenza fra le scritture seguenti e svolgere i calcoli corrispondenti.

$\frac{4}{2^3}$ $\qquad$ $\frac{4^3}{2}$ $\qquad$ $\left(\frac{4}{2}\right)^3$

Applicazioni

① Calcolare il risultato delle espressioni seguenti, spiegando brevemente il procedimento seguito.

$5^4 : 5^2$ $\qquad$ $5^2 : 5^4$

$\left(\frac{7}{2}\right)^2$ $\qquad$ $\left(\frac{7}{2}\right)^{-2}$

② Applicare le proprietà delle potenze per completare la tabella qui sotto.

Numero dato	Numero scritto come potenza di potenza	Numero scritto come quoziente di potenze di uguale base	Numero scritto come quoziente di potenze di uguale esponente
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2} = (3^2)^{-1}$	$\frac{1}{9} = \frac{3}{27} = \frac{3^1}{3^3} = 3^1 : 3^3$	$\frac{1}{9} = \frac{1^2}{3^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = (1:3)^2$
0,25			
	$(2^2)^{-2} =$		
		$5^2 : 5^4$	
			$(8:4)^{-3} =$

Potenze con il calcolatore tascabile

Il tasto con il simbolo $\boxed{x^2}$

Attività 1

Il tasto con il simbolo $\boxed{x^2}$ serve per *calcolare il quadrato di un numero* e si usa nel modo seguente:

1. si digitano le cifre che compongono il numero;
2. si preme il tasto $\boxed{x^2}$.

Calcolo da eseguire	Tasti da premere	Visualizzatore
10^2	$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{x^2}$	100.
$(-10)^2$	$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{+/-}\boxed{x^2}$	100.
$0{,}1^2$	$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$	
$(-0{,}1)^2$	$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$	
	$\boxed{0}\boxed{\cdot}\boxed{0}\boxed{5}\boxed{+/-}\boxed{x^2}$	

Conviene provare subito questo tasto, completando la tabella seguente:

Completando la tabella si osserva un fatto: *il calcolatore esegue subito l'elevazione al quadrato*, senza aspettare il tasto $\boxed{=}$.

Si ritrova un risultato ben noto: *il quadrato di un numero è sempre positivo.*

Il tasto con il simbolo $\boxed{y^x}$

Attività 2

Il tasto $\boxed{x^2}$ permette di calcolare solo potenze ad esponente 2; *per scegliere sia la base che l'esponente* di una potenza si usa il tasto contrassegnato con il simbolo $\boxed{y^x}$ (o $\boxed{x^y}$ o $\boxed{a^x}$).

Per impadronirsi di questo tasto, completare la tabella seguente:

Calcolo da eseguire	Tasti da premere	Visualizzatore
3^5	$\boxed{3}\boxed{y^x}\boxed{5}\boxed{=}$	243.
5^3	$\boxed{5}\boxed{y^x}\boxed{3}\boxed{=}$	125.
4^0	$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$	
2^7	$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$	
	$\boxed{2}\boxed{y^x}\boxed{7}\boxed{+/-}\boxed{=}$	
	$\boxed{2}\boxed{+/-}\boxed{y^x}\boxed{7}\boxed{=}$	
	$\boxed{2}\boxed{+/-}\boxed{y^x}\boxed{6}\boxed{=}$	

Completando la tabella si scopre *come usare il tasto* $\boxed{y^x}$:

1. si digitano le cifre che fissano la base della potenza;
2. si preme il tasto $\boxed{y^x}$;
3. si digitano le cifre che fissano l'esponente;
4. si preme il tasto $\boxed{=}$ per eseguire il calcolo.

Le ultime quattro righe della tabella suggeriscono qualche osservazione.

A. Per calcolare 2^7 si fissa la base 2 e l'esponente 7; si ottiene come potenza:

$$2^7=128$$

B. Per calcolare 2^{-7} si fissa ancora la base 2, ma l'esponente è il numero negativo -7; si ottiene come potenza un numero positivo dato da:

$$2^{-7}=\frac{1}{2^7}=0{,}007\,812\,5$$

C. Invece, per calcolare $(-2)^7$, si fissa sempre l'esponente positivo 7, ma la base è il numero negativo -2; si ottiene in questo caso (l'esponente 7 è dispari) un valore negativo della potenza, data da:

$$(-2)^7=-128$$

D. Sarà invece positiva la potenza $(-2)^6$, dato che l'esponente 6 è pari; si ha:

$$(-2)^6=64$$

Infine un'avvertenza: *alcuni calcolatori danno un messaggio di errore quando si inserisce una base negativa.*

In questi casi il messaggio non è dovuto ad un errore d'impostazione, ma al particolare programma usato dalla macchina per calcolare la potenza.

In tali condizioni, per calcolare le potenze con base negativa basta valersi delle precedenti osservazioni sul segno della potenza:

- invece di calcolare $(-2)^6$, si calcola 2^6, dato che la potenza rimane positiva;
- per calcolare $(-2)^7$, si calcola 2^7 e poi si cambia segno al risultato.

La notazione esponenziale

Attività 3

Premere il tasto x^2 più volte, osservando il visualizzatore, e completare la tabella:

Sequenza di tasti	Calcoli eseguiti	Visualizzatore
1 0 x^2 x^2	$(10^2)^2=10^{2\cdot 2}=10^4$	10000.
x^2	$(10^4)^2=10^{4\cdot 2}=10^8$	1. 08
x^2	$(10^8)^2=10^{8\cdot 2}=10^{16}$	
x^2		

Che senso hanno le cifre 1. 08 mostrate nella seconda riga?

Certamente non indicano il numero 108, che è scritto in altro modo (senza lo spazio dopo 1). Si ha invece che:

1. 08 significa $1\cdot 10^8$

Un'avvertenza importante: *questa non è una regola della matematica!* È un modo di scrivere adottato dai costruttori di calcolatori, quando nel visualizzatore possono essere scritte al massimo 8 cifre; in tal caso, infatti, il numero 10^8=100 000 000 (che presenta 9 cifre) non può apparire nel visualizzatore.

I costruttori di calcolatori si sono basati su un modo di scrivere i numeri largamente adottato nelle scienze sperimentali (cfr. anche «La notazione esponenziale nelle scienze», p. 33): un qualunque numero a viene scritto nella forma $b\cdot 10^n$.

Si ha così il numero a scritto in *notazione esponenziale*, cioè nella forma:

$$a=b\cdot 10^n$$

dove:

b è un numero decimale compreso fra 1 e 10 (o fra –10 e –1 se a è negativo);
n è un numero intero.

E così, per esempio, si scrive:

$200\,000=2\cdot 100\,000=2\cdot 10^5$
$-480\,000=-4{,}8\cdot 100\,000=-4{,}8\cdot 10^5$
$0{,}000\,1=1\cdot 10^{-4}$
$0{,}000\,6=6\cdot 0{,}000\,1=6\cdot 10^{-4}$
$-0{,}000\,469=-4{,}69\cdot 0{,}000\,1=-4{,}69\cdot 10^{-4}$

Conviene impadronirsi subito di questa notazione, usando il calcolatore per completare la seguente tabella:

Calcoli da eseguire	Sequenza di tasti	Visualizzatore	Risultato
24^7	2 4 y^x 7 =	4.5865 09	$4{,}5865\cdot 10^9$
$0{,}2^{15}$	0 . 2 y^x 1 5 =	3.2768 -11	$3{,}2768\cdot 10^{-11}$
	2 4 y^x 7 +/– =		
	0 . 2 y^x 1 5 +/– =		
$(-24)^7$			
$(-0{,}2)^{15}$			

La notazione esponenziale nelle scienze

Numeri grandi e numeri piccoli nelle scienze

Le scienze – fisica, biologia, chimica, astronomia, geologia – arrivano oggi a studiare oggetti molto grandi o molto piccoli: la grande galassia di Andromeda fotografata da un potente telescopio (fig. 1), il pianeta Saturno fotografato da una sonda spaziale (fig. 2), minuscoli organismi fotografati con un microscopio (fig. 3), il virus dell'AIDS visibile attraverso un microscopio elettronico (fig. 4).


Figura 1 (a sinistra) **La galassia di Andromeda**

Figura 2 (a destra) **Il pianeta Saturno**

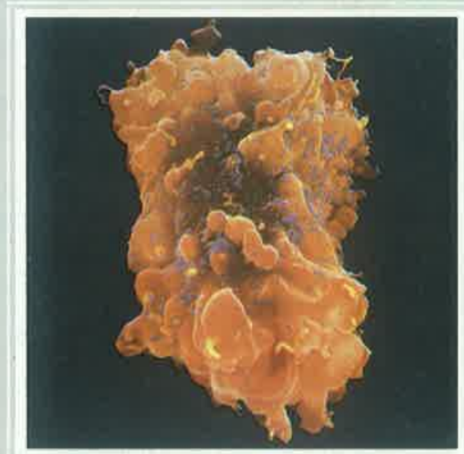



Figura 3 (a sinistra) **Un microorganismo fotografato al microscopio**

Figura 4 (a destra) **Il virus dell'AIDS fotografato al microscopio elettronico**

Le fotografie hanno tutte le stesse dimensioni e, per riuscire ad interpretarle correttamente, bisogna indicare le dimensioni reali dell'oggetto fotografato: il diametro di Andromeda, espresso in metri, è circa:

2 000 000 000 000 000 000 000

mentre le dimensioni del virus, sempre in metri, sono circa:

0,000 000 02

La notazione esponenziale

È scomodo lavorare con numeri come quelli scritti prima, perché è facile dimenticare o aggiungere uno zero e trovare risultati assurdi. Per questo motivo nelle scienze si è introdotto un particolare modo di scrivere i numeri, chiamato *notazione esponenziale* o *notazione scientifica*, che consiste in questo: un qualunque numero a viene scritto nella forma $b \cdot 10^n$.

Si ha dunque:

$$a=b\cdot 10^n$$

dove:

b è un numero decimale compreso fra 1 e 10 (o fra –10 e –1 se a è negativo);
n è un numero intero (positivo o negativo).

In questo modo i due numeri precedenti si scrivono più in breve; si ha infatti:

$$2\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000=2\cdot 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$$

e quindi:

$$2\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000=2\cdot 10^{21}$$

E, analogamente, si scrive:

$$0{,}000\,000\,02=2\cdot 0{,}000\,000\,01=2\cdot 10^{-8}$$

Perciò si dice che:

- le dimensioni di Andromeda sono di circa $2\cdot 10^{21}$ metri;
- le dimensioni di un virus sono di circa $2\cdot 10^{-8}$ metri.

Ordine di grandezza

La notazione esponenziale porta a leggere un numero fissando l'attenzione soprattutto sulla potenza di 10.

Per questo, spesso si descrivono numeri molto grandi o molto piccoli assegnando solo la potenza di 10 che compare nella notazione esponenziale; in tal caso si dice:

«La galassia di Andromeda ha dimensioni con ordine di grandezza 10^{21} metri». Oppure: «L'ordine di grandezza delle dimensioni di Andromeda è di 10^{21} metri».

Dunque, *l'ordine di grandezza di un numero è la potenza di 10 che compare nella notazione esponenziale.*

Quando si indica solo l'ordine di grandezza di un numero, si usa spesso il simbolo « ≈ » e si scrive:

dimensioni di Andromeda ≈ 10^{21} m

frase che si legge nel modo seguente:

«Le dimensioni di Andromeda hanno ordine di grandezza di 10^{21} metri».

Lunghezze e tempi: qualche dato importante

L'ordine di grandezza permette di esplorare i campi del molto grande e del molto piccolo; ecco qualche esempio.

Tempi (in secondi)	Lunghezze (in metri)
Periodo di oscillazione del nucleo di un atomo ≈ 10^{-21}	Diametro del nucleo di un atomo ≈ 10^{-14}
Periodo di oscillazione di un atomo ≈ 10^{-15}	Diametro di un atomo ≈ 10^{-10}
Tempo impiegato dalla luce a percorrere 3 metri ≈ 10^{-8}	Dimensioni di un virus ≈ 10^{-8}
Durata di un lampo stroboscopico ≈ 10^{-5}	Dimensioni di un batterio ≈ 10^{-5}
Battito d'ala di una mosca ≈ 10^{-3}	Spessore di una moneta ≈ 10^{-3}
Intervallo fra due battiti cardiaci ≈ 1	Altezza di un uomo ≈ 1
Tempo impiegato dalla luce del Sole per arrivare alla Terra ≈ 10^{3}	Altezza del Monte Bianco ≈ 10^{3}
1 anno ≈ 10^{7}	Diametro della Terra ≈ 10^{7}
Vita media di un uomo ≈ 10^{9}	Distanza Terra-Sole ≈ 10^{11}
Presenza dell'uomo sulla Terra ≈ 10^{13}	Distanza della stella più vicina ≈ 10^{17}
Età della Terra ≈ 10^{15}	Distanza della galassia più vicina ≈ 10^{22}
Età dell'Universo ≈ 10^{17}	Distanza della galassia più lontana ≈ 10^{26}

Prefissi

Molto spesso, specialmente in fisica, invece dell'ordine di grandezza si usano appositi prefissi da aggiungere all'unità di misura. Due prefissi sono di uso molto frequente anche nella vita quotidiana:

- **kilo** (simbolo **k**), per indicare 10^3
  (1 **kilo**metro=1 **km**=10^3 m=1000 m)
- **milli** (simbolo **m**) per indicare 10^{-3}
  (1 **milli**metro=1 **mm**=10^{-3} m=0,001 m)

I prefissi più usati sono elencati nella seguente tabella:

Ordine di grandezza	Prefisso	Simbolo
10^{12}	Tera...	T
10^{9}	Giga...	G
10^{6}	Mega...	M
10^{3}	kilo...	k
10^{-3}	milli...	m
10^{-6}	micro...	μ
10^{-9}	nano...	n
10^{-12}	pico...	p

7

Calcolo di espressioni. Il ruolo delle parentesi

La priorità delle operazioni

Ecco qualche esempio di espressione in cui compaiono diverse operazioni:

$$3+5\cdot4-2$$

con addizione, moltiplicazione e sottrazione;

$$28-18:3^2$$

con sottrazione, divisione ed elevazione a potenza;

$$4\cdot5^3+24:2^3$$

con moltiplicazione, elevazione a potenza, addizione e divisione.

In tutti questi casi *i calcoli debbono essere eseguiti secondo un ordine fisso, che stabilisce una precisa priorità delle operazioni:*

1. si esegue *l'elevazione a potenza*;
2. si eseguono *moltiplicazioni e divisioni*;
3. si eseguono *addizioni e sottrazioni.*

E così, nelle espressioni precedenti, le operazioni si svolgono nel modo seguente:

$$3+5\cdot4-2=3+20-2=21$$
$$28-18:3^2=28-18:9=28-2=26$$
$$4\cdot5^3+24:2^3=4\cdot125+24:8=500+3=503$$

La priorità è legata alle proprietà delle operazioni

C'è da chiedersi: perché non si svolgono le operazioni nell'ordine in cui sono scritte?

Sono le proprietà delle operazioni che obbligano a scegliere un particolare ordine per svolgere i calcoli.

Si può esaminare, per esempio, l'espressione:

$$3+5\cdot4$$

Per la proprietà commutativa della moltiplicazione, risulta:

$$5\cdot4=4\cdot5$$

perciò debbono avere lo stesso risultato le espressioni:

$$3+5\cdot4 \quad \text{e} \quad 3+4\cdot5$$

Se però si decidesse di eseguire le operazioni secondo l'ordine di scrittura, si avrebbe:

$$3+5\cdot4=8\cdot4=\mathbf{32} \qquad \text{e} \qquad 3+4\cdot5=7\cdot5=\mathbf{35}$$

Invece, rispettando la priorità stabilita, si ha proprio:

$$3+5\cdot4=3+20=\mathbf{23} \qquad \text{e} \qquad 3+4\cdot5=3+20=\mathbf{23}$$

Ruolo delle parentesi

Le parentesi compaiono in un'espressione con uno scopo ben preciso: *si usano le parentesi per alterare l'ordine delle operazioni.*

E così si ha, per esempio:

$$(3+5)\cdot(4-2)=8\cdot2=16$$

In questo modo si è alterata la priorità: si sono eseguite prima le addizioni e sottrazioni racchiuse fra parentesi e, successivamente, la moltiplicazione.

Dunque in un'espressione con le parentesi *si debbono svolgere sempre per primi i calcoli racchiusi entro parentesi.*

Verifiche

Conoscenze

① In che ordine si debbono svolgere le operazioni in un'espressione?

② A che cosa servono le parentesi?

Comprensione

① Perché in un'espressione non si svolgono le operazioni nell'ordine in cui sono scritte?

② Spiegare perché nelle espressioni seguenti le parentesi non sono necessarie.

$(3\cdot2)\cdot8=6\cdot8=48 \qquad 4+(7+3)=4+10=14$

③ Spiegare perché i calcoli seguenti ***sono errati.***

$(5\cdot2)^3=5\cdot8=40 \qquad 5\cdot2^3=10^3=1000$

Applicazioni

① Svolgere i seguenti calcoli:

$7+8\cdot3-5 \qquad (7+8)\cdot(3-5)$

$(7+8)\cdot3-5 \qquad 7+8\cdot(3-5)$

② Svolgere i seguenti calcoli:

$30-4\cdot3^2 \qquad 30-(4\cdot3)^2$

$(30-4)\cdot3^2 \qquad (30-4\cdot3)^2$

③ Svolgere i seguenti calcoli:

$$8+\frac{24}{2^3} \qquad \frac{8+24}{2^3}$$

$$8+\left(\frac{24}{2}\right)^3 \qquad \left(\frac{8+24}{2}\right)^3$$

④ Completare la tabella qui sotto come mostra l'esempio alla prima riga.

Espressione	Calcolo	Risultato
$(4^2+3^2)\cdot(5\cdot2)^3$	$(16+9)\cdot10^3=25\cdot1000$	25 000
	$7^2\cdot5\cdot8=$	
$4+3^2\cdot5\cdot2^3$		
	$4+15^2\cdot8$	
$4+3^2\cdot(5\cdot2)^3$		
	$4+(9\cdot10)^3$	
$(4+3^2\cdot5\cdot2)^3$		
	$(4+15)^2\cdot8$	

Calcoli con il calcolatore tascabile

La priorità delle operazioni nel calcolatore

Attività 1

In matematica l'espressione:

$2 \cdot 5^2 + 8$

deve essere svolta seguendo la priorità delle operazioni. Si deve perciò eseguire:

1. l'elevazione a potenza;
2. la moltiplicazione;
3. l'addizione.

Così si ha:

$2 \cdot 5^2 + 8 = 2 \cdot 25 + 8 = 50 + 8 = 58$

Come viene eseguito lo stesso calcolo dal calcolatore? Per capire come si comporta il calcolatore conviene impostare le operazioni osservando attentamente il visualizzatore; ecco che cosa si ottiene:

Tasti	Visualizzatore	Commenti
2	2.	
×	2.	
5	5.	
x^2	25.	Viene eseguita l'elevazione a potenza prima della moltiplicazione
+	50.	Viene eseguita la moltiplicazione
8	8.	
=	58.	Viene calcolata l'espressione $2 \cdot 5^2 + 8$

Da questo esempio si capisce che *il calcolatore tascabile esegue le operazioni secondo lo stesso ordine di priorità fissato dalla matematica.*

Riprendere considerazioni analoghe, per completare la seguente tabella:

Tasti	Visualizzatore	Commenti
5 4 ÷		
3		
x^2		Viene eseguita .... prima della ....
− 4		
=		Viene calcolata l'espressione ....

I tasti con le parentesi

Attività 2

Per alterare la priorità delle operazioni si usano le parentesi; analogamente, sulla tastiera del calcolatore si trovano due tasti con le parentesi: ⟨ e ⟩.

Si osserva subito una differenza: nella scrittura matematica compaiono anche le parentesi quadre, cioè [e], e le parentesi graffe, cioè { e }. La diversa forma delle parentesi è usata per distinguere meglio i vari livelli di parentesi contenuti uno all'interno dell'altro.

Questa distinzione non è prevista dal calcolatore, che può lavorare con più livelli di parentesi, indicate però sempre con lo stesso simbolo.

Conviene provare subito ad usare i tasti con le parentesi per calcolare la seguente espressione:

$[(3+2) \cdot 4]^2$

Ecco che cosa si ottiene:

Tasti	Visualizzatore	Commenti
⟨ ⟨	0.	Si aprono due parentesi
3 +	3.	
2	2.	
⟩	5.	Si chiude una parentesi; viene eseguita l'operazione racchiusa fra le due parentesi più interne
×	5.	
4	4.	
⟩	20.	Si chiude un'altra parentesi; viene eseguita l'operazione racchiusa fra le due parentesi più esterne
x^2	400.	Viene calcolata l'espressione $[(3+2) \cdot 4]^2$

Calcolando l'espressione assegnata, si osserva bene l'effetto delle parentesi: hanno rovesciato completamente la priorità delle operazioni. Infatti le operazioni sono state svolte nell'ordine seguente:

1. l'addizione racchiusa fra le parentesi più interne;
2. la moltiplicazione racchiusa fra le parentesi più esterne;
3. l'elevazione a potenza.

Riprendere considerazioni analoghe a quelle precedenti per completare la tabella:

Tasti	Visualizzatore	Commenti
(((		Si aprono ....
8 −		
2		
)		Si chiude ....
÷ 3		
)		Si chiude ....
+ 4		
)		Si chiude ....
x^2		Viene calcolata l'espressione ....

Qualche caso particolare nell'uso delle parentesi

Attività 3

In matematica la divisione è indicata spesso con la linea di frazione, mentre il calcolatore lavora solo con il tasto ÷, che corrisponde al simbolo matematico «:».

La linea di frazione porta spesso ad omettere le parentesi, che invece debbono essere usate per eseguire i calcoli con il calcolatore.

Ecco un esempio:

$$\frac{9+6}{5}$$

In questo caso la scrittura matematica non presenta le parentesi, però la lunga linea di frazione indica che si debbono eseguire le operazioni in quest'ordine:

1. l'addizione 9+6=15
2. la divisione 15:5=3

Perciò, usando il simbolo «:» e le necessarie parentesi, si ha:

$$\frac{9+6}{5} = (9+6) : 5$$

E proprio in questa forma deve essere impostata l'espressione nel calcolatore; la sequenza di tasti da usare è dunque: (9 + 6) ÷ 5 =

Infatti, l'analoga sequenza senza parentesi, e cioè: 9 + 6 ÷ 5 = non dà come risultato 3 ma 10,2 perché calcola la seguente espressione:

$$9 + 6 : 5 = 9 + \frac{6}{5} = 9 + 1{,}2$$

Saperne di più sul calcolatore tascabile

Questa scheda è divisa in tre parti (A, B, C), destinate ad esaminare e risolvere particolari problemi che si possono presentare nell'usare un calcolatore tascabile.

A. Riconoscere un calcolatore tascabile scientifico

La tastiera

Le prime indicazioni per riconoscere un calcolatore tascabile per uso scientifico vengono dalla tastiera, che deve presentare i seguenti tasti (fig. 1):

- tasti per le operazioni elementari: + , − , × , ÷ , = ;
- tasti per elevare a potenza: x^2 e y^x (o x^y o a^x);
- tasti per calcolare l'opposto e il reciproco: +/− , $\frac{1}{x}$;
- tasti con le parentesi: (e) ;
- tasti con altri simboli matematici: cos , sin , log .

La priorità delle operazioni

Una successiva fondamentale indagine da eseguire è sulla priorità delle operazioni, per scoprire se il calcolatore esegue le operazioni nello stesso ordine stabilito dalla matematica.

Per questo conviene premere, per esempio, la sequenza:

3 + 5 ×

Figura 1
Tastiera di un calcolatore tascabile per uso scientifico

Si possono presentare due casi:

1. *Sul visualizzatore rimane 5*
   Questo vuol dire che il calcolatore moltiplica solo 5 per il numero che verrà successivamente dato; dunque *il calcolatore esegue le operazioni nello stesso ordine fissato dalla matematica.*

2. *Sul visualizzatore compare 8*
   Questo vuol dire che il calcolatore esegue prima l'addizione 3+5 e successivamente la moltiplicazione; dunque *il calcolatore non esegue le operazioni nell'ordine stabilito dalla matematica*, ma nello stesso ordine in cui sono scritte.

In quest'ultimo caso i calcoli presenteranno dei seri problemi, perché dovranno essere organizzati in modo diverso da quello che la scrittura matematica indica.

B. Il registro di memoria

I tasti per usare il registro di memoria

I calcolatori tascabili più comuni hanno nei loro circuiti almeno una «zona libera», chiamata *registro* o *posizione di memoria*, destinata a memorizzare la sequenza di tasti che forma un numero.

Per registrare nella memoria un numero che compare sul visualizzatore, si preme il tasto contrassegnato con STO, abbreviazione del verbo inglese *store*, che significa «immagazzinare».

Per richiamare un numero dalla memoria al visualizzatore c'è invece il tasto RCL, abbreviazione del verbo inglese *recall*, che significa, appunto, «richiamare».

I simboli che contrassegnano i tasti per l'uso della memoria variano da un calcolatore all'altro; perciò, per usare correttamente il registro di memoria, è indispensabile consultare le istruzioni del proprio calcolatore.

In particolare, è importante scoprire se il calcolatore, per usare il registro di memoria, presenta anche i seguenti tasti (fig. 2):

- il tasto che aggiunge il numero del visualizzatore a quello già presente in memoria; questo tasto è spesso contrassegnato con SUM, verbo inglese che significa «addizionare»;

Figura 2
Tasti per il registro di memoria

- il tasto che scambia il contenuto della memoria con quello del visualizzatore; questo tasto è spesso contrassegnato con EXC, abbreviazione del verbo inglese *exchange*, che significa «scambiare».

Usare il registro di memoria

Ecco qualche esempio di uso del registro di memoria.

1. *Inserire un numero nel registro di memoria*

Per inserire, ad esempio, il numero 6 si può procedere così:

- si fa comparire il numero sul visualizzatore, premendo il tasto 6;
- si preme il tasto STO.

In questo modo il numero 6 occupa tutta la posizione di memoria, prendendo il posto di un eventuale numero già memorizzato, che va perduto.

Se ora si preme la sequenza:

4 SUM

si aggiunge il numero 4 al numero 6 già presente; in memoria si avrà dunque il numero 10.

2. *Richiamare un numero dalla memoria al visualizzatore*

Dopo aver inserito un numero nella memoria, si può richiamarlo, premendo il tasto RCL: il numero compare così sul visualizzatore, ma rimane pure nella posizione di memoria.

Per richiamare un numero sul visualizzatore si può anche usare il tasto EXC; in tal caso, però, si altera il contenuto della memoria. Se, per esempio, sul visualizzatore si ha 44, premendo il tasto EXC si ottengono i seguenti effetti:

- sul visualizzatore compare il contenuto della memoria;
- nella memoria viene inserito 44.

3. *Ripulire la memoria*

Molti tascabili, detti *a memoria permanente*, mantengono il contenuto della memoria anche quando vengono spenti, mentre altri non hanno questa possibilità.

È facile scoprire come funziona il proprio calcolatore:

- si introduce un numero in memoria, premendo per esempio 8 STO;
- si spegne il calcolatore con il tasto OFF;
- si accende il calcolatore con il tasto ON;
- si richiama il contenuto della memoria con il tasto RCL.

Se ricompare il numero 8, il calcolatore è ovviamente a memoria permanente.

In ogni caso è sempre opportuno ripulire la memoria prima di usare il calcolatore; per questo basta procedere così:

- si accende il calcolatore con il tasto ON, così compare 0 sul visualizzatore;
- si inserisce 0 in memoria, premendo il tasto STO.

4. Svolgere i calcoli usando la posizione di memoria

La posizione di memoria può agevolare l'organizzazione dei calcoli, sostituendo efficacemente l'uso delle parentesi. Ecco un esempio.

L'espressione:

$$\frac{30}{(8{\cdot}9+3)^2}$$

può essere sviluppata nel modo seguente:

- si calcola il risultato del denominatore con i tasti: [8] [×] [9] [+] [3] [=] [x^2]
- si inserisce il valore ottenuto in memoria con il tasto [STO];
- si esegue la divisione con i tasti [3] [0] [÷] [RCL] [=].

C. Riconoscere e usare un calcolatore in RPN

Riconoscere un calcolatore in RPN

La sigla RPN è l'abbreviazione di *Reverse Polish Notation*, che significa «notazione polacca inversa» ed è legata al nome del filosofo polacco Lukasiewicz, che per primo propose un particolare modo di organizzare le operazioni nel calcolo di un'espressione.

È facile riconoscere un calcolatore tascabile che usa la notazione polacca inversa: basta osservare la tastiera, che presenta le seguenti caratteristiche (fig. 3):

- ***non compaiono*** i tasti [=], [(] e [)];
- compare il tasto [↑] o [Enter].

Usare un calcolatore in RPN

Ecco qualche esempio di semplici espressioni numeriche svolte con un calcolatore che usa la notazione polacca inversa.

1. Eseguire l'addizione 25+8

Si debbono premere i seguenti tasti:

[2] [5] [↑] [8] [+]

In questo modo si comunicano ***prima*** i due numeri e ***poi*** l'operazione da eseguire sui due numeri; sul visualizzatore compare il risultato 33.

Si capisce così l'importanza del tasto [↑]: serve a separare le cifre del primo numero da quelle del secondo. Solo con questo tasto si può distinguere la sequenza:

[2] [5] [↑] [8] [+] (che calcola 25+8)

dalla sequenza:

[2] [↑] [5] [8] [+] (che calcola 2+58)

2. Eseguire l'addizione 25+8+12

Si debbono premere i seguenti tasti:

[2] [5] [↑] [8] [+] [1] [2] [+]

Sul visualizzatore compare il risultato 45.

3. Eseguire la moltiplicazione 25·4·3

Si procede in modo del tutto analogo, premendo i seguenti tasti:

[2] [5] [↑] [4] [×] [3] [×]

Sul visualizzatore compare il risultato 300.

4. Calcolare l'espressione 3·5+4

Si debbono premere i seguenti tasti:

[3] [↑] [5] [×] [4] [+]

Sul visualizzatore compare il risultato 19=15+4.

5. Calcolare l'espressione 3·(5+4)

Si debbono premere i seguenti tasti:

[3] [↑] [5] [↑] [4] [+] [×]

Sul visualizzatore compare il risultato 27=3·9.

Infatti, per eseguire le operazioni indicate da questa sequenza di tasti, il calcolatore procede così:

- percorre la lista di simboli da sinistra verso destra;
- si ferma quando trova un simbolo di operazione (in questo caso +);
- esegue l'addizione fra i due numeri che precedono il segno + (cioè esegue 5+4=9);
- sostituisce il risultato 9 al posto della corrispondente sequenza, ottenendo:

[3] [↑] [9] [×]

- esegue le operazioni indicate dalla nuova sequenza.

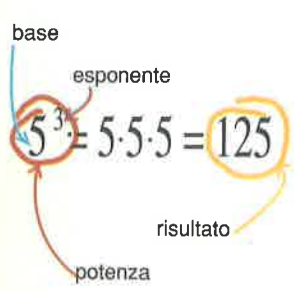
Figura 3
Calcolatore in notazione polacca inversa

Che cosa bisogna sapere

Proprietà delle operazioni di addizione e moltiplicazione

- Proprietà commutativa
  $[a+b=b+a]$ $[a\cdot b=b\cdot a]$
- Proprietà associativa
  $[(a+b)+c=a+(b+c)]$ $[(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)]$
- Proprietà distributiva
  $[a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c]$
- Elemento neutro
  $[a+0=a]$ $[a\cdot 1=a]$
- Elemento assorbente (solo per la moltiplicazione)
  $[a\cdot 0=0]$
- Opposto di ogni numero a:
  indicato con $-a$
- Reciproco di ogni numero $a\neq 0$:
  indicato con $\frac{1}{a}$ oppure a^{-1}

Potenze con esponente intero



Potenze		Esempio
$a^n=a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a$ (n numero dei fattori a)		$5^3=5\cdot5\cdot5=125$
se $a\neq0$	$a^0=1$	$8^0=1$
se $a\neq0$	$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$	$4^{-3}=\frac{1}{4^3}$

Priorità delle operazioni

Per calcolare un'espressione che presenta diverse operazioni si procede così:

1. si eseguono le *elevazioni a potenza;*
2. si eseguono *moltiplicazioni e divisioni*;
3. si eseguono *addizioni e sottrazioni.*

Esempio: $7+5\cdot2^2=7+5\cdot4=7+20=27$

Uso delle parentesi

Le parentesi si usano per cambiare la priorità delle operazioni:

in un'espressione con le parentesi, si svolgono per primi i calcoli racchiusi fra parentesi.

Esempi: $(7+5)\cdot2^2=12\cdot2^2=12\cdot4=48$
$7+(5\cdot2)^2=7+10^2=7+100=107$

I numeri in notazione esponenziale (o scientifica)

Si scrive un numero a nella forma seguente:

$$a=b\cdot10^n$$

dove:

b è un numero decimale compreso fra 1 e 10 (o fra -10 e -1 se a è negativo);
n è un esponente intero positivo o negativo.

Esempi: $12\,000=1{,}2\cdot10^4$
$0{,}000\,12=1{,}2\cdot10^{-4}$

Ordine di grandezza di un numero

L'ordine di grandezza di un numero è espresso dalla *potenza di 10* presente nella notazione esponenziale.

Esempi: 12 000 ha ordine di grandezza 10^4
0,000 12 ha ordine di grandezza 10^{-4}

Proprietà delle potenze

Proprietà	Esempio
$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$	$(4^2)^3 = 4^{2\cdot3} = 4^6$
$a^m\cdot a^n = a^{m+n}$	$4^2\cdot4^3 = 4^{2+3} = 4^5$
$a^n\cdot b^n = (a\cdot b)^n$	$4^3\cdot5^3 = (4\cdot5)^3 = 20^3$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{4^5}{4^2} = 4^{5-2} = 4^3$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

Attività finali

Che cosa bisogna saper fare

In questo capitolo sono state richiamate ed ampliate varie nozioni sulle operazioni fra numeri razionali; ma in matematica non basta conoscere le varie nozioni, bisogna anche saperle applicare correttamente.

Spesso infatti si paragona l'attività matematica all'attività musicale: per eseguire un brano con la chitarra o con il pianoforte non basta saper leggere lo spartito, bisogna anche impegnarsi attivamente per suonare; inoltre è necessario un esercizio graduale e continuo per abituare le mani a muoversi correttamente. Nello studio della musica si trovano dunque vari tipi di esercizi: alcuni piuttosto noiosi e finalizzati allo sviluppo di particolari abilità manuali; altri, più interessanti, che portano ad eseguire dei brani di «vera musica».

Analogamente, per impadronirsi delle nozioni di questo capitolo, si trovano degli esercizi finalizzati ad usare correttamente alcune particolari nozioni ed altri esercizi più vari che conducono a qualche «ricerca matematica».

Attività 1

Determinare il risultato della seguente espressione:

$$(5\cdot 10^3)^2\cdot 5\cdot 10^{-3}-5^2\cdot 10^3$$

elevazione a potenza $(5\cdot 10^3)^2\cdot 5\cdot 10^{-3}-5^2\cdot 10^3=\ldots\cdot 10^{\cdots}\cdot 5\cdot 10^{-3}-25\cdot 10^3$

moltiplicazione $\ldots\cdot 10^{\cdots}\cdot 5\cdot 10^{-3}-25\cdot 10^3=\ldots\ldots\cdot 10^{\cdots}-25\cdot 10^3$

sottrazione $\ldots\ldots\cdot 10^{\cdots}-25\cdot 10^3=\ldots\ldots\cdot 10^3=10^{\cdots}$

In definitiva si ottiene:

$$(5\cdot 10^3)^2\cdot 5\cdot 10^{-3}-5^2\cdot 10^3=10^5$$

Attività 2

Determinare il risultato della seguente espressione:

$$(2{,}5\cdot 10^6+5\cdot 10^5)^2:(5\cdot 10^{-2}-5\cdot 10^{-3})$$

parentesi $(2{,}5\cdot 10^6+5\cdot 10^5)^2:(5\cdot 10^{-2}-5\cdot 10^{-3})=(\ldots\cdot 10^5)^2:(\ldots\cdot 10^{-2})$

potenza $(\ldots\cdot 10^5)^2:(\ldots\cdot 10^{-2})=\ldots\cdot 10^{10}:(\ldots\cdot 10^{-2})$

divisione $\ldots\cdot 10^{10}:(\ldots\cdot 10^{-2})=\ldots\ldots\cdot 10^{\cdots}$

In definitiva si ottiene:

$$(2{,}5\cdot 10^6+5\cdot 10^5)^2:(5\cdot 10^{-2}-5\cdot 10^{-3})=2\cdot 10^{14}$$

Attività 3

Determinare il risultato della seguente espressione:

$$\frac{\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^3}-\frac{\frac{3}{4}}{3}$$

operazioni in parentesi $\quad \dfrac{\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^3}-\dfrac{\frac{3}{4}}{3}=\dfrac{(\ldots\ldots)^2}{(\ldots\ldots)^3}-\dfrac{\frac{3}{4}}{3}$

elevazione a potenza $\quad \dfrac{(\ldots\ldots)^2}{(\ldots\ldots)^3}-\dfrac{\frac{3}{4}}{3}=\dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}-\dfrac{\frac{3}{4}}{3}$

divisione $\quad \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}-\dfrac{\frac{3}{4}}{3}=\ldots\ldots-\dfrac{\ldots}{4}$

sottrazione $\quad \ldots\ldots-\dfrac{\ldots}{4}=\dfrac{\ldots}{\ldots}$

In definitiva si ottiene:

$$\frac{\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^3}-\frac{\frac{3}{4}}{3}=\frac{7}{4}$$

Attività 4

La massa del Sole è di circa $1{,}97\cdot 10^{29}$ kg. Si valuta che la nostra galassia possieda una massa complessiva di $1{,}5\cdot 10^{11}$ masse solari. La massa dell'Universo conosciuto è almeno 10^{11} volte la massa della nostra galassia. Quanto vale approssimativamente la massa dell'Universo conosciuto?

Si imposta il calcolo:

Massa della galassia $\cong 1{,}5\cdot 10^{11}\cdot 1{,}97\cdot 10^{29}$ kg

Massa dell'Universo $\cong 1{,}5\cdot 10^{11}\cdot 1{,}97\cdot 10^{29}\cdot 10^{11}$ kg

Si eseguono i calcoli:

$$1{,}5\cdot 10^{11}\cdot 1{,}97\cdot 10^{29}\cdot 10^{11}=(1{,}5\cdot 1{,}97)\cdot(10^{11}\cdot 10^{29}\cdot 10^{11})=\ldots\ldots\cdot 10^{\cdots}$$

In definitiva si ottiene:

Massa dell'Universo $\cong 3\cdot 10^{51}$

Attività 5

Il cuore umano compie, approssimativamente, un battito al secondo. Qual è l'ordine di grandezza del numero totale di battiti del cuore di una persona che vive 70 anni?

Si imposta il calcolo:

70 anni=70·...... giorni=70·......·...... ore=70·......·......·......... secondi

In definitiva si ottiene:

70 anni $\cong \ldots\ldots\cdot 10^9$ secondi

Perciò l'ordine di grandezza del numero di battiti in 70 anni è di 10^9.