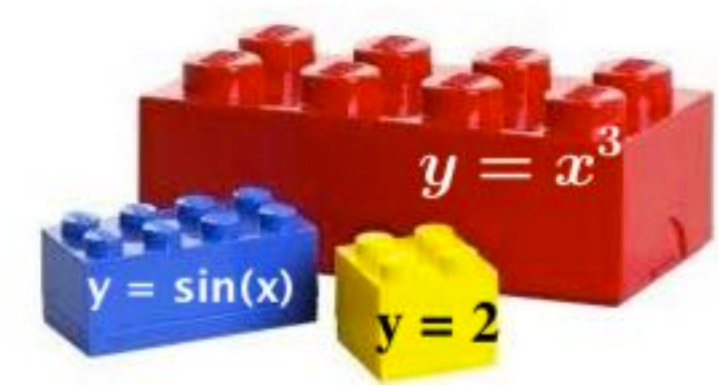
Derivare quozienti di funzioni derivabili

Come è organizzato il calcolo differenziale

Il calcolo differenziale studia le derivate.

Ecco il percorso rapido che continui a seguire:

1. **Hai studiato le derivate di poche *funzioni elementari.***
2. **Studi le regole dell'*Algebra delle derivate* per calcolare le derivate di tutte le funzioni che si possono ottenere da quelle elementari con i procedimenti algebrici**



Esempi di funzioni ottenute con 3 funzioni elementari

$$y = \frac{2\sin(x)}{x^3} \qquad y = 2x^3 + \sin(x)$$

Enrico Pietropoli, 2022

L’algebra delle derivate

Hai studiato le regole per derivare funzioni che sono somma o prodotto di funzioni elementari.
Ecco altri due procedimenti che vedrai in questa lezione.

Procedimenti per calcolare la derivata di	Esempi
3. Reciproca di una funzione	$y = \frac{1}{x^2}$
4. Quoziente di funzioni	$y = \frac{sin(x)}{x^2}$

Richiamo le derivate di funzioni elementari

Funzione	Derivata
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^{n}$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$
$y = e^{x}$	$y' = e^{x}$
$y = \ln(x)$	$y' = \frac{1}{x}$

Derivare la reciproca di una funzione

Esempio	In generale
So che $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}=\cos(x)$ Calcolo la funzione derivata di $y=\frac{1}{\sin(x)}$	So che $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$ Calcolo la funzione derivata di $y=\frac{1}{f(x)}$
1. Calcolo il rapporto incrementale	
$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{\sin(x+h)}-\frac{1}{\sin(x)}}{h}=\frac{1}{h}\cdot\frac{\sin(x)-\sin(x+h)}{\sin(x+h)\cdot\sin(x)}=$ $=-\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\cdot\frac{1}{\sin(x+h)\cdot\sin(x)}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{f(x+h)}-\frac{1}{f(x)}}{h}=\frac{1}{h}\cdot\frac{f(x)-f(x+h)}{f(x+h)\cdot f(x)}=$ $=-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\frac{1}{f(x+h)\cdot f(x)}$
2. Calcolo il limite del rapporto incrementale per h→0	
$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\cos(x)\cdot\frac{1}{\sin(x)\cdot\sin(x)}=-\frac{\cos(x)}{[\sin(x)]^2}$	$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-f'(x)\cdot\frac{1}{f(x)\cdot f(x)}=-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$
La derivata di $y=\frac{1}{\sin(x)}$ **è** $y'=-\frac{\cos(x)}{[\sin(x)]^2}$	**La derivata di** $y=\frac{1}{f(x)}$ **è** $y'=-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$

$$\frac{a}{h}=a\cdot\frac{1}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$$

Funzione reciproca e sua derivata

Funzione reciproca	Derivata
$y = \dfrac{1}{f(x)}$	$y' = \dfrac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$
$y = \dfrac{1}{sen(x)}$	$y' = -\dfrac{\cos(x)}{[sen(x)]^2}$

$y = \dfrac{1}{\sin(x)}$ NON ha come derivata $Y = \dfrac{1}{\cos(x)}$

Prima applicazione della regola trovata

Funzione $y = \frac{1}{f(x)}$	Derivata $y' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
$y = \frac{1}{x^2}$	$y' = -\frac{2x}{[x^2]^2} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$
$y = \frac{1}{x^3}$	$y' = -\frac{3x^2}{[x^3]^2} = -\frac{3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}$
$y = \frac{1}{x^4}$	$y' = -\frac{4x^3}{[x^4]^2} = -\frac{4x^3}{x^8} = -\frac{4}{x^5}$

Altra scrittura della regola trovata

Funzione	Derivata
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
$y = \frac{1}{x^2}$	$y' = -\frac{2}{x^3}$
$y = \frac{1}{x^3}$	$y' = -\frac{3}{x^4}$

Scrivo potenze di x ad esponente intero negativo

Funzione	Derivata	
$y = x^{-1}$	$y' = -x^{-2}$	$-x^{-2} = -1 \cdot x^{-1-1}$
$y = x^{-2}$	$y' = -2x^{-3}$	$-2x^{-3} = -2 \cdot x^{-2-1}$
$y = x^{-3}$	$y' = -3x^{-4}$	$-3x^{-4} = -3 \cdot x^{-3-1}$

In generale, ritrovo la regola

$y = x^n$ ha come derivata $y' = nx^{n-1}$

anche con l'esponente n intero negativo

Numeri interi negativi
…-4, -3, -2, -1

Derivata del quoziente di due funzioni derivabili

Derivare il quoziente di due funzioni

Come procedo per derivare un quoziente di due funzioni?

Ricordo le operazioni con i numeri: $\frac{3}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2}$

E così con le funzioni, per derivare

$$y = \frac{x^2}{\sin(x)}$$

Scrivo il quoziente nella forma

$$y = x^2 \cdot \frac{1}{\sin(x)}$$

Come procede il calcolo

Esempio	In generale
$y = x^2 \cdot \frac{1}{\sin(x)}$	$y = n(x) \cdot \frac{1}{d(x)}$
Applico il procedimento per derivare il prodotto di funzioni $y = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	
$y' = 2x \cdot \frac{1}{\sin(x)} + x^2 \cdot \left[\frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}\right] = \frac{2x \cdot \sin(x) - x^2 \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}$	$y' = n'(x) \cdot \frac{1}{d(x)} + n(x) \cdot \left\{\frac{-d'(x)}{[d(x)]^2}\right\} = \frac{n'(x) \cdot d(x) - n(x) \cdot d'(x)}{[d(x)]^2}$
La derivata di $y = \frac{x^2}{\sin(x)}$ è $y' = \frac{2x \cdot \sin(x) - x^2 \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}$	**La derivata di** $y = \frac{n(x)}{d(x)}$ è $y' = \frac{n'(x) \cdot d(x) - n(x) \cdot d'(x)}{[d(x)]^2}$

Derivare il quoziente di due funzioni

Esempio	In generale
La derivata di $y=\frac{x^2}{\sin(x)}$ **è** $y'=\frac{2x\cdot\sin(x)-x^2\cdot\cos(x)}{\sin^2(x)}$	**La derivata di** $y=\frac{n(x)}{d(x)}$ **è** $y'=\frac{n'(x)\cdot d(x)-n(x)\cdot d'(x)}{\left[d(x)\right]^2}$

Riflessioni

Procedimenti e regole per calcolare derivate si aggiungono a quelli incontrati nello studio di algebra, trigonometria, logaritmi, funzioni…

Ecco qualche suggerimento per 'dominare' i calcoli

Suggerimenti

1. Tieni presenti le regole in sintesi

Algebra delle derivate

Funzione	Derivata
$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
$y = g(x)$	$y' = g'(x)$
$y = f(x) + g(x)$	$y' = f'(x) + g'(x)$
$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$y = \frac{1}{g(x)}$	$y' = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Derivate di funzioni elementari

Funzione	Derivata
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^{n}$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \ln(x)$	$y' = \frac{1}{x}$

Suggerimenti

2. Applica altre proprietà utili

ESEMPIO

Calcolo la derivata di $y = \tan(x)$

Derivata	Proprietà
$y = \tan(x) \Leftrightarrow y = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$	B
$y' = \dfrac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x)[-\sin(x)]}{\cos^2(x)}$	C, D, E
$y' = \dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$	

Proprietà trigonometriche

A. $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

B. $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Derivate

Funzioni elementari

C. $y = \sin(x) \Rightarrow y' = \cos(x)$

D. $y = \cos(x) \Rightarrow y' = -\sin(x)$

Quoziente di funzioni

E. $y = \dfrac{n(x)}{d(x)} \Rightarrow \quad y' = \dfrac{n'(x) \cdot d(x) - n(x) \cdot d'(x)}{[d(x)]^2}$

Suggerimenti

2. Applica altre proprietà utili

Calcolo la derivata di $y = \tan(x)$

$$\boxed{y' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}}$$

Proprietà trigonometriche

A. $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

B. $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Proprietà algebriche

F. $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

G. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Derivata	Proprietà
$y' = \frac{1}{\cos^2(x)}$	A

Derivata	Proprietà
$y' = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}$	F
$y' = 1 + \left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right]^2$	G
$y' = 1 + \tan^2(x)$	B

Suggerimenti

3. Lavora con calma mentre svolgi i calcoli

I calcoli diventano utili per sviluppare la tua competenza matematica se:

- cerchi il modo più semplice per ottenere il risultato;

- controlli i procedimenti seguiti e i risultati ottenuti.

Altrimenti … per eseguire i calcoli automaticamente non c'è bisogno di una persona; basta un computer.