

## Derivata di somma e prodotto di funzioni derivabili. Esercizi

### Richiamo le derivate di funzioni elementari

Funzione	Derivata
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \ln(x)$	$y' = \frac{1}{x}$

### Derivata della somma di due funzioni derivabili

1. Calcola le derivate delle funzioni assegnate per completare la seguente tabella

Funzione	Derivata	Procedimento
$y = x^4 + x^3$		$y = f(x) + g(x)$ ha per derivata $y' = f'(x) + g'(x)$
$y = x^2 + e^x$		
$y = x + \sin(x)$		
$y = \cos(x) + e^x$		
$y = \cos(x) + \sin(x)$		
$y = x + \ln(x)$		
$y = x^2 + 4$		$y = f(x) + k$ ha per derivata $y' = f'(x)$
$y = \sin(x) + \sqrt{3}$		
$y = \cos(x) + \frac{3}{4}$		
$y = 3 + \ln(x)$		

2. Completa il seguente procedimento per calcolare la derivata della somma di tre funzioni derivabili.

Esempio	In generale
$y = x^2 + \text{sen}(x) + \text{cos}(x)$	$y = f(x) + g(x) + h(x)$
<i>Applico la proprietà associativa</i>	
$y = x^2 + [\text{sen}(x) + \text{cos}(x)]$	$y = f(x) + [\dots\dots\dots]$
<i>Derivo la somma di due funzioni</i>	
$y' = 2x + [\dots\dots\dots]$	$y' = f'(x) + [\dots\dots\dots]$

*L'esercizio suggerisce una regola generale: per derivare la somma di n funzioni addiziono le derivate delle singole funzioni*

3. Calcola le derivate delle funzioni assegnate per completare la seguente tabella.

Funzione	Derivata
$y = x + x^2 + \text{sen}(x)$	
$y = \text{sen}(x) + \text{cos}(x) + e^x + 5$	
$y = \text{cos}(x) + x^3 + x^4 + \sqrt{2}$	

### Derivata del prodotto di due funzioni derivabili

4. Calcola le derivate delle funzioni assegnate per completare la seguente tabella

Funzione	Derivata	Procedimento
$y = x^4 \text{sen}(x)$		$y = f(x) \cdot g(x)$ ha per derivata $y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$y = x^2 e^x$		
$y = x^3 \text{cos}(x)$		
$y = e^x \text{cos}(x)$		
$y = \text{sen}(x) \text{cos}(x)$		
$y = x \ln(x)$		
$y = 4x^2$		$y = k f(x)$ ha per derivata $y' = k f'(x)$
$y = 2\text{sen}(x)$		
$y = \frac{3}{4} \text{cos}(x)$		
$y = 5 \ln(x)$		

5. Calcola le derivate delle funzioni assegnate per completare la seguente tabella

Funzione	Derivata	Procedimento
$y = -x$		$y = k f(x)$ ha per derivata $y' = k f'(x)$ Con $k = -1$ ottengo $y = -f(x)$ ha per derivata $y' = -f'(x)$
$y = -x^4$		
$y = -e^x$		
$y = -\text{sen}(x)$		
$y = -\text{cos}(x)$		
$y = -\ln(x)$		

6. Completa il seguente procedimento per calcolare la derivata del prodotto di tre funzioni derivabili.

**Esempio**

$$y = x^3 \cdot \text{sen}(x) \cdot \text{cos}(x)$$

Applico la proprietà associativa e considero la funzione prodotto di due funzioni

$$y = x^3 \cdot [\text{sen}(x) \cdot \text{cos}(x)]$$

Derivo il prodotto di due funzioni

$$y' = 3x^2 \cdot [\dots\dots\dots] + x^3 \cdot [\dots\dots\dots]' =$$

$$= 3x^2 \cdot [\dots\dots\dots] + x^3 \cdot [\dots\dots\dots + \dots\dots\dots] =$$

$$= 3x^2 \cdot \text{sen}(x) \cdot \text{cos}(x) + x^3 \cdot \text{cos}(x) \cdot \text{cos}(x) + x^3 \cdot \text{sen}(x) \cdot [-\text{cos}(x)]$$

**L'esercizio 6 suggerisce una regola generale: per derivare il prodotto di n funzioni addiziono n termini che si ottengono dal prodotto stesso sostituendo al primo, al secondo, ... all'n-mo fattore la corrispondente derivata**

7. Calcola le derivate delle funzioni assegnate per completare la seguente tabella.

Funzione	Derivata
$y = 4x^2 \text{sen}(x)$	
$y = x^3 \cdot e^x \cdot \text{cos}(x)$	
$y = -x^2 \text{sen}(x)$	
$y = x \cdot e^x \cdot \ln(x)$	
$y = 3x^2 \cdot \ln(x)$	

## Derivata di somme e prodotti di funzioni derivabili

8. Calcola le derivate delle funzioni assegnate per completare la seguente tabella

Funzione	Derivata
$y = \text{sen}(x) - \cos(x) =$ $= \text{sen}(x) + [-\cos(x)]$	$y' = \cos(x) + \dots\dots$
$y = 4 - 3x^2$	
$y = e^x - 2\text{sen}(x)$	
$y = 2\cos(x) - e^x$	
$y = 3x - \ln(x)$	

Calcola le derivate delle funzioni assegnate negli esercizi da 9 a 15

9.  $y = 2x - 3$ ,  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ ,  $y = \sqrt{2x} + \sqrt{3}$ .
10.  $y = x^2 - x$ ,  $y = -2x^2 + 3x$ ,  $y = 3x^2 - 5x$ .
11.  $y = x^4 - x^2 + x - 5$ ,  $y = -4x^5 + 5x^4 - 10x^2 + 20$ ,  $y = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 3x - 5$ .
12.  $y = -x^6 + 2x^3 - 6$ ,  $y = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \sqrt{3}$ ,  $y = \frac{4}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x - \sqrt{5}$ .
13. Scrivere la derivata di un polinomio, cioè di una funzione del tipo  

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$
14.  $y = (x+1)(x-1)$ ,  $y = (x^2+2)(x^2-2)$ ,  $y = (x-1)(x^2+x+1)$   
 In quanti modi si può organizzare il calcolo di queste derivate?  
 Qual'è il procedimento più rapido?
15.  $y = (2x^2+x)(2x^2-x)$ ,  $y = (x^3+1)(x^3-1)$ ,  $y = x^3(-4x^2+2x-3)$   
 In quanti modi si può organizzare il calcolo di queste derivate?  
 Qual'è il procedimento più rapido?
16.  $y = 2 \text{sen}(x) - 3 \cos(x) + \sqrt{2}$   $y = \sqrt{2} \cos(x) - \cos(x) - 1$
17.  $y = (2x^3 + x)\text{sen}(x)$   $y = (x^2 - 4x)\cos(x)$
18.  $y = (3x^4 - 2x)e^x$   $y = (2x^5 + 7)e^x$
19.  $y = [2\text{sen}(x) - 3]e^x$   $y = [2\text{sen}(x) - \cos(x)]e^x$
20.  $y = 2\text{sen}(x)(e^x + 4)$   $y = [e^x - \cos(x)]\text{sen}(x)$
21.  $y = x\ln(x) - x$   $y = [x + \ln(x)](x - 1)$