Derivata di somma e prodotto di funzioni derivabili

Enrico Pietropoli, 2022

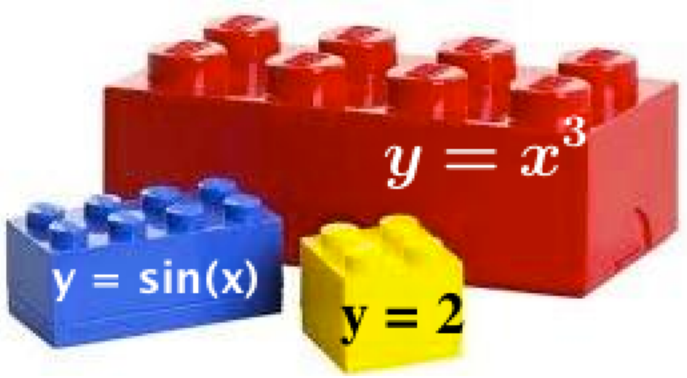
Come è organizzato il calcolo differenziale

Il calcolo differenziale studia le derivate.

Pensa alla tante funzioni che hai incontrato finora: calcolare il limite del rapporto incrementale per tutte queste funzioni sarebbe un lavoro lunghissimo!

Ecco invece il percorso molto più rapido che seguirai:

1. **Calcolo le derivate di poche funzioni elementari.**
2. **Studio le regole dell'Algebra delle derivate per calcolare le derivate di tutte le funzioni costruite con quelle elementari.**



Esempi di funzioni costruite con 3 funzioni elementari

$$y = \frac{2\sin(x)}{x^3} \qquad y = 2x^3 + \sin(x)$$

Comincia l'algebra delle derivate

In questa lezione cominci a studiare i procedimenti per calcolare le derivate delle funzioni che puoi costruire con quelle elementari. Ecco i primi due procedimenti.

Procedimenti per calcolare la derivata di	Esempi
1. Somma di funzioni elementari	$y = \sin(x) + x^2$
2. Prodotto di funzioni elementari	$y = x^2 \sin(x)$

Richiamo le derivate di funzioni elementari

Funzione	Derivata
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^{n}$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$
$y = e^{x}$	$y' = e^{x}$
$y = \ln(x)$	$y' = \dfrac{1}{x}$

1. Derivare una somma di funzioni

Esempio	In generale
Sono date $y = x^2$ e $y = \sin(x)$ e so che $\lim_{h\to 0} \boxed{\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}} = 2x$ $\lim_{h\to 0} \boxed{\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}} = \cos(x)$ Calcolo la funzione derivata di $y = x^2 + \sin(x)$	Sono date $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e so che $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$ Calcolo la funzione derivata di $y = f(x) + g(x)$
1. Calcolo il rapporto incrementale	
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left[(x+h)^2 + \sin(x+h)\right] - \left[x^2 + \sin(x)\right]}{h} =$ $= \frac{(x+h)^2 + \sin(x+h) - x^2 - \sin(x)}{h} =$ $= \boxed{\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}} + \boxed{\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left[f(x+h) + g(x+h)\right] - \left[f(x) + g(x)\right]}{h} =$ $= \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} =$ $= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$
2. Calcolo il limite del rapporto incrementale per h→0	
$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \cos(x)$	$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + g'(x)$
La derivata di $y = x^2 + \sin(x)$ è $y' = 2x + \cos(x)$	La derivata di $y = f(x) + g(x)$ è $y' = f'(x) + g'(x)$
Per derivare la somma di funzioni addiziono le derivate delle singole funzioni	

1. Derivare una somma di funzioni

Per derivare una somma di funzioni addiziono le derivate delle singole funzioni

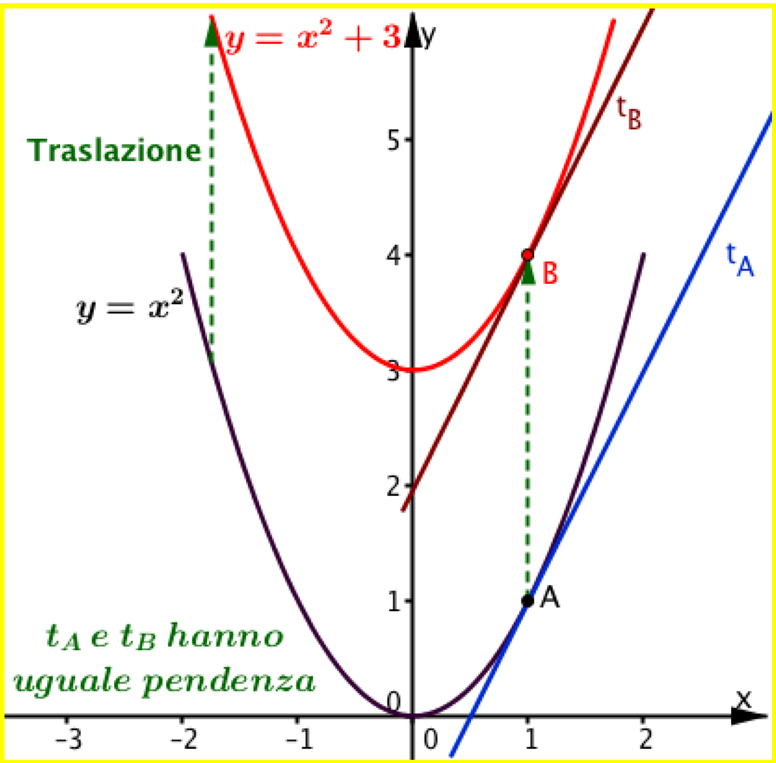
Funzione somma $\mathbf{y = f(x) + g(x)}$	**Derivata** $\mathbf{y' = f'(x) + g'(x)}$
$y = x^4 + \sin(x)$	$y' = 4x^3 + \cos(x)$

Altri esempi

Funzione somma $\mathbf{y = f(x) + g(x)}$	**Derivata** $\mathbf{y' = f'(x) + g'(x)}$
$y = x^2 + x$	$y' = 2x + 1$
$y = \sin(x) + \cos(x)$	$y' = \cos(x) + [-\sin(x)] = \cos(x) - \sin(x)$
$y = x^4 + 2$	$y' = 4x^3 + 0 = 4x^3$
$y = \sin(x) + 4$	$y' = \cos(x) + 0 = \cos(x)$

Somma di una funzione con una costante

Gli esempi mostrano il ruolo particolare delle funzioni y = k.
Hanno derivata y' = 0, perciò 'scompaiono' nella derivata della somma; ad esempio
$y = x^2$ **e** $y = x^2 + 3$ **hanno la stessa derivata** $y' = 2x$

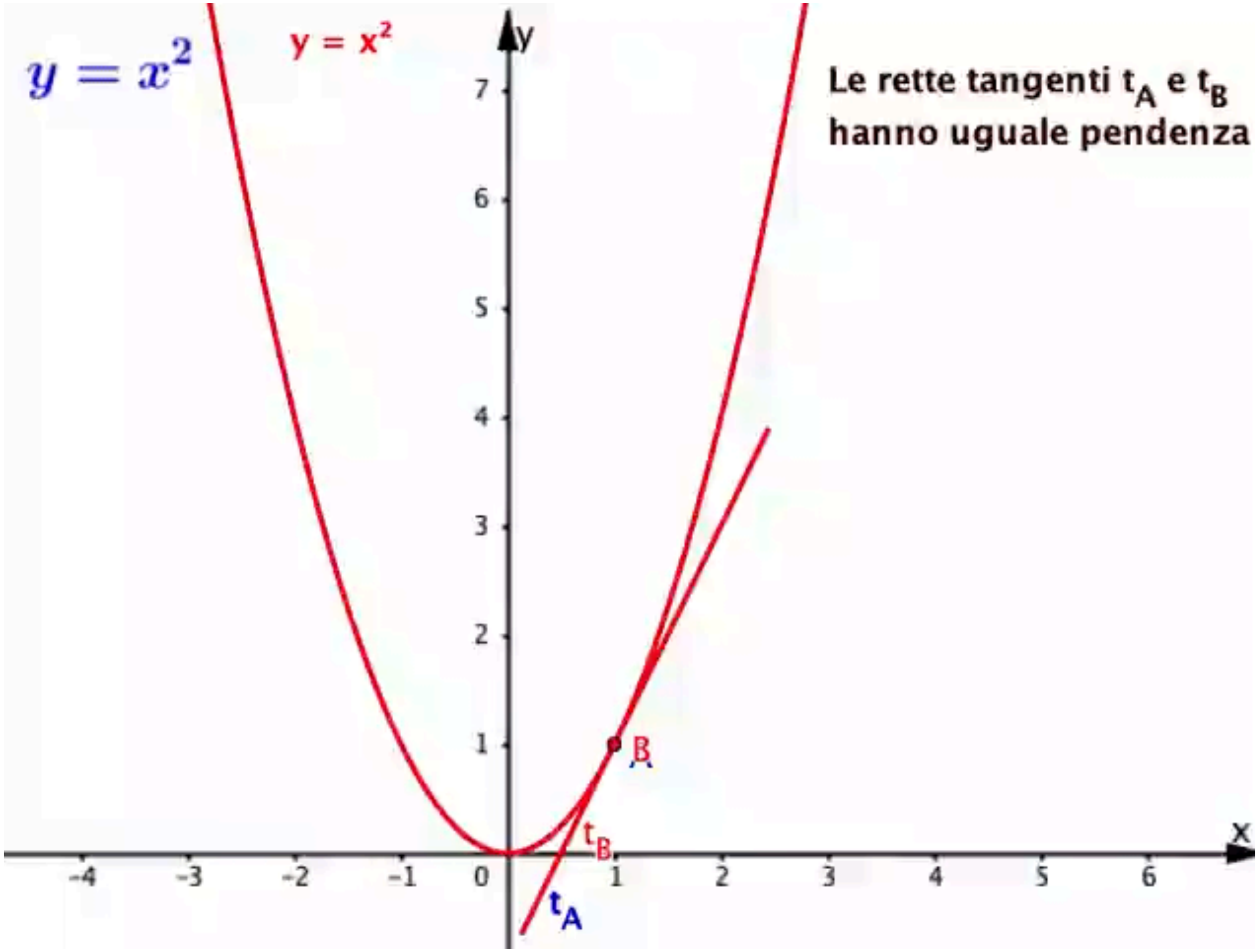


Interpretazione grafica.
Da $y = x^2$ **si ottiene** $y = x^2 + 3$ **con una traslazione lungo l'asse y, che 'trascina' anche le tangenti. Perciò le tangenti mantengono la stessa pendenza.**

In generale
Tutte le funzioni del tipo
$y = f(x) + k$ **hanno derivata**
$y' = f'(x)$

Enrico Pietropoli, 2022

Video



$y = x^2$
$y = x^2$
Le rette tangenti t_A e t_B
hanno uguale pendenza
y
x
7
6
5
4
3
2
1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
B
A
t_B
t_A

I calcoli sono sempre così semplici?

Provo con la moltiplicazione

Funzioni elementari	Derivata
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$g(x) = x^3$	$g'(x) = 3x^2$
Funzione prodotto	**Derivata**
$h(x) = x^2 \cdot x^3 \Rightarrow h(x) = x^5$	$h'(x) = 5x^4$
Se moltiplico le derivate ottengo $f'(x) \cdot g'(x) = (2x) \cdot (3x^2) = 6x^3$ *Risultato errato*	

Per derivare un prodotto di funzioni NON moltiplico le derivate delle singole funzioni.

2. Derivare un prodotto di funzioni

Esempio

Sono date $y = x^2$ e $y = \sin(x)$ e so che

$$\lim_{h\to 0}\boxed{\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}} = 2x \qquad \lim_{h\to 0}\boxed{\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}} = \cos(x)$$

Calcolo la funzione derivata di
$y = x^2 \cdot \sin(x)$

1. Calcolo il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^2 \cdot \sin(x+h) - x^2 \cdot \sin(x)}{h} =$$

$$= \frac{(x+h)^2 \cdot \sin(x+h) - x^2 \cdot \sin(x) + \boxed{x^2 \cdot \sin(x+h) - x^2 \cdot \sin(x+h)}}{h} =$$

$$= \boxed{\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}} \sin(x+h) + x^2 \boxed{\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}}$$

2. Calcolo il limite del rapporto incrementale per h→0

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x \cdot \boxed{\sin(x)} + x^2 \cdot \cos(x)$$

La derivata di $y = x^2 \cdot \sin(x)$ è
$y' = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$

Addiziono e sottraggo la stessa espressione per ritrovare rapporti incrementali noti.

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\sin(x+h) = \sin(x)}$$

2. Derivare il prodotto di funzioni

Se ripeto gli stessi calcoli in generale trovo il procedimento per derivare il prodotto di due funzioni

Esempio	**In generale**
Sono date $y = x^2$ e $y = \sin(x)$ e so che $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x$ $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x)$ Calcolo la funzione derivata di $y = x^2 \cdot \sin(x)$	Sono date $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e so che $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$ Calcolo la funzione derivata di $y = f(x) \cdot g(x)$
La derivata di $y = x^2 \cdot \sin(x)$ è $y' = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$	**La derivata di $y = f(x) \cdot g(x)$ è** $y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

2. Derivare il prodotto di funzioni

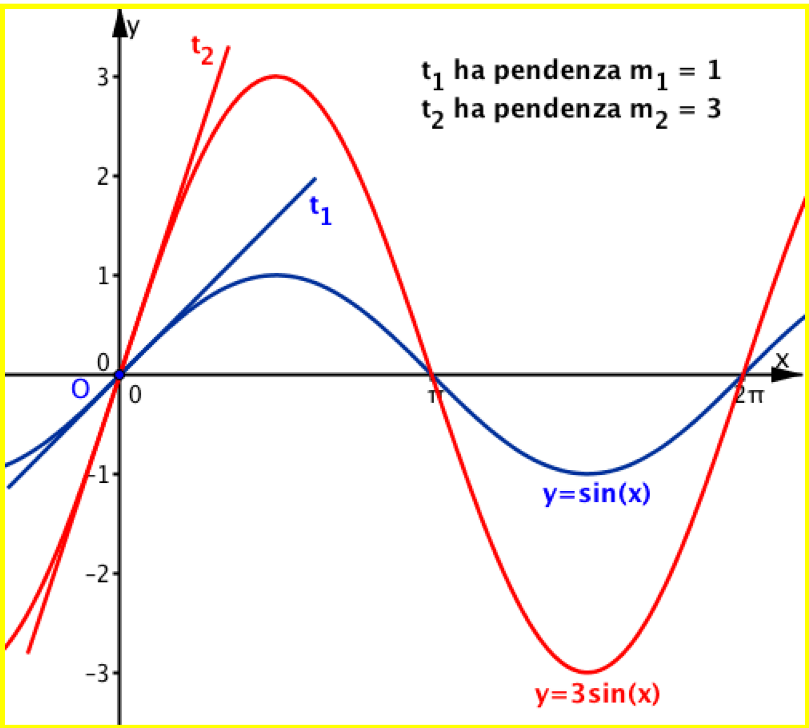
Funzione prodotto $y = f(x) \cdot g(x)$	Derivata $y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$y = x^4 \cdot \sin(x)$	$y' = 4x^3 \cdot \sin(x) + x^4 \cdot \cos(x)$

Altri esempi

Funzione prodotto $y = f(x) \cdot g(x)$	Derivata $y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$y = x^4 \cdot \sin(x)$	$y' = 4x^3 \cdot \sin(x) + x^4 \cdot \cos(x)$
$y = \sin(x) \cdot \cos(x)$	$y' = \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x)[-\sin(x)] = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
$y = 3\sin(x)$	$y' = 0 \cdot \sin(x) + 3\cos(x) = 3\cos(x)$
$y = 2x^3$	$y' = 0 \cdot x^3 + 2 \cdot 3x^2 = 6\,x^2$
$y = -\sin(x) = (-1) \cdot \sin(x)$	$y' = 0 \cdot \sin(x) + (-1)\cos(x) = -\cos(x)$

Prodotto di una funzione per una costante

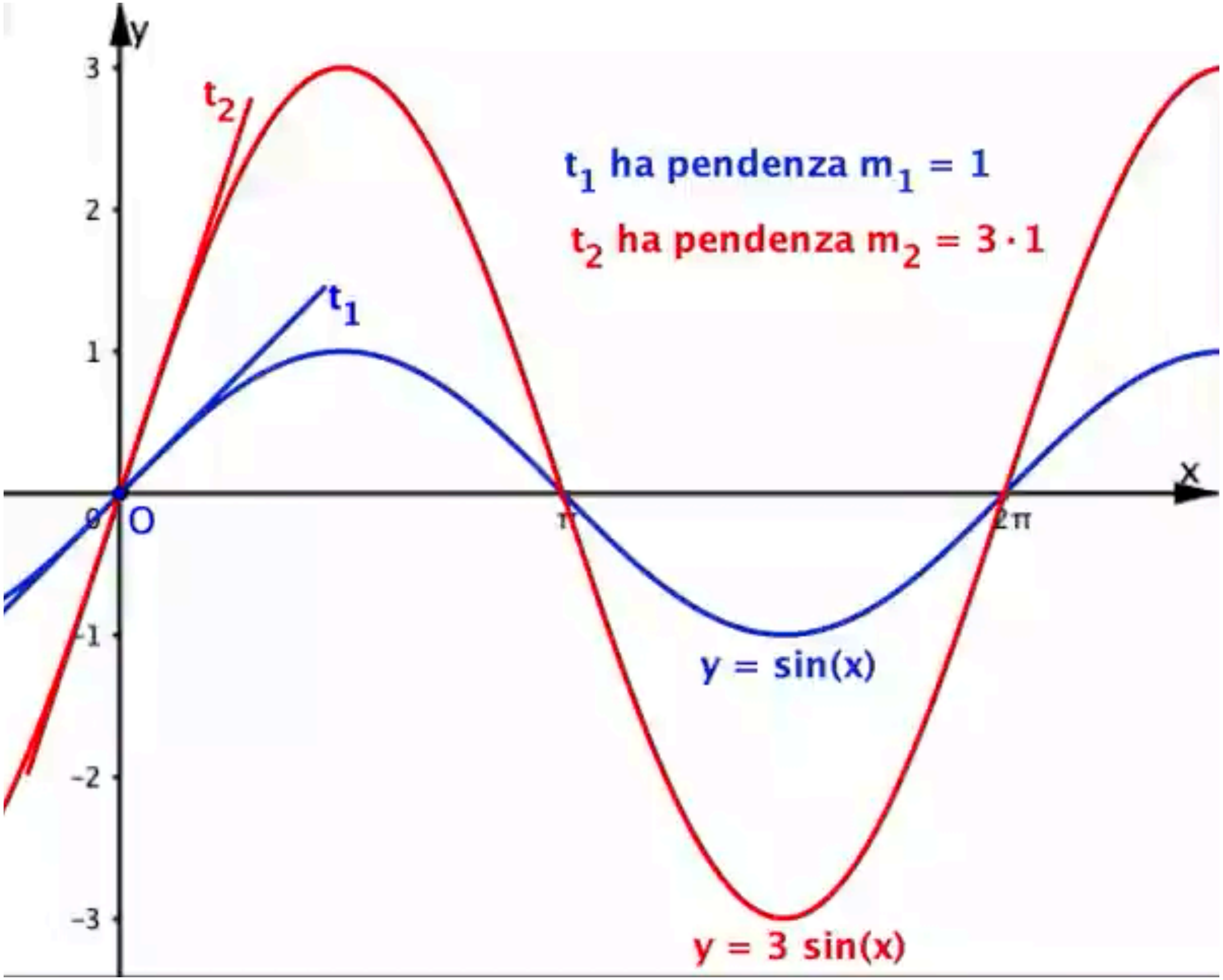
Gli esempi mostrano il ruolo particolare delle funzioni y = k.
Queste funzioni hanno derivata y' = 0, perciò 'passano inalterate nella derivata del prodotto'; ad esempio
$y = \sin(x)$ **ha derivata** $y' = \cos(x)$ **e** $y = 3\sin(x)$ **ha derivata** $y' = 3\cos(x)$



Interpretazione grafica se k>0.
Da $y = \sin(x)$ **si ottiene** $y = 3\sin(x)$ **con una dilatazione lungo l'asse y, che 'si trasmette' anche alle tangenti. Perciò le tangenti triplicano la pendenza.**

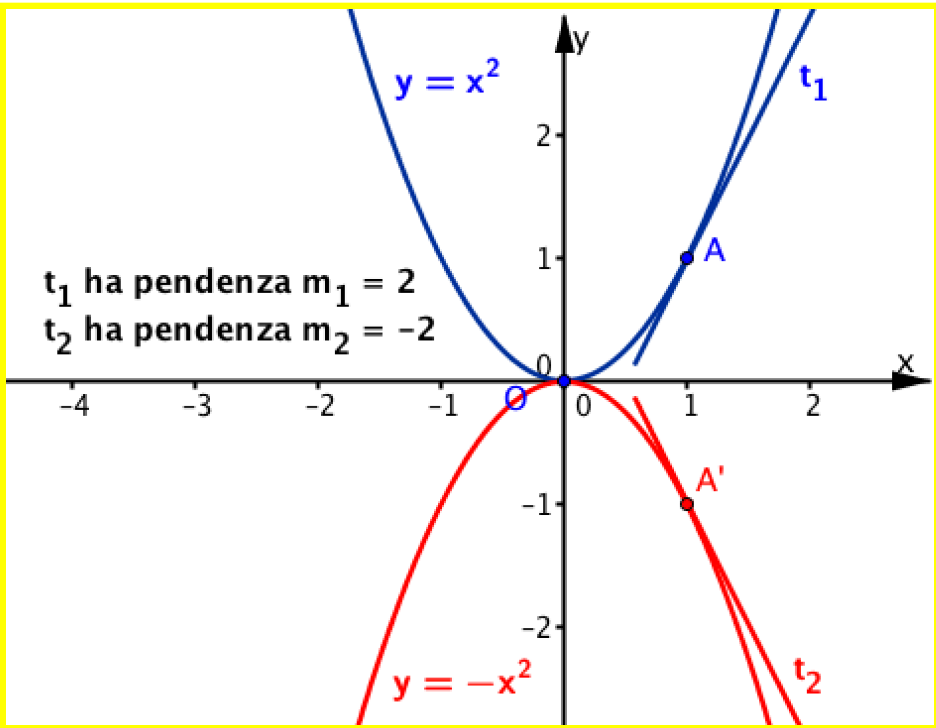
In generale
Tutte le funzioni del tipo $y = kf(x)$ **hanno derivata**
$y' = kf'(x)$

Video


y
3
2
1
0
O
-1
-2
-3
x
π
2π
t_2
t_1
t_1 ha pendenza $m_1 = 1$
t_2 ha pendenza $m_2 = 3 \cdot 1$
y = sin(x)
y = 3 sin(x)

Prodotto di una funzione per -1

Anche la costante -1 ‘passa nella derivata del prodotto’; ad esempio $y = x^2$ ha derivata $y' = 2x$ e $y = (-1)x^2$ ha derivata $y' = (-1)2x$, cioè $y = -x^2$ ha derivata $y' = -2x$



Interpretazione grafica.

Da $y = x^2$ si ottiene $y = -x^2$ con una simmetria attorno all’asse delle x, che ‘trascina’ anche le tangenti. Perciò le tangenti cambiano il segno della pendenza.

In generale

Le funzioni del tipo $y = -f(x)$ hanno derivata

$$y' = -f'(x)$$

Enrico Pietropoli, 2022

Sintesi dei risultati finora ottenuti

Derivate di funzioni elementari

Funzione	Derivata
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^{n}$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$
$y = e^{x}$	$y' = e^{x}$
$y = \ln(x)$	$y' = \frac{1}{x}$

Prime regole di algebra delle derivate

Funzione	Derivata
$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
$y = g(x)$	$y' = g'(x)$
$y = f(x) + g(x)$	$y' = f'(x) + g'(x)$
$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$