## Derivazione numerica

Nelle scienze e nella tecnologia si trovano spesso funzioni descritte non con una formula, ma solo con una tabella; in questi casi posso trovare la derivata per descrivere la rapidità di variazione di una grandezza? Ecco un esempio per trovare una risposta.
Qui sotto compaiono i dati relativi al lancio di un missile: la tabella mostra la quota *s* a cui si trova il missile al variare del tempo *t*.

In questo caso si è interessati a seguire la velocità del missile istante per istante e dunque si vuole conoscere la derivata della funzione assegnata. Ci si dovrà allora basare sul procedimento algebrico per calcolare la derivata: per valutare, per esempio, la velocità dopo 25″ dal lancio, si dovrà calcolare

$$f'(25)=\lim_{h\to 0}\frac{f(25+h)-f(25)}{h}$$

Fermiamoci ora a riflettere sulla formula appena scritta per capire come si può adattare alla situazione attuale:

- la lettera $h$ indica un intervallo di tempo,
- il rapporto $\dfrac{f(25+h)-f(25)}{h}$ indica la velocità media nell'intervallo $h$,
- la velocità media si avvicina sempre di più a quella istantanea, quando si assegnano ad $h$ valori sempre più vicini a 0.

È facile rendersi conto che, in questo caso, non possiamo rendere l'incremento $h$ piccolo quanto vogliamo, perché i dati a disposizione sono ad intervalli di tempo di 1 secondo; perciò, si riuscirà a determinare solo un valore approssimato della velocità cercata.

Vediamo dunque come si può determinare questo valore approssimato; si hanno a disposizione almeno tre possibili procedimenti:

I) calcolare il rapporto

$$\frac{f(25+1)-f(25)}{1}=\frac{589-533}{1}=56$$

II) calcolare il rapporto

$$\frac{f(25)-f(25-1)}{1}=\frac{533-480}{1}=53$$

III) calcolare il rapporto

$$\frac{f(25+1)-f(25-1)}{2}=\frac{589-480}{2}=54{,}5$$

Questi tre procedimenti corrispondono ai tre modi più comuni per calcolare la velocità media:

I) calcolare la velocità media "in avanti", in un intervallo di tempo successivo all'istante considerato,
II) calcolare la velocità media "all'indietro", in un intervallo di tempo precedente all'istante considerato,
III) calcolare la velocità media "centrale", in un intervallo di tempo che ha al centro l'istante considerato.

Si tratta di tre procedimenti che possono essere facilmente estesi a tutti i casi in cui una funzione $y=f(x)$ è data mediante una tabella: la derivata

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

può essere valutata in modo approssimato con i tre procedimenti seguenti:

I) con **la differenza in avanti**, indicata spesso con il simbolo $\Delta f$ e data da

$$\Delta f=\frac{f(a+h)-f(a)}{h};$$

II) con **la differenza all'indietro**, indicata con il simbolo $\nabla f$ e data da

$$\nabla f=\frac{f(a)-f(a-h)}{h};$$

III) con **la differenza centrale**, indicata con il simbolo $\delta f$ e data da

$$\delta f=\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}.$$

Esaminiamo meglio il significato di questi tre rapporti, visualizzando la situazione sul piano cartesiano, cioè rappresentando i tre punti $A[a, f(a)]$, $P[a-h, f(a-h)]$ e $Q[a+h, f(a+h)]$ (fig. 5).

Possiamo ragionare così: se i tre punti si trovassero su una data curva, come in fig. 6, potremmo calcolare la derivata $f'(a)$, tracciando la tangente $t_A$ alla curva nel punto $A$ e valutando la pendenza di questa retta.

Fig.5

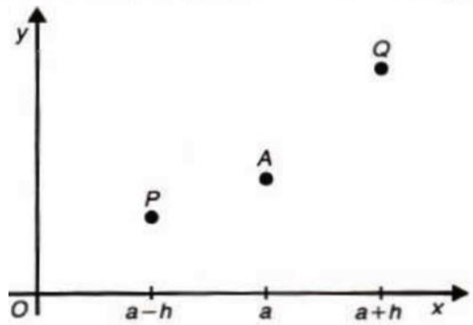
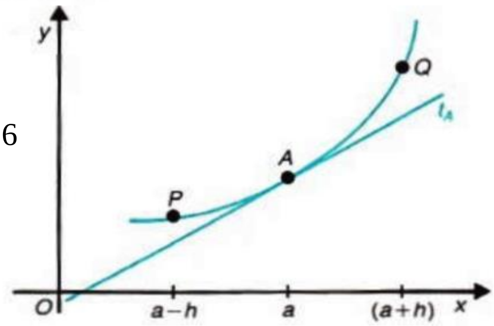



Fig.6




Ma nel caso esaminato non abbiamo il grafico della curva, abbiamo solo le coordinate dei tre punti; perciò, non possiamo far altro che approssimare la tangente $t_A$ con una secante. Per realizzare questa approssimazione abbiamo a disposizione tre possibilità:

I) approssimare la tangente $t_A$ con la secante $AQ$ (fig. 7); in questo modo la pendenza $f'(a)$ della tangente verrà approssimata dalla pendenza della secante $AQ$, che corrisponde alla differenza in avanti $\Delta f$;

II) approssimare la tangente $t_A$ con la secante $PA$ (fig. 8); in questo modo la pendenza $f'(a)$ della tangente verrà approssimata dalla pendenza della secante $PA$, che corrisponde alla differenza all'indietro $\nabla f$;

III) approssimare la tangente $t_A$ con la secante $PQ$ (fig. 9); in questo modo la pendenza $f'(a)$ della tangente verrà approssimata dalla pendenza della secante $PQ$, che corrisponde alla differenza centrale $\delta f$.

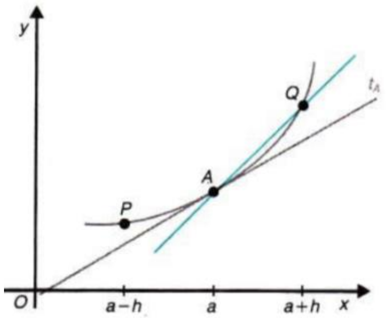


Fig. 7

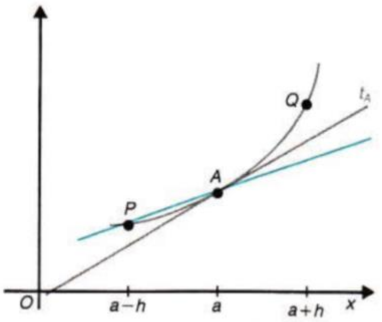


Fig. 8

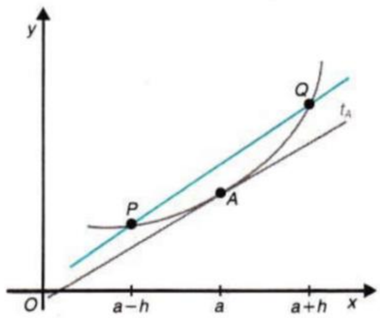


Fig. 9

Concludiamo l'esame di questi metodi di derivazione numerica provandoli su qualche funzione di cui è nota l'espressione analitica per confrontare i risultati del metodo numerico con quelli forniti dal calcolo differenziale.

Le figg. 10-12 visualizzano i risultati ottenuti:

- la differenza centrale $\delta f$ fornisce il risultato esatto ($2a$) della derivata e questo vuol dire che la secante $PQ$ è parallela alla tangente $t_A$ (fig. 10);
- la differenza in avanti $\Delta f$ fornisce un valore approssimato per eccesso della derivata e l'errore commesso vale sempre $h$ (fig. 11);
- la differenza $\nabla f$ all'indietro fornisce un valore approssimato per difetto della derivata e l'errore commesso vale ancora $h$ (fig. 12).

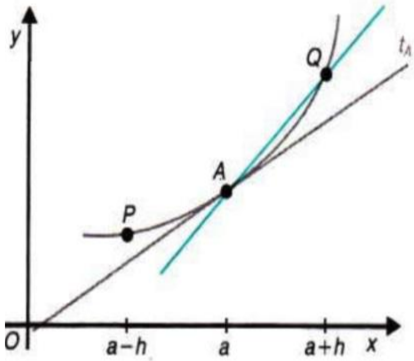


Fig. 10

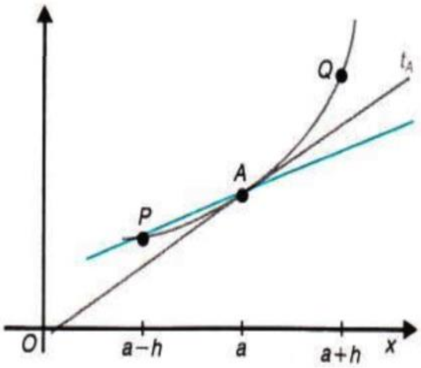


Fig. 11

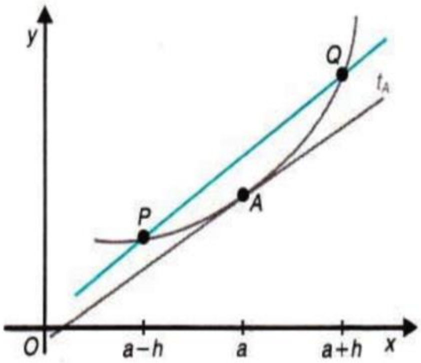


Fig. 12

- La funzione $y=x^3$, che ha come derivata

  $$y'=3x^2.$$

  Calcolando le tre differenze introdotte prima, relativamente ad un punto $A$ di ascissa $a$, si ottiene:

  $$\Delta f=\frac{(a+h)^3-a^3}{h}=3a^2+3ah+h^2;$$

  $$\nabla f=\frac{a^3-(a-h)^3}{h}=3a^2-3ah+h^2;$$

  $$\delta f=\frac{(a+h)^3-(a-h)^3}{2h}=3a^2+h^2.$$

Ora si ottengono comunque dei valori approssimati della derivata richiesta, che vale $3a^2$. Inoltre, l'errore della differenza centrale $\delta f$ vale $h^2$ e quindi dipende solo dall'ampiezza $h$ dell'intervallo scelto; invece, gli errori che si commettono con le altre due differenze dipendono anche dalla scelta dell'ascissa $a$.

**Documento tratto dal testo fuori catalogo**
**E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti**
***Elementi di analisi matematica***