Derivata in un punto e funzione derivata

Enrico Pietropoli, 2022

Un procedimento per risolvere tre problemi

Pendenza della tangente alla curva $y = x^3$ in $x = 1$	1. Pendenza m_s della secante $m_s = \dfrac{(1+h)^3 - 1^3}{h}$	2. Pendenza m_t della tangente $m_t = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1+h)^3 - 1^3}{h}$
Velocità del moto $s = \sin(t)$ in $t = 0$	1. Velocità media v_m $v_m = \dfrac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h}$	2. Velocità istantanea v $v = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h}$
Rapidità di crescita di $y = f(t)$ in $t = 16$	1. Rapidità media r_m di crescita $r_m = \dfrac{f(16+h) - f(16)}{h}$	2. Rapidità istantanea r di crescita $r = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(16+h) - f(16)}{h}$
Procedimento per determinare la rapidità di variazione di una funzione $y = f(x)$ in $x = a$	1. Rapporto incrementale $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$	2. Limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Il centro del procedimento

Il limite per h che tende a 0 del rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Il risultato del limite dà la pendenza della tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ nel suo punto di ascissa $x = a$.

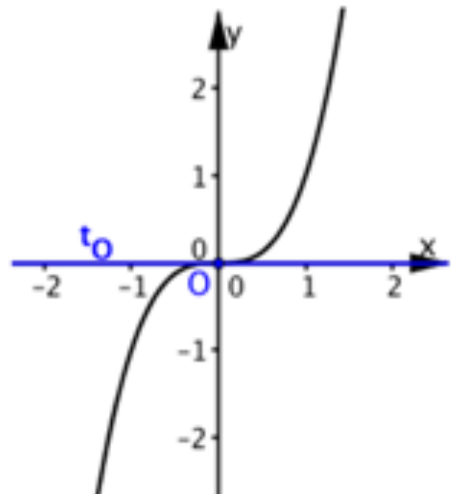
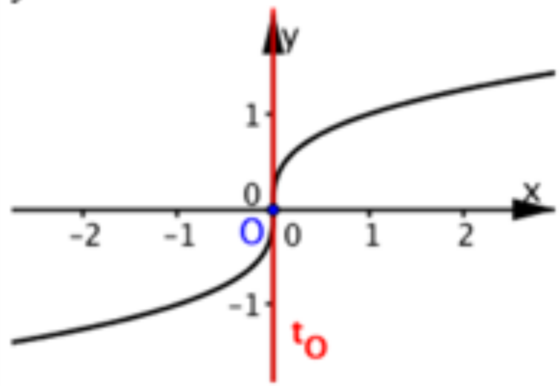
Quali risultati può avere il limite per *h* che tende a 0 del rapporto incrementale?

Attività

Completa la di lavoro per esaminare il limite del rapporto incrementale in varie situazioni.

Che cosa hai trovato

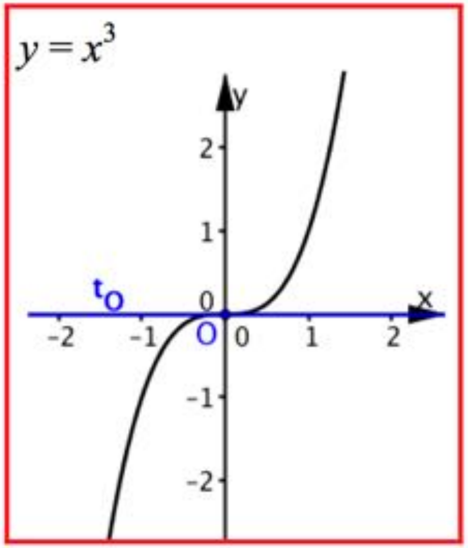
Quesito 1

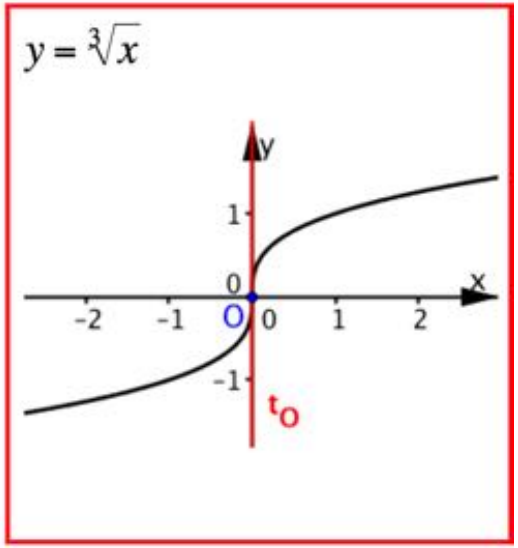
$y = x^3$ 	$y = \sqrt[3]{x}$ 
Per ottenere la pendenza m_t della tangente in O(0; 0) calcolo: 1. il rapporto incrementale $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(0+h)^3 - 0^3}{h} = \frac{h^3}{h} = h^2$ 2. il limite del rapporto incrementale per $h \to 0$ $\lim_{h \to 0} h^2 = 0$	Per ottenere la pendenza m_t della tangente in O(0; 0) calcolo: 1. il rapporto incrementale $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{0+h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}$ 2. il limite del rapporto incrementale per $h \to 0$ $\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \infty$

Quesito 2

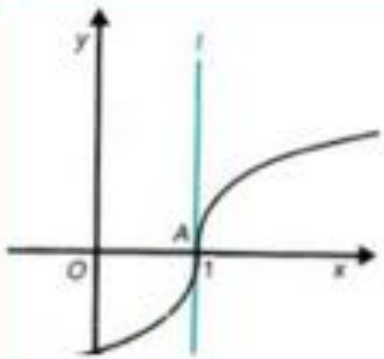
2. Completa le seguenti frasi

- La pendenza della retta tangente a $y = x^3$ in O(0; 0) è $m_t = 0$ perché $\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$
- L'equazione della retta tangente a a $y = x^3$ in O(0; 0) è y = 0, che è l'equazione dell'asse x.
- L'equazione della retta tangente a $y = \sqrt[3]{x}$ in O(0; 0) è x = 0, perché la curva è simmetrica di $y = x^3$, rispetto alla bisettrice del I e III quadrante (scambio y con x).
- Non posso trovare la pendenza della retta tangente a $y = \sqrt[3]{x}$ in O(0; 0) perché trovo $\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ e già sapevo che l'asse y non ha pendenza.



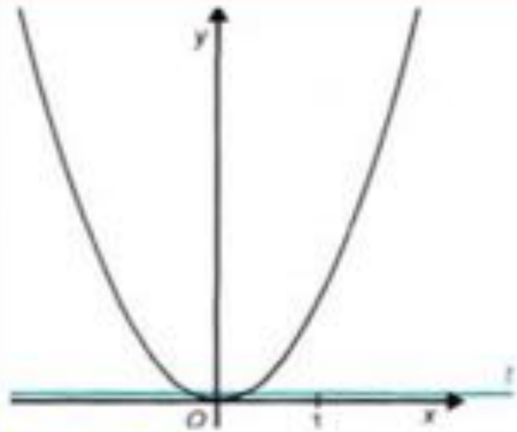


Quesito 3



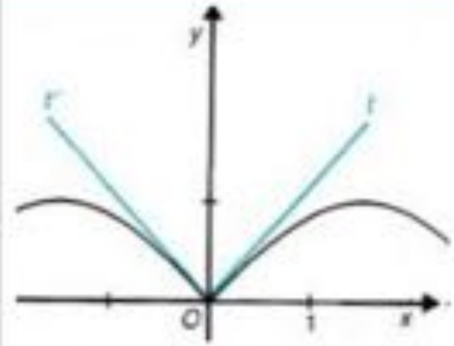
$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$$

Perché la retta tangente in A è parallela all'asse *y*, che non ha pendenza.



$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

Perché la retta tangente in A è l'asse *x*, che ha pendenza 0.



$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ non esiste}$$

Perché in O la curva ha due tangenti diverse, una 'a destra' e l'altra ' a sinistra', perciò il rapporto incrementale ha due limiti diversi quando h→0 da destra o da sinistra.

Parole e simboli della matematica

Quando calcolo il limite del rapporto incrementale posso dunque trovare:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \ell \text{ (numero, che può essere 0)}$$

In questo caso il numero ℓ indica la rapidità di variazione; prende il nome di derivata della funzione y = f(x) in x = a e si indica col simbolo f'(a).

Si scrive quindi:

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)}$$

Parole e simboli della matematica

Ma, quando calcolo il limite del rapporto incrementale, posso anche trovare:

- $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ non esiste
- $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$

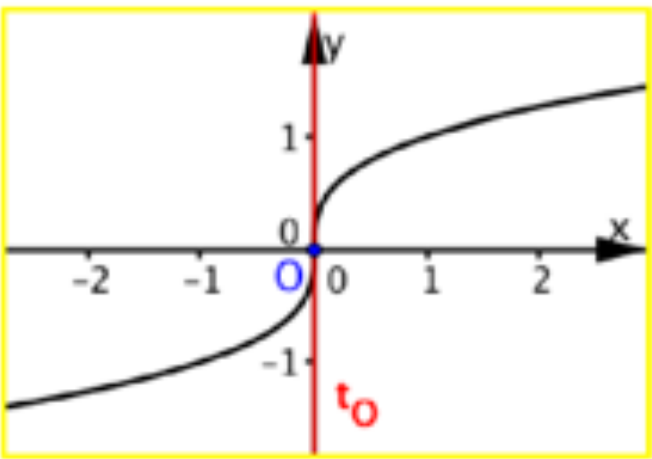
In questi casi si dice che la funzione non è derivabile nel punto di ascissa x = a.

Esempi per riflettere

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{in} \quad x = 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \infty \Rightarrow f(x) \text{ non è derivabile in } x = 0$$



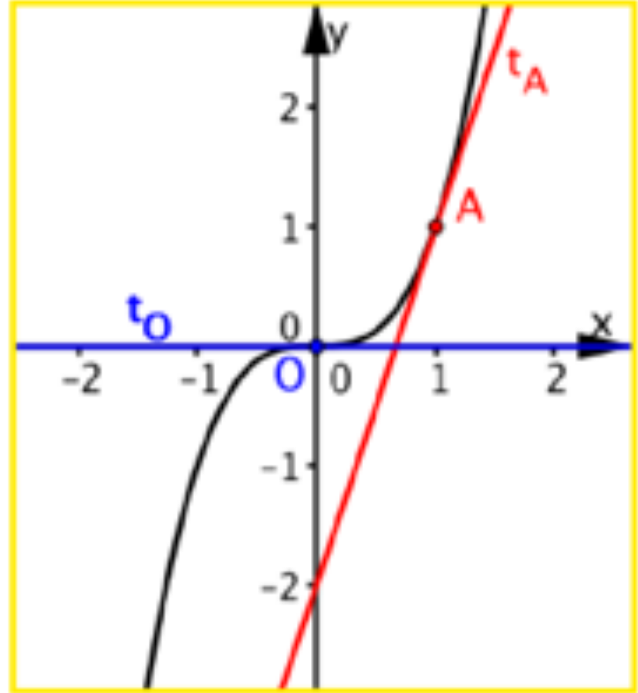
La tangente t_O è l'asse y, che non ha pendenza.

Esempi per riflettere

$$f(x) = x^3 \text{ in } x = 1$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h^3 + 3h^2 + 3h}{h} = h^2 + 3h + 3$$

$$\lim_{h \to 0}\left(h^2 + 3h + 3\right) = 3 \Leftrightarrow f'(1) = 3$$



3 = pendenza di t_A

$$f(x) = x^3 \text{ in } x = 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h^3}{h} = h^2$$

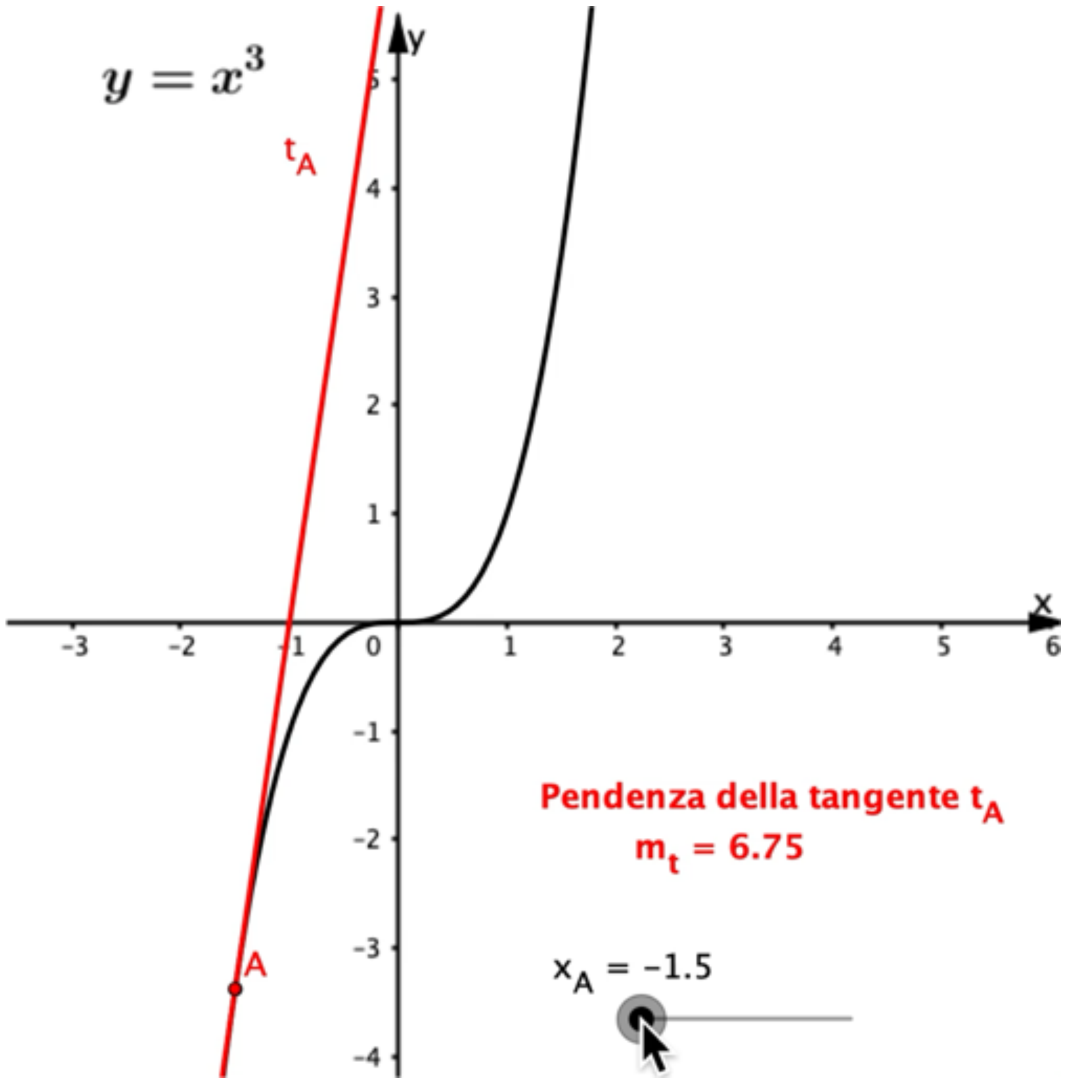
$$\lim_{h \to 0} h^2 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$$

0 = pendenza di t_O

Video

Il prossimo video ti suggerisce di osservare la pendenza di una retta tangente ‘in movimento’

Retta tangente ‘in movimento’



Pendenza della ‘tangente in movimento’

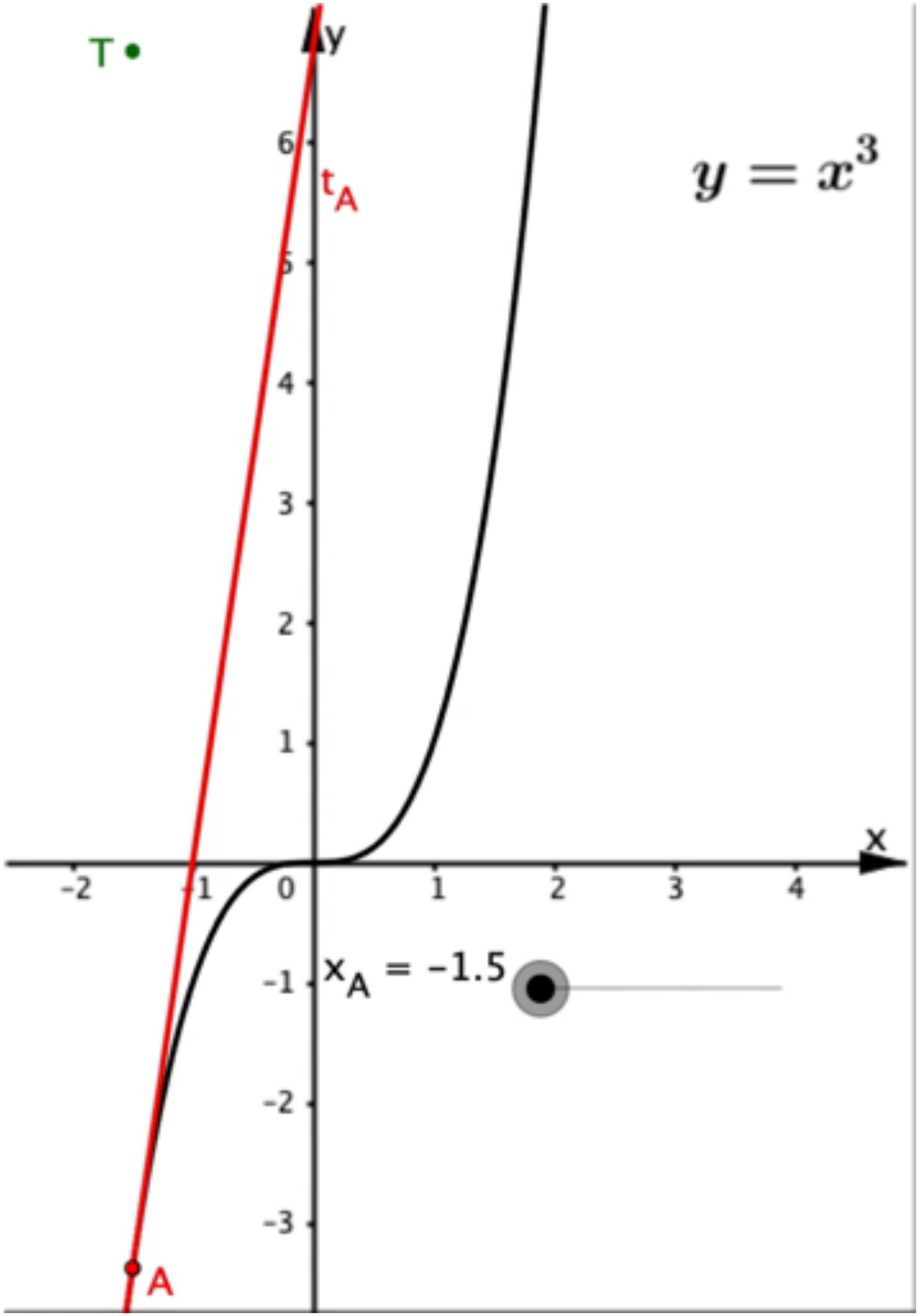
Il video mostra un punto A che scorre sul grafico di $y = x^3$ e la tangente t_A, che si muove insieme ad A.
In ogni punto della curva osservo la retta tangente e la sua pendenza m_t che varia al variare di x.
Così, per ogni x, ‘vedo’ la derivata della funzione $y = x^3$.

Ecco allora un’idea.

Ad ogni punto A collego un punto T, che ha:

- **la stessa ascissa di A, cioè $x_{A;}$**
- **come ordinata la pendenza m_t della tangente.**

Il video seguente realizza questa idea



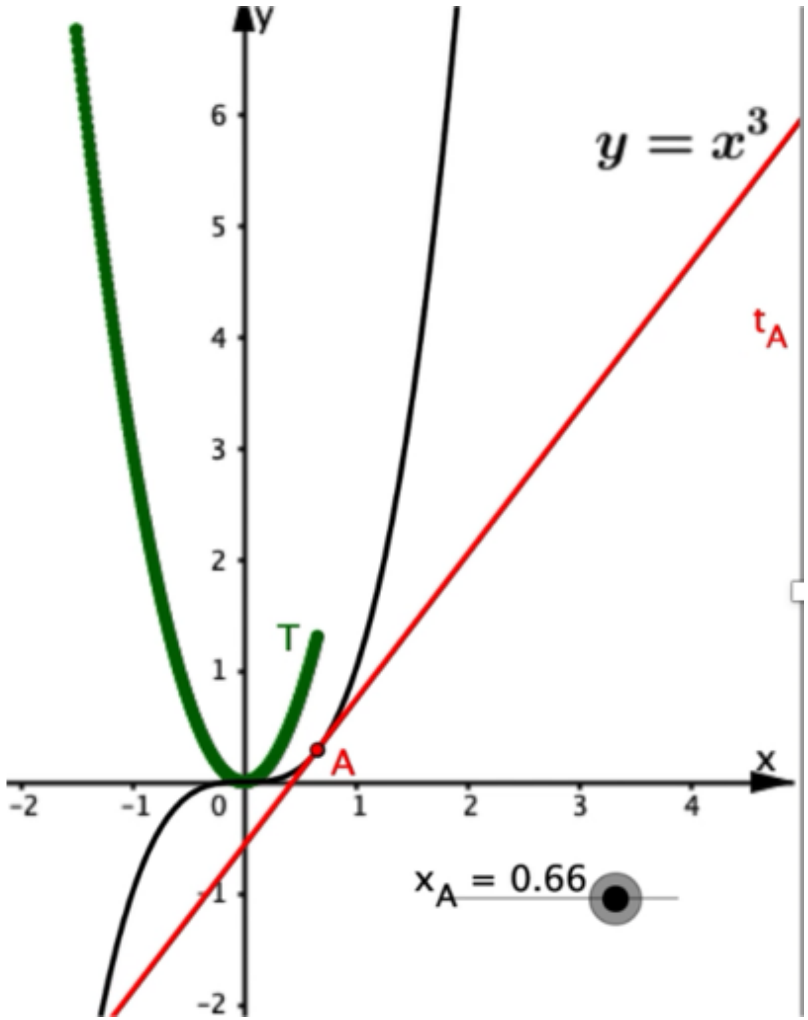
Una nuova idea

Osserva

- Il punto A(x_A , y_A)
- La tangente con pendenza m_t
- Il punto T che ha:
  - ascissa = x_A
  - ordinata = m_t

Una nuova funzione

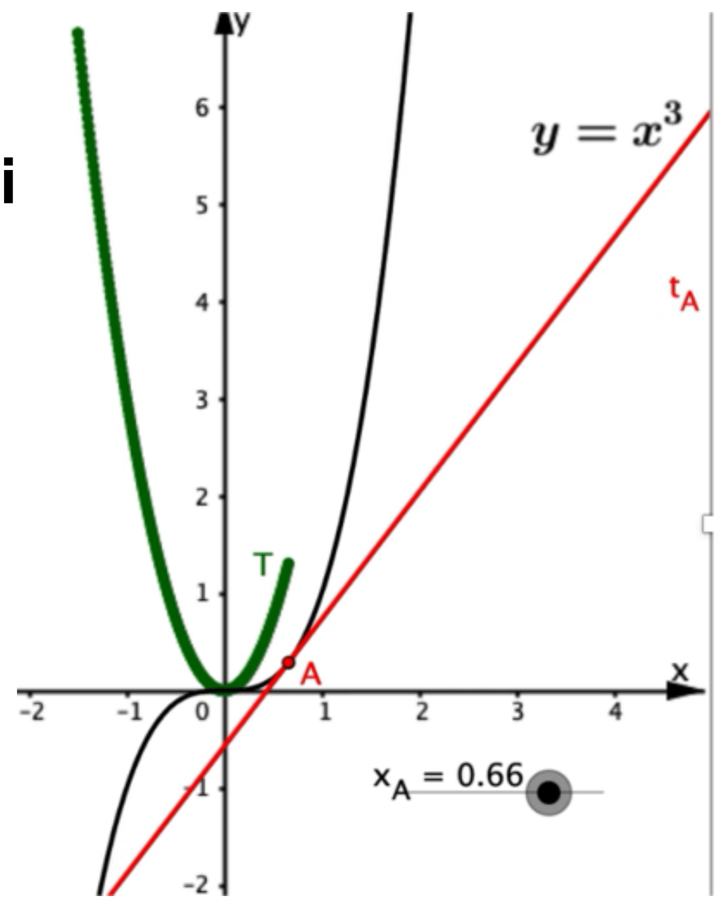
Il video mostra la ‘traccia’ che lascia il punto verde T, mentre A scivola sulla curva. La traccia delinea una curva verde, che è il grafico di una nuova funzione.
Quale sarà il nome di questa funzione?



La funzione derivata

Al variare di x il punto T ha:

- la stessa ascissa di A;
- ordinata m_t, che è la derivata di $y = x^3$ nel punto A.



La funzione così ottenuta associa ad ogni x la derivata di $y = x^3$, perciò prende il nome di

FUNZIONE DERIVATA DI $y = x^3$

Possiamo descrivere questa funzione con una formula?

Calcolare la funzione derivata di y = x^3

Rivediamo il procedimento da seguire per calcolare la derivata di y = x^3 in alcuni punti

In $x = 1$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} = \frac{h^3 + 3h^2 + 3h}{h} = h^2 + 3h + 3$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0}\left(h^2 + 3h + 3\right) = 3 \Leftrightarrow f'(1) = 3$$

$$y = x^3$$

In $x = 2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \frac{h^3 + 6h^2 + 12h}{h} = h^2 + 6h + 12$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0}\left(h^2 + 6h + 12\right) = 12 \Leftrightarrow f'(2) = 12$$

Come evitare di ripetere il calcolo tante volte?

Calcolare la funzione derivata di $y = x^3$

Basta eseguire il calcolo una sola volta, a partire da un punto di ascissa x.

Funzione derivata di $y = x^3$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{h^3 + 3xh^2 + 3x^2h}{h} = h^2 + 3xh + 3x^2$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \left(h^2 + 3xh + 3x^2\right) = 3x^2$$

Osserviamo subito le lettere *x* ed *h* nel calcolo del limite:

- **la variabile *h* assume valori sempre più vicini a 0;**
- **la lettera *x* indica una *generica* ascissa che rimane fissa durante il calcolo del limite.**

Funzione derivata e derivata in un punto

Abbiamo così trovato che $3x^2$ è la formula che descrive la derivata di y = x^3 per qualunque x.
Ecco i simboli più comunemente usati per descrivere la funzione derivata.

$$\boxed{f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3x^2}$$

Ora proviamo a calcolare la derivata di y = x^3 in x = ½.
Ricomincio a calcolare rapporto incrementale e limite? No!
Ho già eseguito quei calcoli per qualunque x; perché ripeterli?

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

Simboli per la derivata

Gli studi di Newton e Lebniz (fine 1600) sono solo l'inizio di un ricco filone di ricerche che coinvolge molti scienziati. Perciò troviamo vari simboli per indicare la funzione derivata. Ecco un elenco per confrontare i simboli più diffusi.

Simbolo Per la derivata di $y = f(x)$	Esempio Per la derivata di $y = x^3$	Autore
$y' = f'(x)$	$y' = 3x^2$	Lagrange (1736 - 1813)
$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$	$\frac{dy}{dx} = 3x^2$	Leibniz (1646 - 1716)
$Df(x)$	$Dx^3 = 3x^2$	Eulero (1707 – 1783)
$\dot{y}$	$\dot{y} = 3x^2$	Newton (1642–1727)

In fisica

Il calcolo differenziale

Riprendiamo alcuni simboli per riflettere sulla notazione di Leibniz.

Invece di scrivere $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$

Leibniz scrive $\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta f} = \frac{df}{dx}$

Per dx (o df) troviamo vari nomi:
- differenza fra due valori infinitamente vicini di x (o di y)
- differenza infinitesima;
- differenziale.

Tutti nomi che richiamano una stessa idea: dx indica un numero vicinissimo a 0, ma non esattamente 0, in modo da poter dividere per dx.
Questa idea di Lebniz è stata approfondita e precisata fino a portare al concetto di limite.

Nasce così il calcolo differenziale o calcolo infinitesimale

Come è organizzato il calcolo differenziale

Il calcolo differenziale studia le derivate.

Pensate alle tante funzioni che avete incontrato finora: calcolare il limite del rapporto incrementale per tutte queste funzioni sarebbe un lavoro lunghissimo!

Ecco invece il percorso molto più rapido che seguiremo:

1. **Calcolo le derivate di poche *funzioni elementari*.**
2. **Studio le regole dell'*Algebra delle derivate* per calcolare le derivate di tutte le funzioni ottenute da quelle elementari con procedimenti noti.**

Esempi di funzioni ottenute con 3 funzioni elementari

$$y = \frac{2\sin(x)}{x^3} \qquad y = 2x^3 + \sin(x)$$