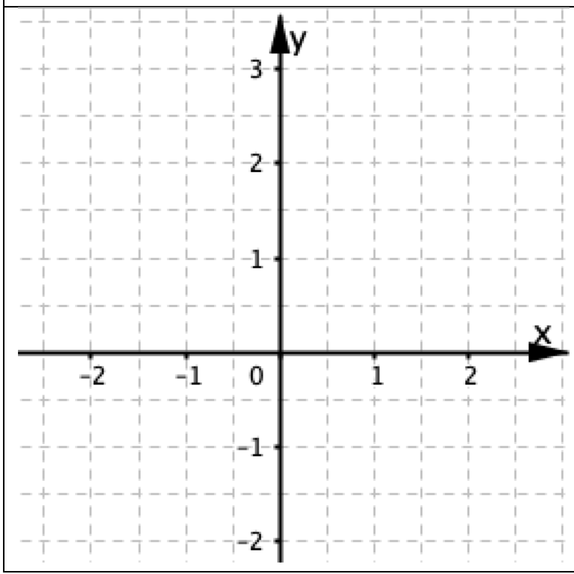
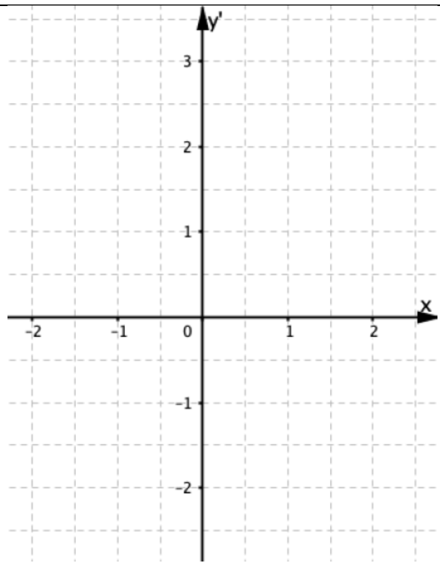
Funzione derivata. Esercizi

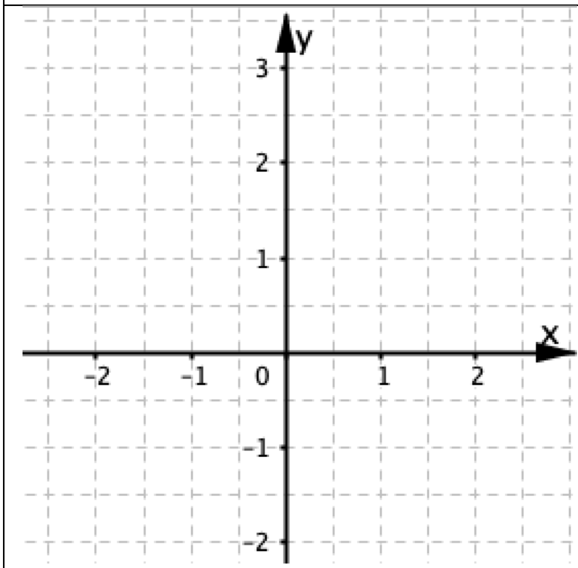
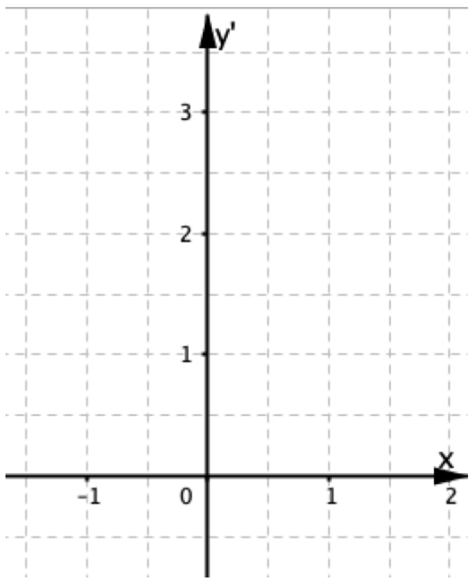
1. Completa la tabella seguente.

Funzione	**Derivata**	**Ascissa *a***	**Derivata nel punto di ascissa *a***
$y = \pi$		$\boldsymbol{a} = -3$	
$y = x$		$\boldsymbol{a} = \frac{2}{5}$	
$y = x^2$		$\boldsymbol{a} = \frac{3}{2}$	
$y = 2^3$		$\boldsymbol{a} = -5$	
$y = x^3$		$\boldsymbol{a} = -3$	
$y = x^4$		$\boldsymbol{a} = -\frac{1}{3}$	

2. È data la funzione $y = x^2$.
   a. Calcola la derivata della funzione.
   b. Rappresenta qui sotto la funzione e la sua derivata.
   c. Calcola i seguenti valori di funzione e derivata e rappresentali sui grafici:
   $f(1) =$ ……. $f'(1) =$ ……. $f(-1) =$ ……. $f'(-1) =$ …….
   $f(\sqrt{2}) =$ ……. $f'(\sqrt{2}) =$ ……. $f(-\sqrt{2}) =$ …….$f'(-\sqrt{2}) =$ …….
   d. Indica sul grafico della funzione il punto che ha la tangente parallela alla retta d'equazione $y = x + 3$.
   e. Può succedere che due punti del grafico di $y = x^2$ abbiano tangenti parallele? Motiva la tua risposta.

Funzione $y = x^2$	**Derivata y' = ……**
	

3. È data $y = x^3$.
   a. Calcola la derivata della funzione.
   b. Rappresenta qui sotto la funzione e la sua derivata.
   c. Calcola i seguenti valori di funzione e derivata e rappresentali sui grafici:
      $f(0) =$ ……. $f'(0) =$ ……. $f(1) =$ ……. $f'(-1) =$ …….
      $f\left(\frac{1}{2}\right) =$ ……. $f'\left(\frac{1}{2}\right) =$ ……. $f\left(-\frac{1}{2}\right) =$ ……. $f'\left(-\frac{1}{2}\right) =$ …….
   d. Indica sul grafico della funzione il punto che ha la tangente parallela alla retta d'equazione $y = 3x + 4$. Trovi un solo punto?

<table>
<tr><th>Funzione $y = x^3$</th><th>Derivata y' = ……</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

4. È data $y = x^2$. Calcola i seguenti rapporti incrementali.

   – il rapporto incrementale, relativo all'ascissa $x=1$, con h variabile;
   – il rapporto incrementale, relativo ad un'ascissa generica x, con $h=1$;
   – il rapporto incrementale, relativo ad un'ascissa x, con h variabile.

   Confronta : i rapporti ottenuti, indicando in particolare:

   a) il rapporto di cui valutare il limite per $h \to 0$, per ottenere $f'(1)$;
   b) il rapporto di cui valutare il limite per $h \to 0$, per ottenere $f'(x)$.

5. È data $y = x^3$. Calcola i seguenti rapporti incrementali.

   – il rapporto incrementale, relativo all'ascissa $x=1$, con h variabile;
   – il rapporto incrementale, relativo ad un'ascissa generica x, con $h=1$;
   – il rapporto incrementale, relativo ad un'ascissa x, con h variabile.

   Confronta : i rapporti ottenuti, indicando in particolare:

   a) il rapporto di cui valutare il limite per $h \to 0$, per ottenere $f'(1)$;
   b) il rapporto di cui valutare il limite per $h \to 0$, per ottenere $f'(x)$.

6. Ricorda la formula per sviluppare la potenza di un binomio, scritta qui sotto:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + b^n$$

   a. Completa i calcoli seguenti per calcolare la derivata di $y = x^4$ con il limite del rapporto incrementale.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} = \frac{x^4 + \cdots x^3 h + \cdots x^2 h^2 + \cdots + h^4 - x^4}{h} = \cdots x^3 + \cdots x^2 h + \cdots h^4$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} (\ldots x^3 + \cdots x^2 h + \cdots h^4) = \cdots x^3$$

   b. Spiega perché basta scrivere i primi tre termini e l'ultimo termine dello sviluppo della potenza del binomio per completare il calcolo.

7. Basati sull'esercizio precedente per calcolare con il limite del rapporto incrementale la derivata di $y = x^n$, con n numero naturale maggiore di 1.