Funzione derivata

Enrico Pietropoli, 2022

Richiamo la derivata in un punto

Quando calcolo il limite per h che tende a zero del rapporto incrementale, posso trovare:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \ell \text{ (numero, che può essere 0)}$$

In questo caso il numero ℓ indica la rapidità di variazione; prende il nome di derivata della funzione y = f(x) in x = a e si indica col simbolo f'(a).
Si scrive quindi:

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)}$$

Esempi per riflettere

$$f(x) = x^3 \text{ in } x = 1$$

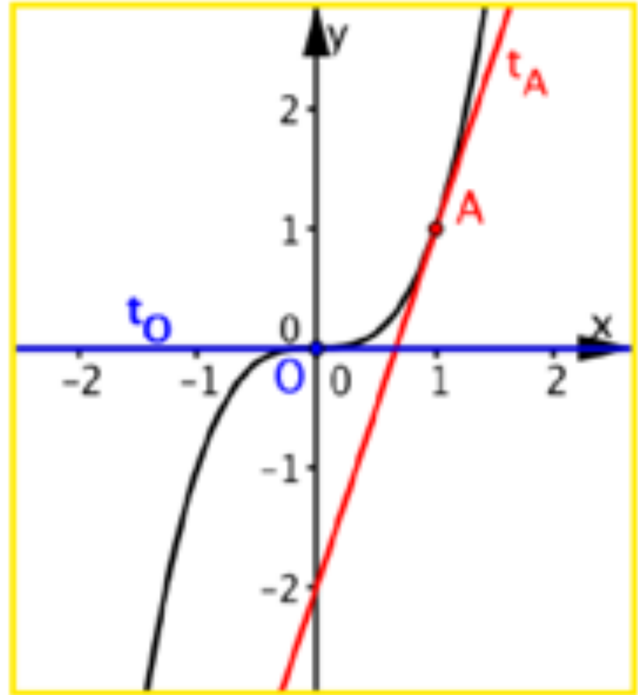
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h^3 + 3h^2 + 3h}{h} = h^2 + 3h + 3$$

$$\lim_{h \to 0}\left(h^2 + 3h + 3\right) = 3 \Leftrightarrow f'(1) = 3$$

$$f(x) = x^3 \text{ in } x = 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h^3}{h} = h^2$$

$$\lim_{h \to 0} h^2 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$$



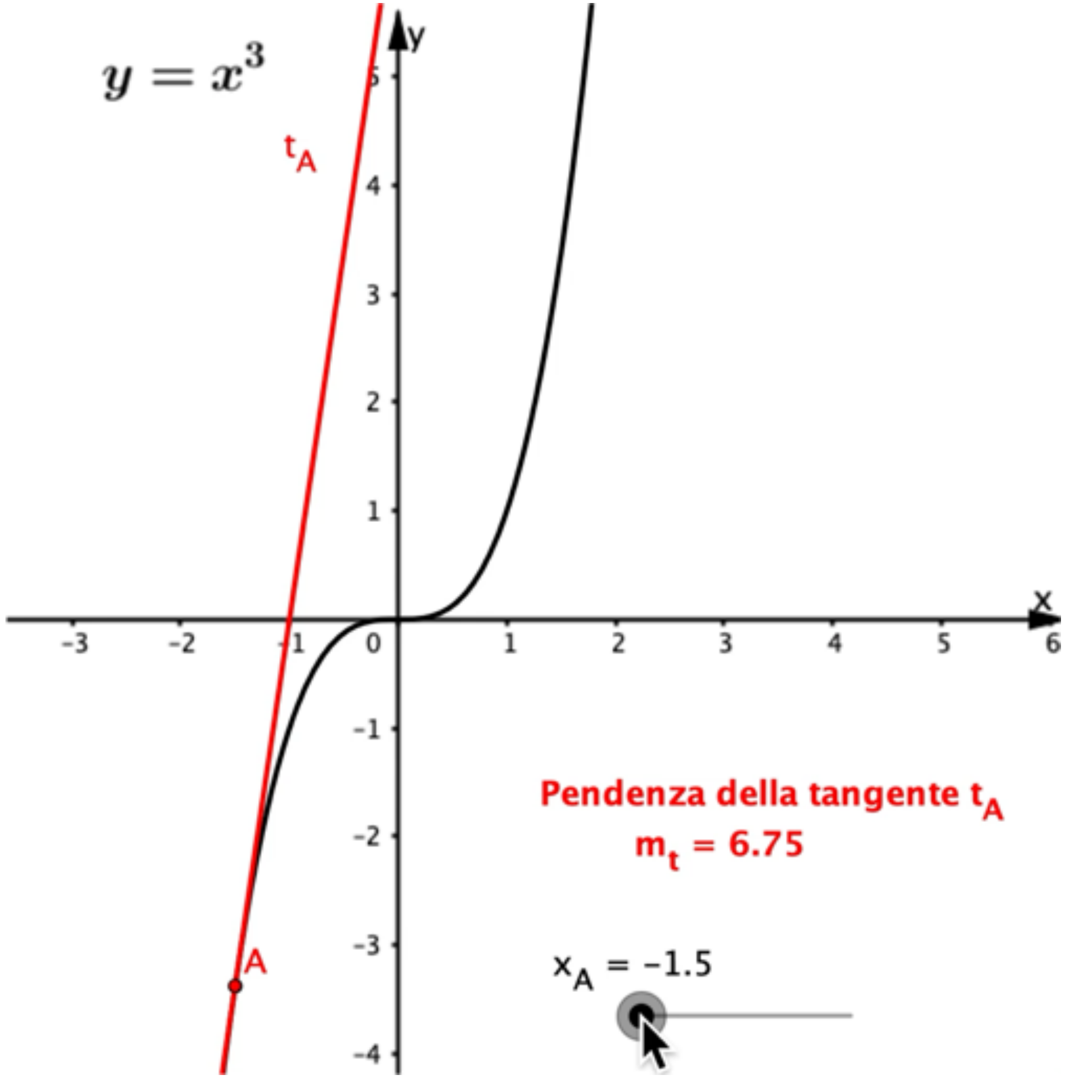
3 = pendenza di t_A

0 = pendenza di t_O

Video

Il prossimo video ti suggerisce di osservare la pendenza di una retta tangente ‘in movimento’

Retta tangente 'in movimento'



Pendenza della ‘tangente in movimento’

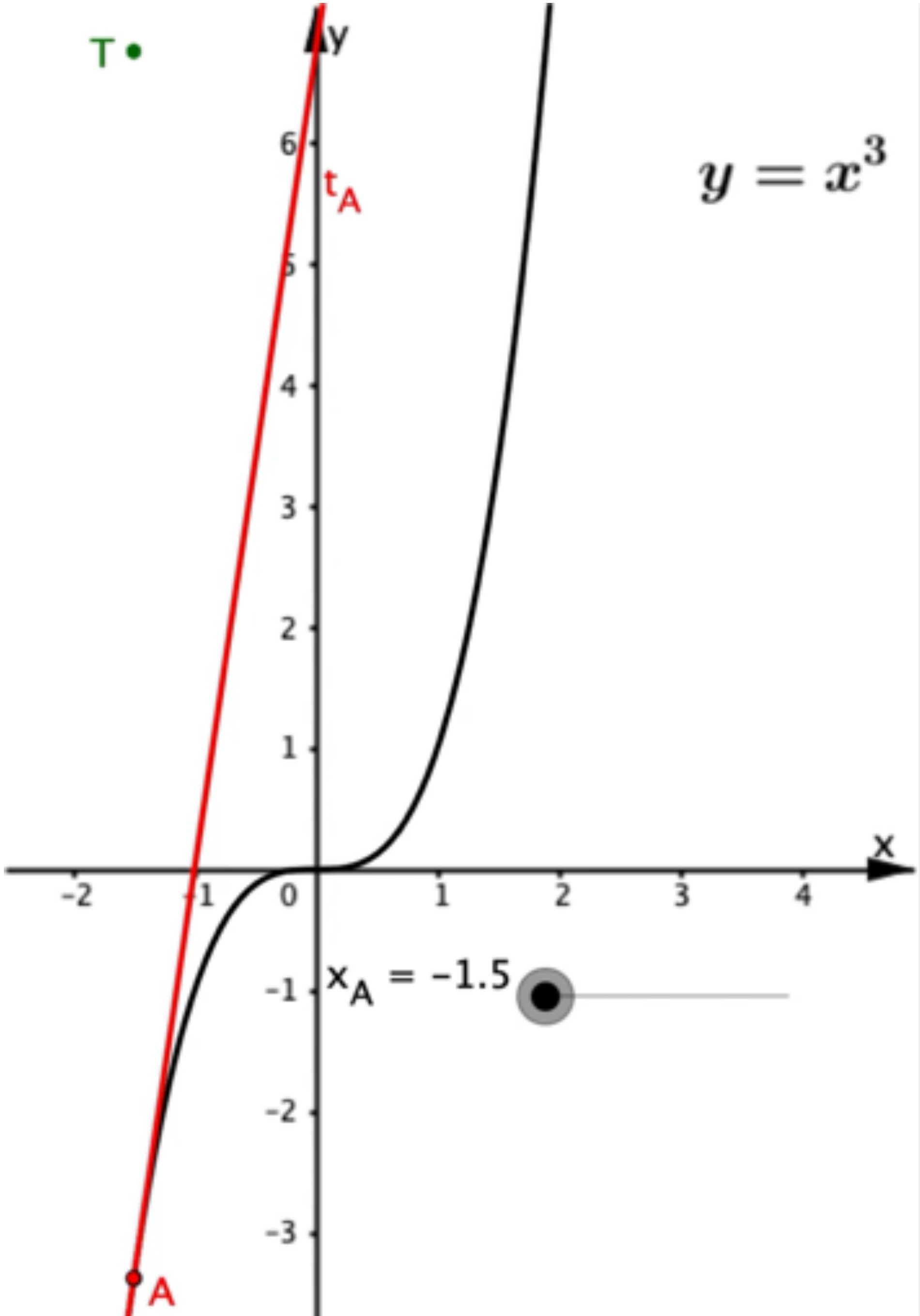
Il video mostra un punto A che scorre sul grafico di $y = x^3$ e la tangente t_A, che si muove insieme ad A.
In ogni punto della curva osservo la retta tangente e la sua pendenza m_t che varia al variare di x.
Così, per ogni x, ‘vedo’ la derivata della funzione $y = x^3$.

Ecco allora un’idea.

Ad ogni punto A della curva collego un punto T, che ha:

- **la stessa ascissa di A, cioè $x_{A;}$**
- **come ordinata la pendenza m_t della tangente.**

Il video seguente realizza questa idea



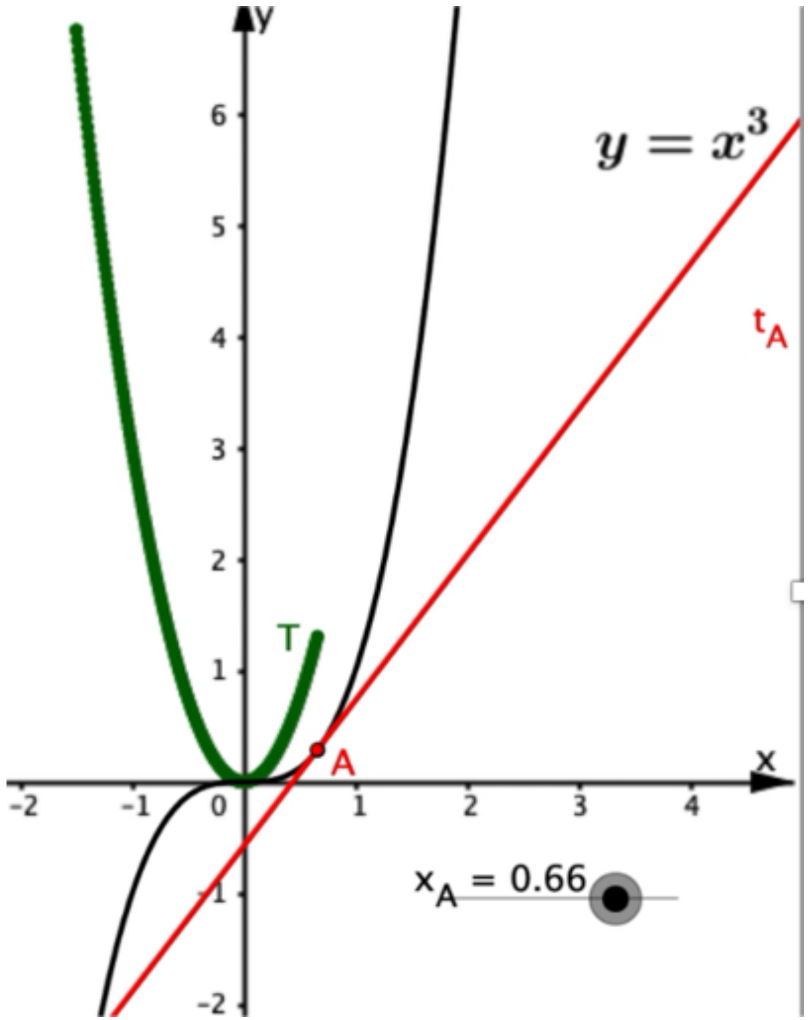
Una nuova idea

Osserva

- Il punto A(x_A , y_A)
- La tangente con pendenza m_t
- Il punto T che ha:
  - ascissa = x_A
  - ordinata = m_t

Una nuova funzione

Il video mostra la ‘scia’ che lascia il punto verde T, mentre A scivola sulla curva. La traccia delinea una curva verde, che è il grafico di una nuova funzione.
Quale sarà il nome di questa funzione?



Enrico Pietropoli, 2022

La funzione derivata

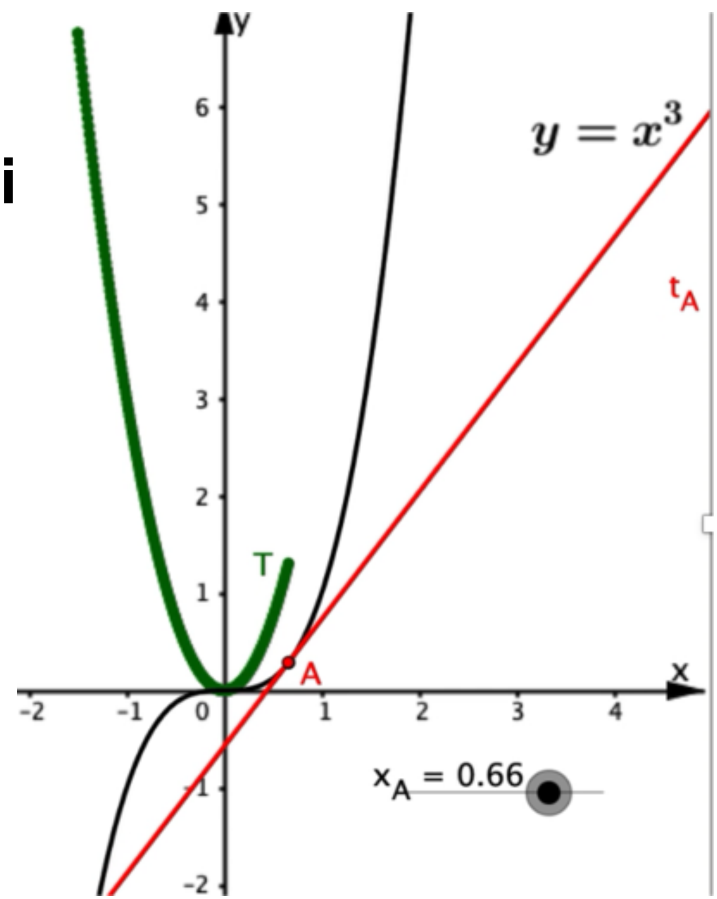
Al variare di x il punto T ha:

- la stessa ascissa di A;
- ordinata m_t, che è la derivata di $y = x^3$ nel punto A.

La funzione così ottenuta associa ad ogni x la derivata di $y = x^3$, perciò prende il nome di

FUNZIONE DERIVATA DI $y = x^3$

Possiamo descrivere questa funzione con una formula?



Calcolare la funzione derivata di y = x^3

Rivediamo il procedimento da seguire per calcolare la derivata di y = x^3 in alcuni punti

In $x = 1$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} = \frac{h^3 + 3h^2 + 3h}{h} = h^2 + 3h + 3$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \left(h^2 + 3h + 3\right) = 3 \Leftrightarrow f'(1) = 3$$

In $x = 2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \frac{h^3 + 6h^2 + 12h}{h} = h^2 + 6h + 12$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \left(h^2 + 6h + 12\right) = 12 \Leftrightarrow f'(2) = 12$$

$$y = x^3$$

Posso evitare di ripetere lo stesso calcolo tante volte?

Calcolare la funzione derivata di $y = x^3$

Basta eseguire il calcolo una sola volta, a partire da un punto di ascissa x.

Funzione derivata di $y = x^3$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{h^3 + 3xh^2 + 3x^2h}{h} = h^2 + 3xh + 3x^2$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0}\left(h^2 + 3xh + 3x^2\right) = 3x^2$$

Osserva le lettere *x* ed *h* nel calcolo del limite:

- **la variabile *h* assume valori sempre più vicini a 0;**
- **la lettera *x* indica una *generica* ascissa che rimane fissa durante il calcolo del limite.**

Funzione derivata e derivata in un punto

Abbiamo così trovato che $3x^2$ è la formula che descrive la derivata di $y = x^3$ per qualunque x.
Ecco i simboli più comunemente usati per descrivere la funzione derivata.

$$\boxed{f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2}$$

Ora provo a calcolare la derivata di $y = x^3$ in $x = \frac{1}{2}$.
Ricomincio a calcolare rapporto incrementale e limite?

No!

Ho già eseguito quei calcoli per qualunque x; perché ripeterli?

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Simboli per la derivata

Gli studi di Newton e Lebniz (fine 1600) sono solo l'inizio di un ricco filone di ricerche che coinvolge molti scienziati. Perciò troviamo vari simboli per indicare la funzione derivata. Ecco un elenco per confrontare i simboli più diffusi.

Simbolo Per la derivata di $y = f(x)$	Esempio Per la derivata di $y = x^3$	Autore
$y' = f'(x)$	$y' = 3x^2$	Lagrange (1736 - 1813)
$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$	$\frac{dy}{dx} = 3x^2$	Leibniz (1646 - 1716)
$Df(x)$	$Dx^3 = 3x^2$	Eulero (1707 – 1783)
$\dot{y}$	$\dot{y} = 3x^2$	Newton (1642–1727)

In fisica

Enrico Pietropoli, 2022

Il calcolo differenziale

Riprendiamo alcuni simboli per riflettere sulla notazione di Leibniz.

Invece di scrivere $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$

Leibniz scrive $\lim_{h\to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta f} = \dfrac{df}{dx}$

Per dx (o df) troviamo vari nomi:

- **differenza fra due valori infinitamente vicini di x (o di y)**
- **differenza infinitesima;**
- **differenziale.**

Tutti nomi richiamano una stessa idea: dx indica un numero vicinissimo a 0, ma non esattamente 0, in modo da poter dividere per dx.

Questa idea di Lebniz è stata approfondita e precisata fino a portare al concetto di limite.

Nasce così il calcolo *differenziale* o calcolo *infinitesimale*

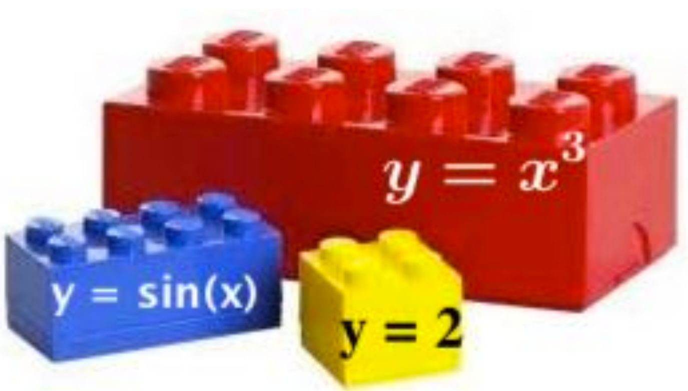
Come è organizzato il calcolo differenziale

Il calcolo differenziale studia le derivate.

Pensa alle tante funzioni che hai incontrato finora: calcolare il limite del rapporto incrementale per tutte queste funzioni sarebbe un lavoro lunghissimo!

Ecco invece il percorso molto più rapido che seguiremo:

1. **Calcolo le derivate di poche *funzioni elementari*.**
2. **Studio le regole dell'*Algebra delle derivate* per calcolare le derivate di tutte le funzioni ottenute da quelle elementari con procedimenti noti.**



Esempi di funzioni ottenute con 3 funzioni elementari

$$y = \frac{2\sin(x)}{x^3} \qquad y = 2x^3 + \sin(x)$$

Calcolare la derivata di funzioni elementari

Comincio subito a calcolare funzioni derivate di funzioni elementari.

Il procedimento di calcolo sarà sempre lo stesso:

1.Calcolo il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

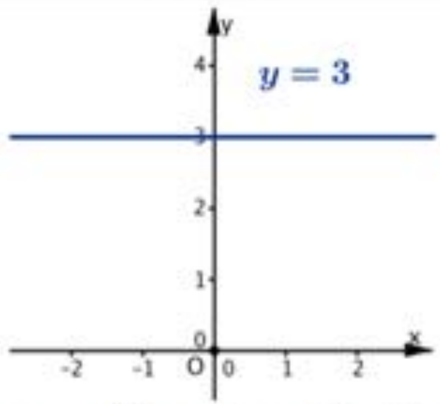
2. Calcolo il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

E ricorderò sempre di osservare la derivata come pendenza della retta tangente al grafico della funzione.

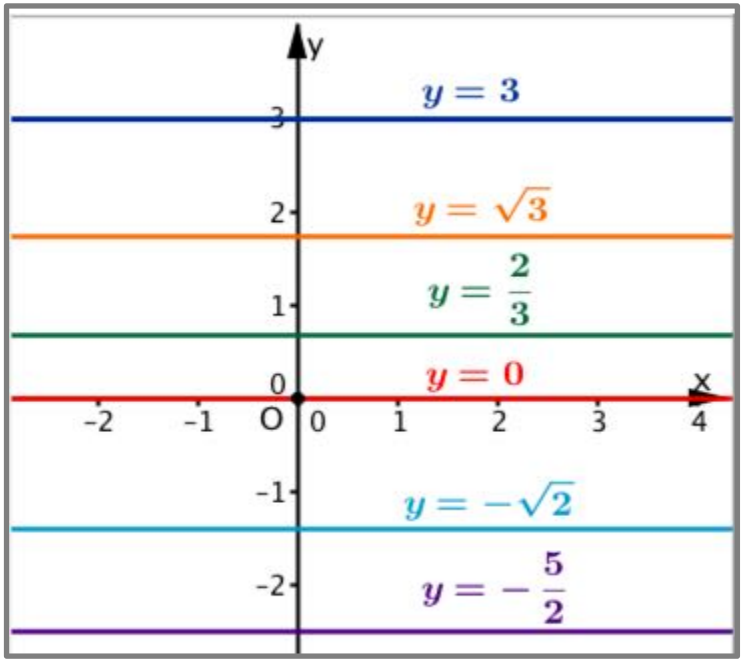
Derivata di *y = 3*

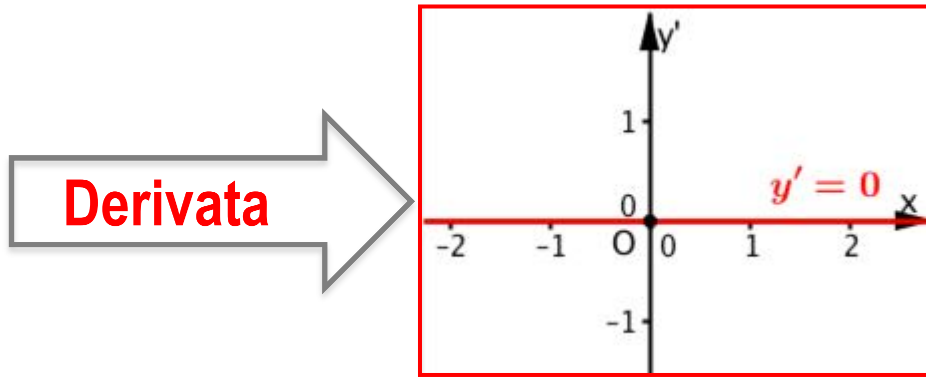
Comincio con funzioni semplici e ragiono con grafico e calcoli

Grafico	Calcoli
 Il grafico è una retta *r*, che coincide, in ogni punto, con la retta tangente. La retta *r* ha pendenza 0. La derivata dà la pendenza della tangente. Concludo che ***la derivata vale 0*** in ogni punto.	**1. Rapporto incrementale** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-3}{h} = 0 \quad \text{per } h \neq 0$ **2. Limite del rapporto incrementale** $\lim_{h \to 0} 0 = 0$ Quindi trovo $y' = 0$
La funzione y = 3 ha come derivata y' = 0	

Derivata di tutte le funzioni del tipo y = k

Posso ripetere gli stessi ragionamenti, a partire da tutte le altre funzioni che descrivono rette con pendenza 0. Ecco che cosa trovo.

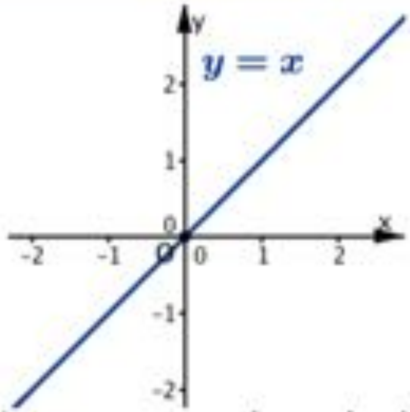




Le funzioni $y = -\frac{5}{2}$, $y = -\sqrt{2}$, $y = 0$, $y = \frac{2}{3}$, …, $y = k$

hanno tutte derivata $y' = 0$

La derivata di $y = x$

Grafico	Calcoli
 Il grafico è una retta s, che coincide, in ogni punto, con la retta tangente. La retta s ha pendenza 1 La derivata dà la pendenza della tangente. Perciò *la derivata vale* 1 in ogni punto.	**1. Rapporto incrementale** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x+h-x}{h} = \frac{h}{h} = 1 \text{ per } h \neq 0$ **2. Limite del rapporto incrementale** $\lim_{h \to 0} 1 = 1$ Quindi trovo $y' = 1$
La funzione $y = x$ ha come derivata $y' = 1$	

$y = x$ **ha come derivata** $y' = 1$

La derivata di $y = x^2$

La derivata di $y = x^2$

Rapporto incrementale

Quadrato del binomio
$(x+h)^2 = x^2 + 2hx + h^2$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\boxed{(x+h)^2} - x^2}{h} = \frac{\boxed{x^2 + 2hx + h^2} - x^2}{h} =$$

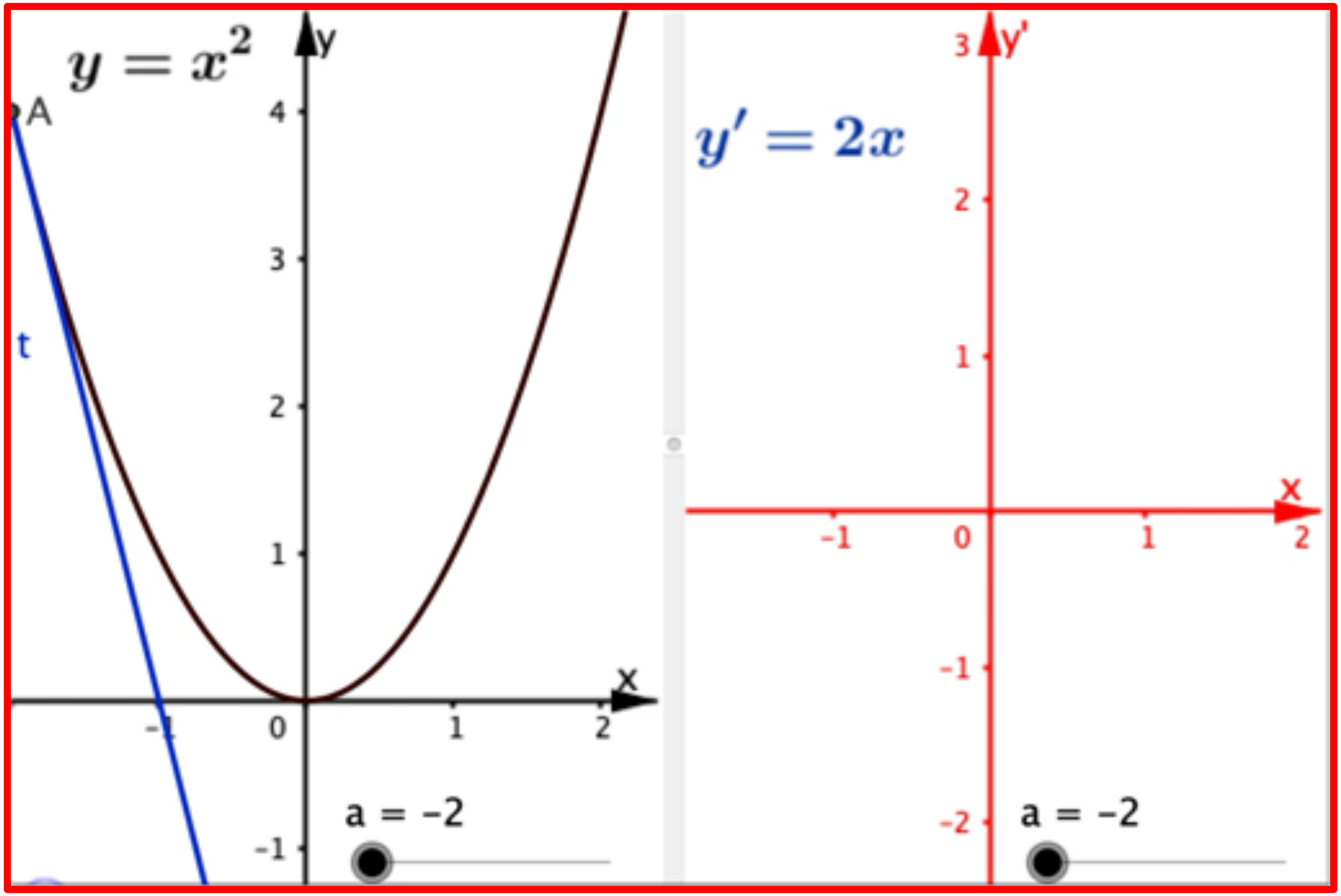
$$= \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h \quad \text{per } h \neq 0$$

Limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

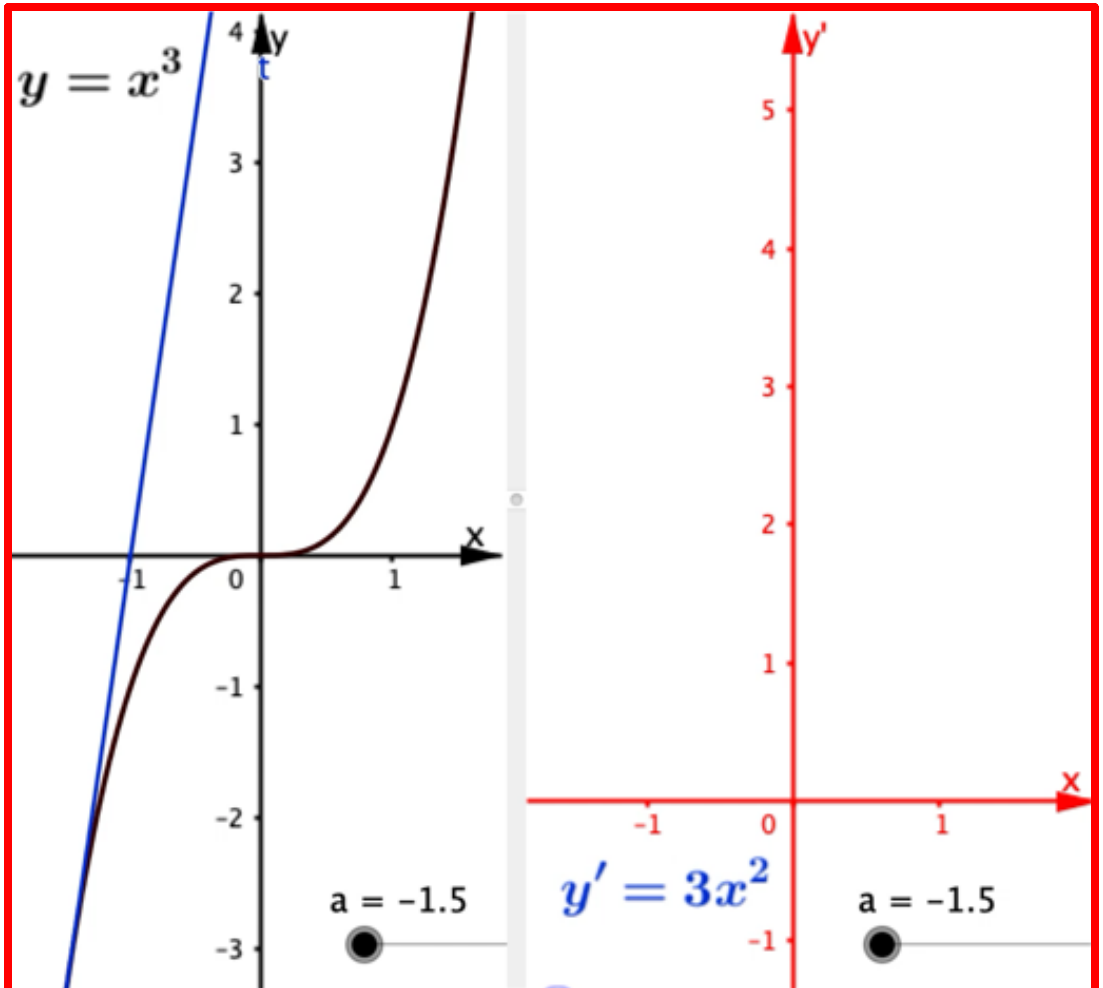
La derivata di $y = x^2$ è $y' = 2x$.

Video: $y = x^2$ e la sua derivata



Ho già trovato la derivata di y = x^3

La derivata di $y = x^3$ è $y' = 3x^2$



Derivate di funzioni del tipo $y = x^n$

I risultati suggeriscono una regola generale

Funzione	Esponente	Derivata	Esponente
$y = x^2$	2	$y' = 2x = 2x^1$	$1 = 2 - 1$
$y = x^3$	3	$y' = 3x^2$	$2 = 3 - 1$
$y = x^4$	4	$y' = 4x^3$	$3 = 4 - 1$
$y = x^n$	n	$y' = n\,x^{n-1}$	$n - 1$

Una funzione del tipo $y = x^n$ (con n numero naturale) ha come derivata $y' = nx^{n-1}$