Derivata in un punto. Esercizi

Problemi che conducono alle derivate

1. La velocità di una pallina lasciata cadere da una certa altezza nel vuoto varia secondo la legge

$$v=gt$$

Valuta l'accelerazione istantanea a della pallina, quando sono trascorsi 2″ dall'inizio del movimento.
(Calcolare prima di tutto l'accelerazione media del corpo in un piccolo intervallo di tempo, tenendo presente che risulta

$$a_m=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

dove

a_m *indica l'accelerazione media,*
Δv *indica la variazione di velocità,*
Δt *indica l'intervallo di tempo nel quale è avvenuta la variazione* Δv.

Considera come intervallo Δt *il tempo che intercorre fra 2 e 2+h secondi,*
L'accelerazione istantanea è il valore a cui tende l'accelerazione media, quando h tende a 0.

2. Indica un procedimento generale per calcolare in un dato istante c l'accelerazione istantanea a di un corpo che si muove con la velocità istantanea variabile secondo la legge $v=f(t)$.

3. Per determinare la portata di un fiume o di un tubo si procede così (fig. 1): si fissa l'attenzione su una sezione S del tubo (o del fiume) e si misura la massa d'acqua m che attraversa S al variare del tempo t; si considera quindi come **portata** p la rapidità con cui m varia al variare di t.
Indicare

- con $m=f(t)$ la legge con cui m varia al variare di t,
- con a un istante fissato.

Descrivere un procedimento per calcolare:

- la portata media p_m nell'intervallo di tempo da a ad $a+h$,
- la portata p all'istante $t=a$.

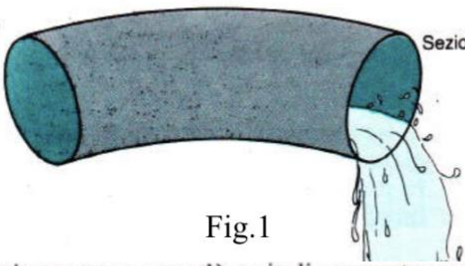


Fig.1

4. Gli elettroni liberi in un filo di rame si muovono caoticamente; non c'è quindi un moto ordinato lungo la direzione del filo. Se, invece, si collegano gli estremi del filo ad una batteria, in ogni punto del filo si stabilisce un campo elettrico, che imprime agli elettroni un moto ordinato lungo il filo. Perciò si trova che, attraverso una superficie S tagliata idealmente nel filo, passa una quantità di carica q variabile al variare del tempo t. La rapidità con cui q varia al variare del tempo t è chiamata **intensità di corrente** i.
Indicare

- con $q=f(t)$ la legge con cui q varia al variare di t,
- con a un istante fissato.

Descrivere un procedimento per calcolare:

- l'intensità media di corrente i_m nell'intervallo di tempo da a ad $a+h$,
- l'intensità di corrente i all'istante $t=a$.

5. Per studiare il decadimento radioattivo di una sostanza si può misurare la massa m della sostanza al variare del tempo t. La rapidità con cui m varia al variare del tempo t è chiamato **tasso di decadimento** r.
Indicare

- con $m=f(t)$ la legge con cui m varia al variare di t,
- con a un istante fissato.

Descrivere un procedimento per calcolare:

- il tasso medio di decadimento r_m nell'intervallo di tempo da a ad $a+h$,
- il tasso di decadimento r_m all'istante $t=a$.

6. In economia è spesso necessario analizzare l'andamento del costo C di produzione di una data merce (plastica, concimi chimici, ...) al variare della quantità q di merce prodotta.
In particolare, la rapidità con cui C varia al variare della quantità q è chiamata **costo marginale** c.
Indicare

- con $C=f(t)$ la legge con cui C varia al variare di q,
- con a una quantità di merce fissata.

Descrivere un procedimento per calcolare:

- il costo marginale medio c_m, quando la quantità q varia da a ad $a+h$,
- il costo marginale c, relativo alla quantità $q=a$.

7. In economia è spesso necessario analizzare l'andamento del profitto P che si ottiene vendendo una data merce (plastica, concimi chimici, ...) al variare della quantità q di merce venduta.
In particolare, la rapidità con cui P varia al variare della quantità q è chiamata **profitto marginale** p.
Indicare

- con $P=f(t)$ la legge con cui P varia al variare di q,
- con a una quantità di merce fissata.

Descrivere un procedimento per calcolare:

- il profitto marginale medio p_m, quando la quantità q varia da a ad $a+h$,
- il profitto marginale p, relativo alla quantità $q=a$.

Rapporto incrementale e derivata in un punto

Data una funzione $y = f(x)$ e un suo punto di ascissa $x = a$, ricorda che:

- il rapporto incrementale è $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- la derivata è: $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Calcola il rapporto incrementale e la derivata delle funzioni date negli esercizi da 8 a 11

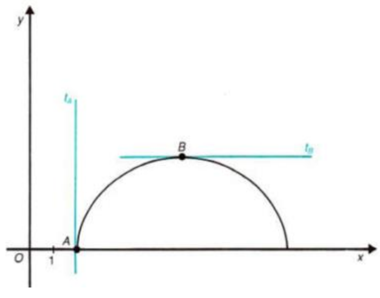
8. $y=x^2$, nel punto d'ascissa $x=2$.

9. $y=x^3$, nel punto d'ascissa $x=1$.

10. $y=\frac{1}{x}$, nel punto d'ascissa $x=1$.

11. $y=\frac{1}{x^2}$, nel punto d'ascissa $x=1$.

Funzioni non derivabili in un punto



12. Esamina il grafico nella figura fianco e stabilisci quali fra le seguenti affermazioni sono vere (**V**) e quali false (**F**).

a. La funzione non è derivabile nel punto B, perché la tangente è parallela all'asse delle x;__
b. La derivata della funzione nel punto B vale zero perché, la tangente è parallela all'asse delle x; __
c. La funzione non è derivabile nel punto A, perché la tangente è parallela all'asse delle y;__
d. La derivata della funzione nel punto A vale zero perché, la tangente è parallela all'asse delle y. __

13. Esamina la funzione $y = f(x)$ rappresentata nella figura qui sotto e scegli l'affermazione corretta

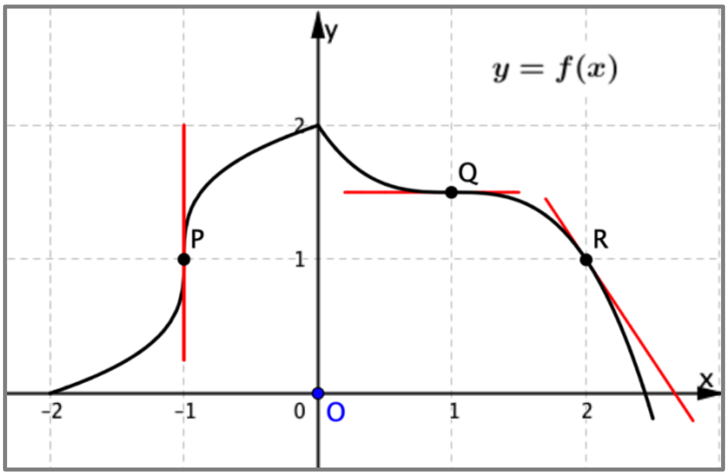
A. Nel punto R la derivata è positiva;
B. Nel punto R la derivata è negativa;
C. Nel punto R la derivata vale zero;
D. Nel punto R funzione non è derivabile.

14. Esamina la funzione $y = f(x)$ rappresentata nella figura qui sotto e scegli l'affermazione corretta

A. Nel punto Q la derivata è positiva;
B. Nel punto Q la derivata è negativa;
C. Nel punto Q la derivata vale zero;
D. Nel punto Q funzione non è derivabile.

15. Esamina la funzione $y = f(x)$ rappresentata nella figura qui sotto e scegli l'affermazione corretta

A. Nel punto P la derivata è positiva;
B. Nel punto P la derivata è negativa;
C. Nel punto P la derivata vale zero;
D. Nel punto P funzione non è derivabile.



16. È data una funzione $y = f(x)$ e il suo punto P di ascissa $x = 2$, scegli qui sotto l'affermazione corretta

A. Se risulta $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 0$, la funzione non è derivabile nel punto P.
B. Se risulta $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \infty$, la funzione non è derivabile nel punto P.
C. Se risulta $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \infty$, la tangente alla curva nel punto P è parallela all'asse x.
D. Se risulta $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 0$, la tangente alla curva nel punto P è parallela all'asse y.

17. È data una funzione $y = f(x)$ e un suo punto P di ascissa $x = 3$, scegli qui sotto l'affermazione corretta

A. Se risulta $\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = -5$, ottengo $f(3) = -5$.

B. Se risulta $\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = 1$, la tangente al grafico della funzione in P è parallela all'asse x

C. Se risulta $\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = -1$, la tangente al grafico della curva nel punto P è parallela alla retta d'equazione $y = -x$.

D. Se risulta $\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = 2$, ottengo $f'(2) = 3$.

18. È data una funzione $y = f(x)$ e un suo punto P di ascissa $x = 1$, scegli qui sotto l'affermazione corretta

A. Se risulta $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 0$, ottengo $f'(1) = 0$.

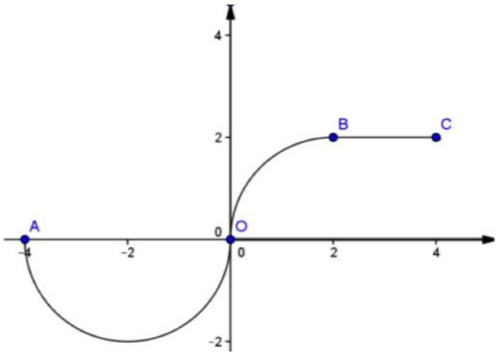
B. Se risulta $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \infty$, ottengo $f'(1) = \infty$

C. Se risulta $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 0$, ottengo $f(1) = 0$

D. Se risulta $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = -\sqrt{3}$, la funzione non è derivabile nel punto P.

19. La funzione $f(x)$ ha il grafico disegnato a lato, che passa per i punti A(–4, 0), O(0, 0), B(2, 2), C(4, 2) ed è formato da:

- la semicirconferenza di diametro AO;
- l'arco OB, quarto di circonferenza di raggio 2;
- il segmento BC.



Rispondi ai seguenti quesiti:

a. $f(x)$ è derivabile in A? SI NO

perché: ……………………………………………………………………………

b. $f(x)$ è derivabile in O? SI NO

perché: ……………………………………………………………………………

c. $f(x)$ è derivabile in B? SI NO

perché: ……………………………………………………………………………