Derivata in un punto

Enrico Pietropoli, 2022

Uno sguardo alla storia

Problemi aperti del XVII secolo:

Matematica. Si riusciva a tracciare la retta tangente in un punto solo di alcune curve e ogni curva richiedeva un particolare procedimento; mancava un metodo generale.

Fisica. Nel moto dei pianeti, dei proiettili, del pendolo, … la velocità varia: come valutare la velocità in un dato istante?

I due problemi sembrano non avere nulla in comune, ma **Newton** e **Leibniz** hanno trovato un procedimento per risolvere entrambi.

Newton
1642 - 1727

Leibniz
1646 - 1716

Enrico Pietropoli, 2022

Tre problemi che conducono alla derivata

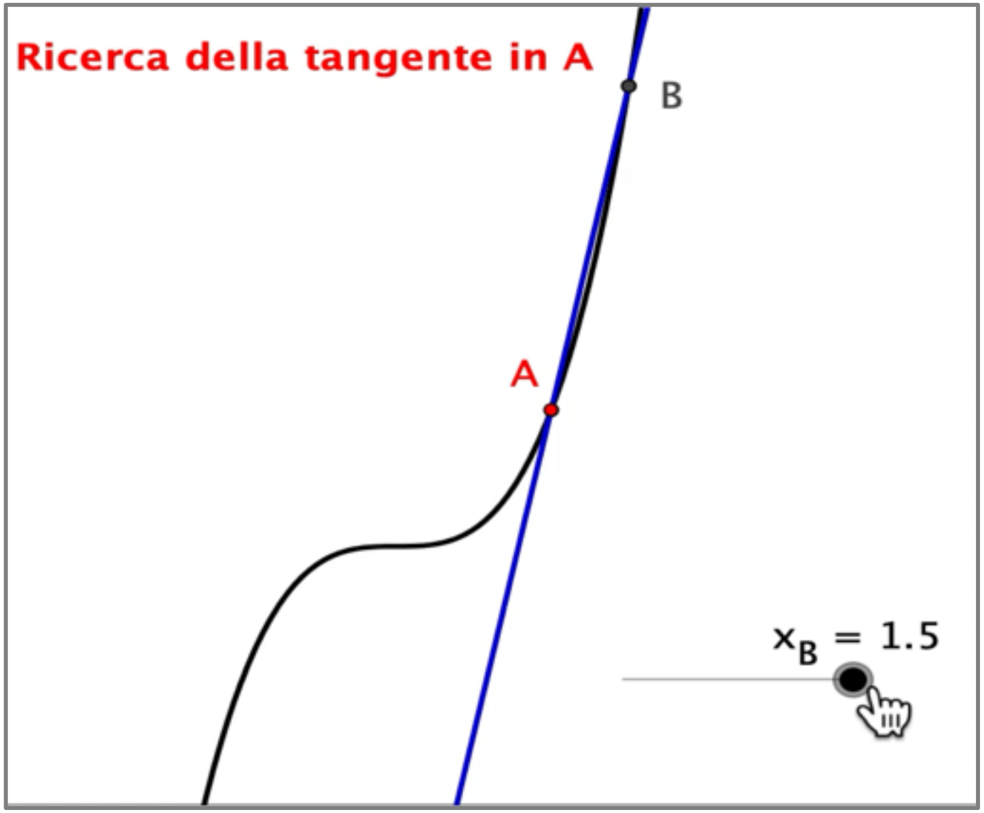
A. La retta tangente ad una curva
B. La velocità istantanea
C. La rapidità di crescita

A. La ricerca della retta tangente

La retta tangente *t* a una curva in un suo punto *A* è la retta che meglio approssima la curva in un intorno di *A*.

Penso *t* come posizione limite di una secante *s* che passa per *A* e un altro punto *B* della curva, quando B si avvicina ad A.

Video

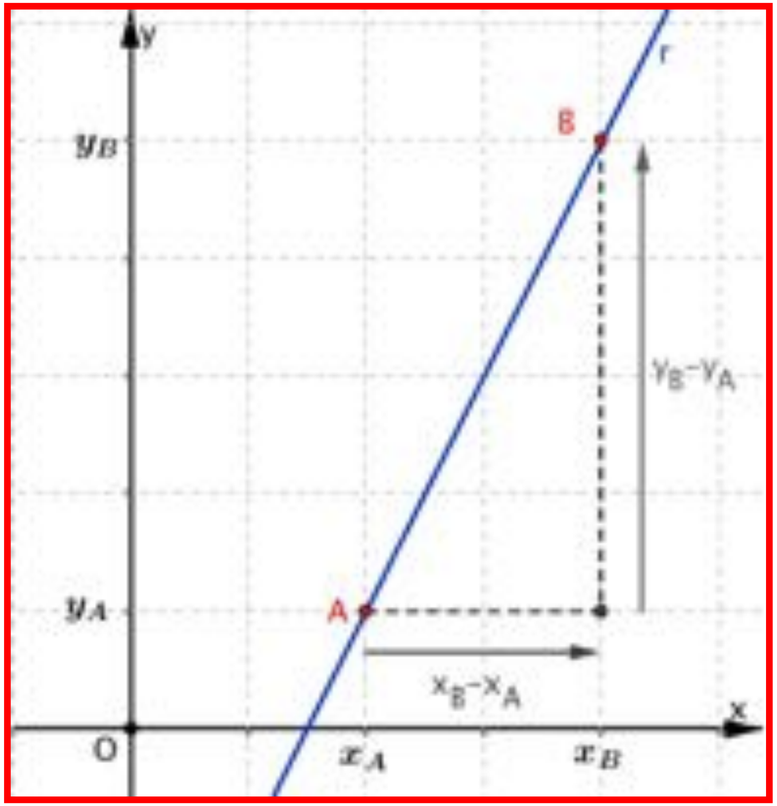


La pendenza di una retta

Newton e Leibniz puntano l'attenzione sulla pendenza della secante AB 'in movimento'.

Come si trova la pendenza m_r della retta *r* che passa per due punti A e B?

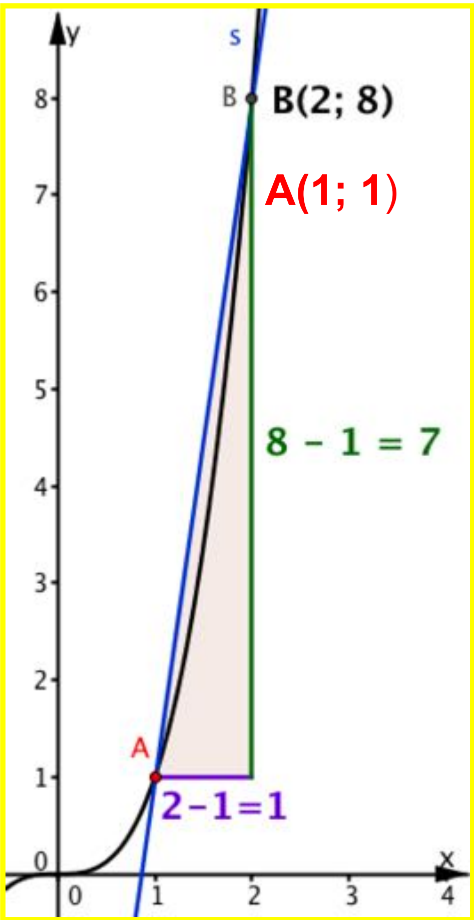
$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



Enrico Pietropoli, 2022

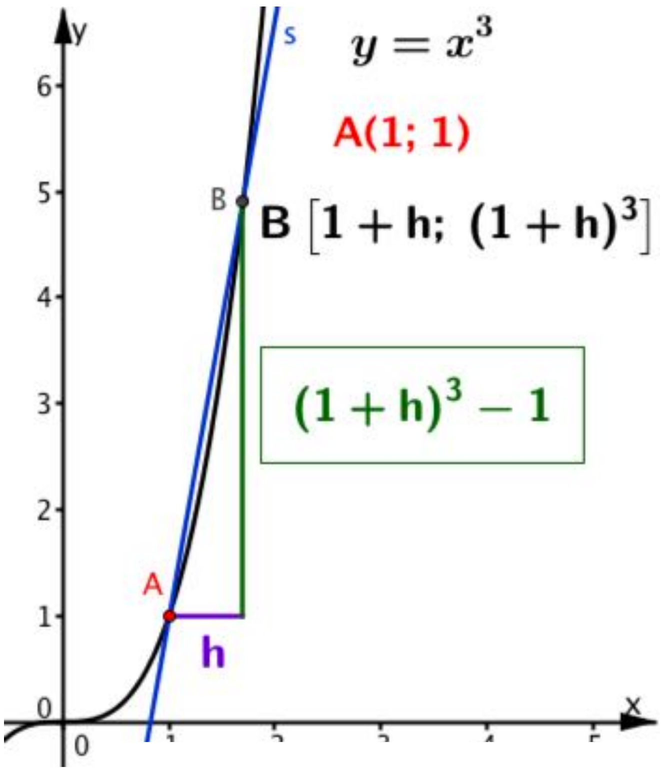
Funzione $y = x^3$ e pendenza della secante AB

Retta secante



$$m_s = \frac{7}{1} = 7$$

Retta secante ‘in movimento’



$$m_s = \frac{(1+h)^3 - 1}{h}$$

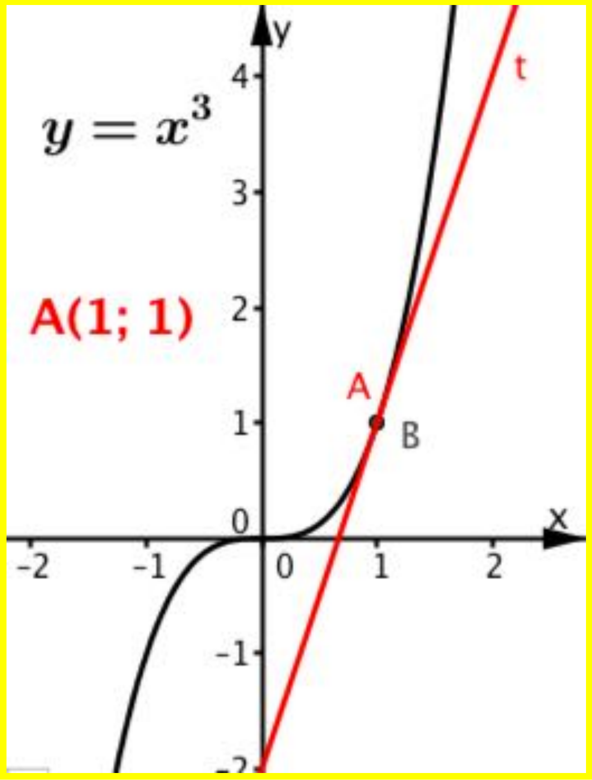
Dalla secante alla tangente

Per passare dalla secante alla tangente debbo avvicinare B ad A, questo vuol dire che *h* tende a 0.

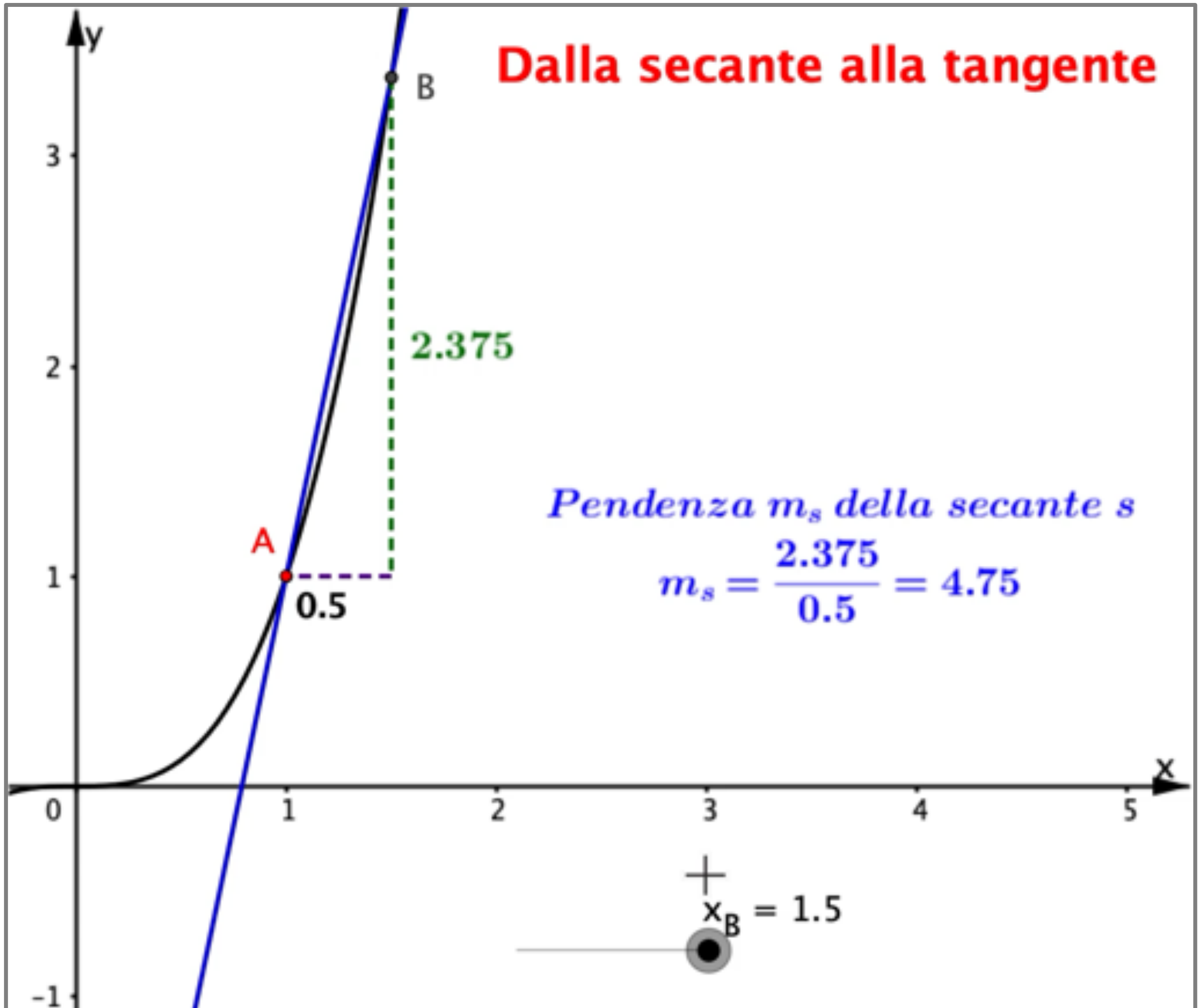
$$m_s = \frac{(1+h)^3 - 1}{h} = \frac{h^3 + 3h^2 + 3h}{h} =$$

$$= h^2 + 3h + 3$$

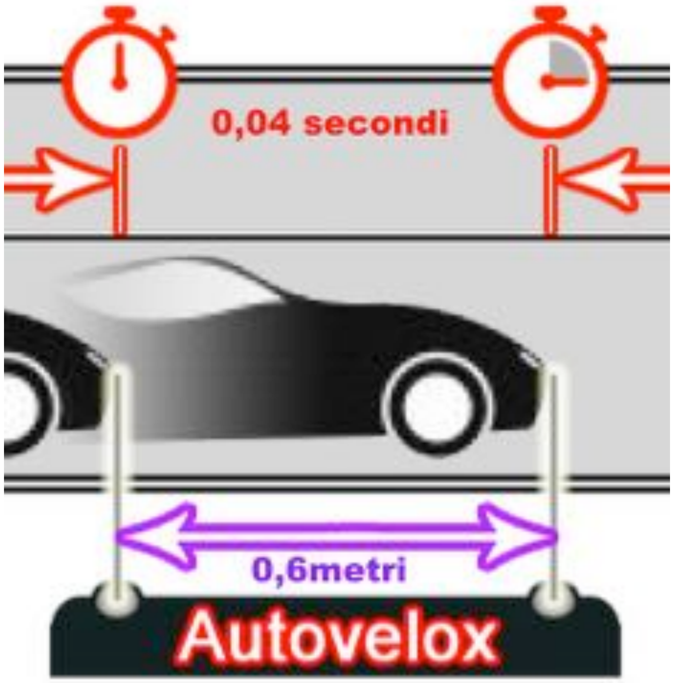
$$\boxed{m_t = \lim_{h \to 0}\left(h^2 + 3h + 3\right) = 3}$$



Dalla secante alla tangente video



B. Velocità media e velocità istantanea



Velocità misurata dall'autovelox

velocità = 0,6 : 0,04 = 15 m/s = 54 km/h

Velocità media calcolata in un piccolo intervallo di tempo.

La velocità media approssima la velocità dell'auto nell'istante in cui parte il cronometro.

B. Velocità istantanea di un pendolo

Un pendolo si muove secondo la legge $s = sin(t)$.
Ecco come ragiono per ottenere ottenere la velocità nell'istante in cui comincio a misurare il tempo, cioè all'istante $t = 0$.

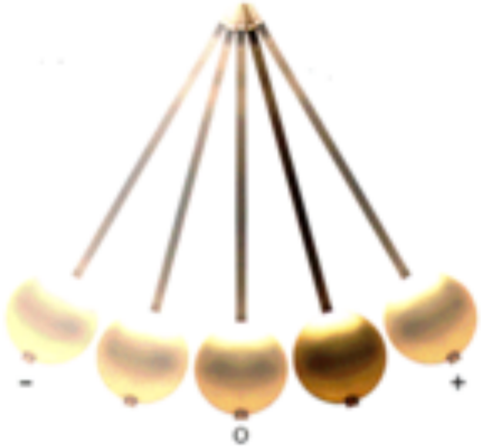
- Considero un piccolo intervallo di tempo lungo h, fra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 0 + h$.
- Calcolo la distanza percorsa dal pendolo nell'intervallo h, data da

  $\sin(0 + h) - \sin(0)$
- Calcolo la velocità media v_m data da

$$v_m = \frac{\sin(0+h)-\sin(0)}{h} = \frac{\sin(h)}{h}$$

- Per avere la velocità v all'istante richiesto calcolo:

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$



C. Rapidità istantanea di crescita

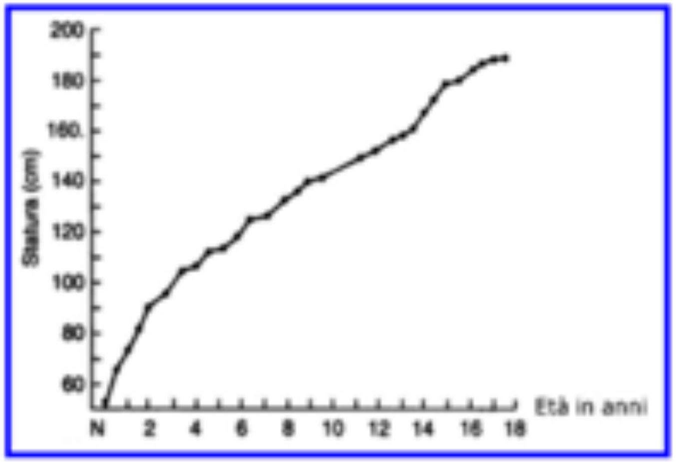
La curva rappresenta l'altezza y di un ragazzo al variare del tempo t.
So che y è funzione di t, ma non ho una formula per descrivere la curva.
Descrivo la funzione che lega y e t con la formula $y = f(t)$.
Ecco come descrivo la rapidità di crescita del ragazzo a 16 anni.

- Considero un piccolo intervallo di tempo lungo h, fra $t = 16$ e $t = 16 + h$.
- Calcolo la variazione di altezza nell'intervallo h, data da $f(16 + h) - f(16)$
- La rapidità media di crescita r_m è data da:

$$r_m = \frac{f(16+h) - f(16)}{h}$$

- La rapidità di crescita r a 16 anni è data da:

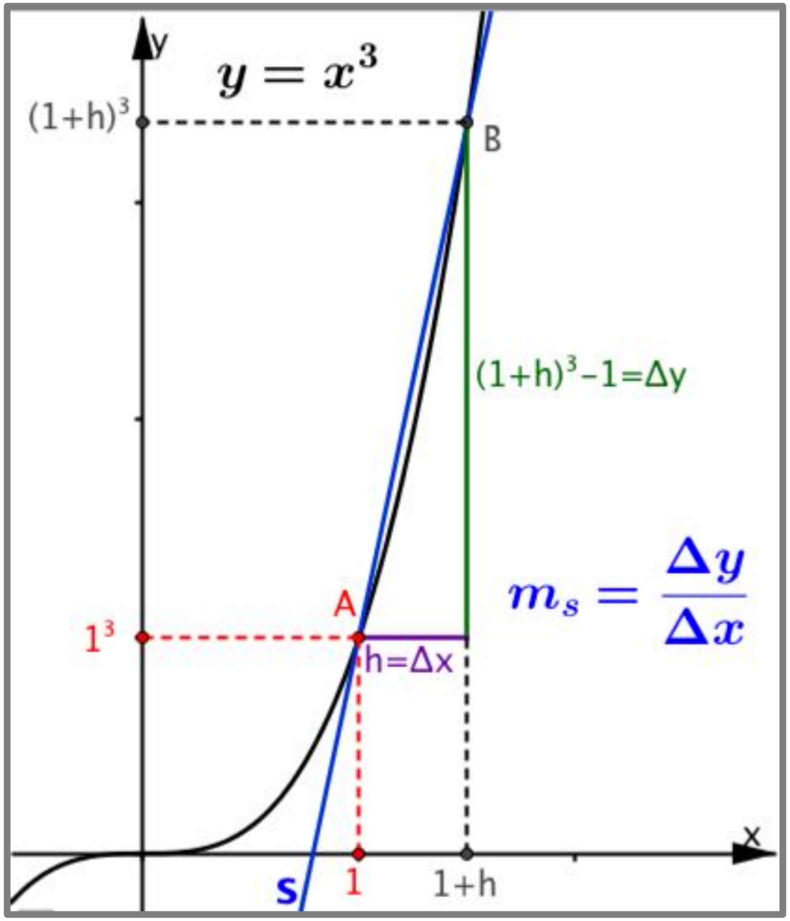
$$r = \lim_{h \to 0} \frac{f(16+h) - f(16)}{h}$$



Parole e simboli della matematica

Incremento: in matematica significa 'variazione'

ESEMPIO



Δx = incremento dell'ascissa

Δy = incremento dell'ordinata

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{rapporto incrementale}$$

Δy è una sigla che riassume la frase 'differenza delle ordinate'.

Δ è 'd maiuscola' greca

Un procedimento per risolvere tre problemi

Pendenza della tangente alla curva y = x^3 in x = 1	1. Pendenza m_s della secante $$m_s = \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h}$$	2. Pendenza m_t della tangente $$m_t = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3 - 1^3}{h}$$
Velocità del moto s = sin(t) in t =0	1. Velocità media v_m $$v_m = \frac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h}$$	2. Velocità istantanea v $$v = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h}$$
Rapidità di crescita di y = f(t) in t = 16	1. Rapidità media r_m di crescita $$r_m = \frac{f(16+h) - f(16)}{h}$$	2. Rapidità istantanea r di crescita $$r = \lim_{h\to 0}\frac{f(16+h) - f(16)}{h}$$
Procedimento per determinare la rapidità di variazione di una funzione $y = f(x)$ in $x = a$	1. Rapporto incrementale $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$	2. Limite per h→0 del rapporto incrementale $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Il centro del procedimento

Il limite per h che tende a 0 del rapporto incrementale

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Il risultato del limite dà la pendenza della tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ nel suo punto di ascissa $x = a$.

Quali risultati può avere questo limite?

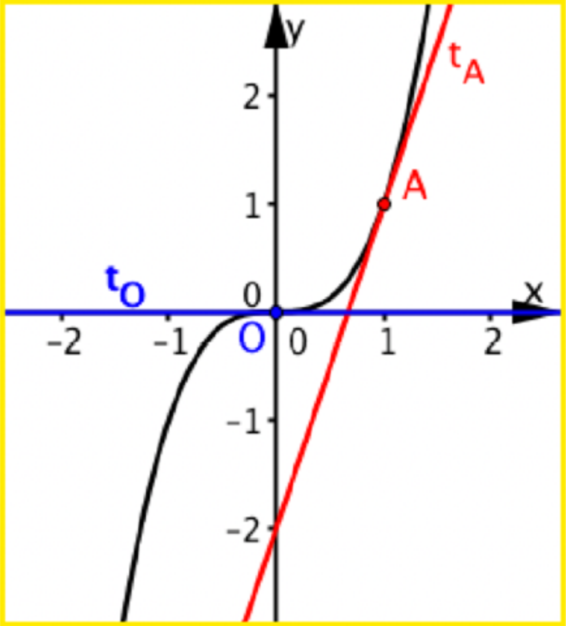
Esempi per riflettere

$$f(x) = x^3 \text{ in } x = 1$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h^3 + 3h^2 + 3h}{h} = h^2 + 3h + 3$$

$$\lim_{h \to 0}\left(h^2 + 3h + 3\right) = 3$$

3 = pendenza di t_A



$$f(x) = x^3 \text{ in } x = 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h^3}{h} = h^2$$

$$\lim_{h \to 0} h^2 = 0$$

0 = pendenza di t_O

Parole e simboli della matematica

Quando calcolo il limite del rapporto incrementale posso dunque trovare:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \ell \text{ (numero, che può essere 0)}$$

In questo caso il numero ℓ indica la rapidità di variazione; prende il nome di **derivata della funzione y = f(x) in x = a** e si indica col simbolo **f'(a).**

Si scrive quindi:

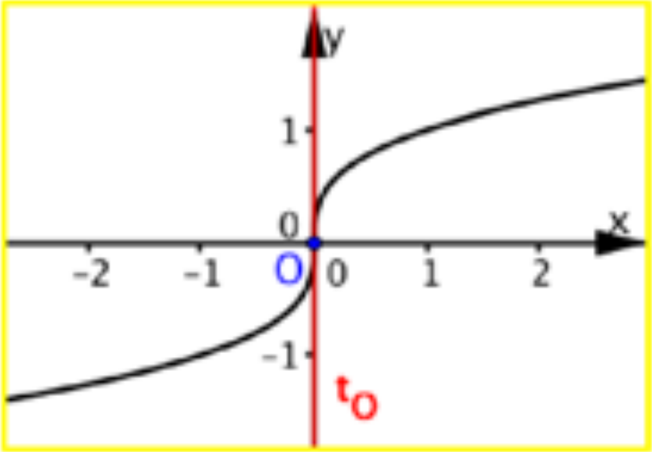
$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)}$$

Esempi per riflettere

$$f(x)=\sqrt[3]{x} \text{ in } x=0$$

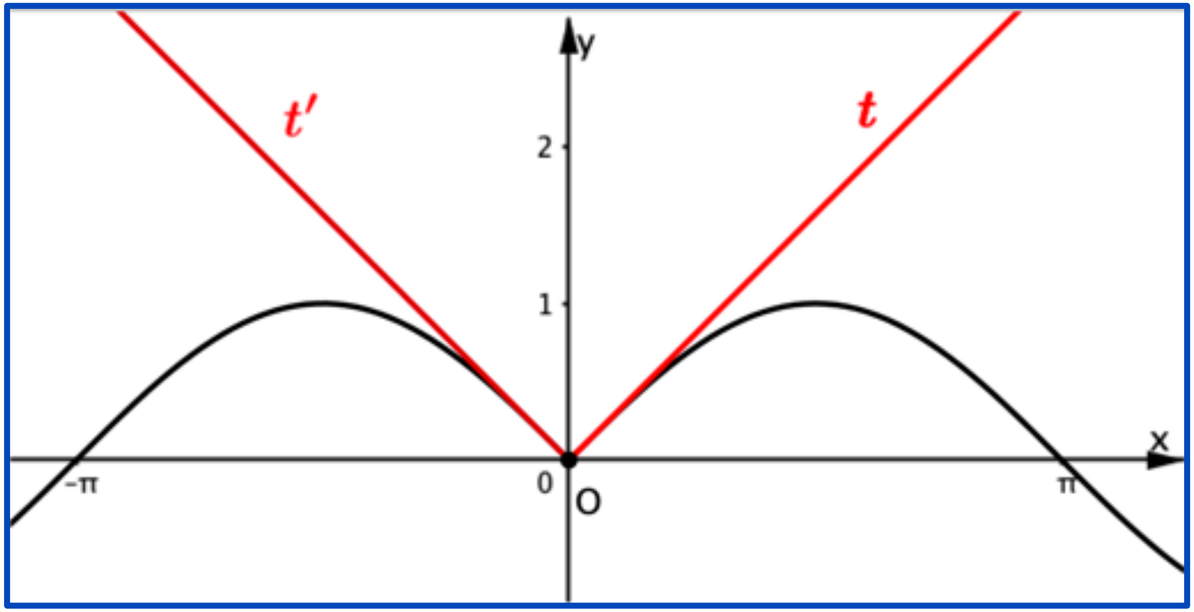
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{h}}{h}=\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}=\infty \Rightarrow f(x) \text{ non è derivabile in } x = 0$$



La tangente t_O è l'asse y, che non ha pendenza.

Un esempio grafico



La funzione non è derivabile in O(0, 0)

Nel punto O la curva ha due diverse tangenti: t a destra e t' a sinistra.

Il rapporto incrementale ha due limiti diversi quando h tende a 0 da destra o da sinistra.

Parole e simboli della matematica

Quando calcolo il limite del rapporto incrementale, posso anche trovare:

- $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ non esiste
- $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$

In questi casi si dice che la funzione non è derivabile nel punto di ascissa $x = a$.