Valori approssimati di un radicale

Approssimazioni per difetto e per eccesso

Rappresentando i numeri reali sulla retta, non si distinguono i numeri razionali da quelli irrazionali: un numero irrazionale è «circondato» da numeri razionali.

Per studiare i numeri razionali che «circondano» un irrazionale, consideriamo, per esempio, $\sqrt{2}$, numero per cui risulta:

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

Si può procedere allora nel modo seguente.

- Si esaminano i numeri interi e i loro quadrati e si trova:

Numeri n	Quadrati n^2
1	1
$\sqrt{2}$	2
2	4

Così si individuano i due numeri interi che «circondano» $\sqrt{2}$:

- 1, che è più piccolo e perciò approssima $\sqrt{2}$ *per difetto*;
- 2, che è più grande e perciò approssima $\sqrt{2}$ *per eccesso*.

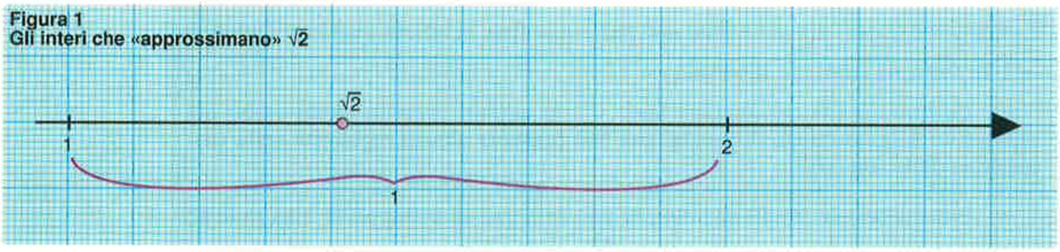


Figura 1
Gli interi che «approssimano» √2

Figura 2
I razionali che «approssimano» √2

Il numero $\sqrt{2}$ si trova dunque all'interno dell'intervallo delimitato dai numeri 1 e 2, intervallo che è ampio 1 (fig. 1).

- Si suddivide l'intervallo delimitato da 1 e 2 in 10 parti per «stringere» $\sqrt{2}$ con decimali con una cifra dopo la virgola; considerando i quadrati di questi numeri, si trova:

Numeri n	Quadrati n^2
1,4	1,96
$\sqrt{2}$	2
1,5	2,25

Si conclude dunque che:

- 1,4 approssima $\sqrt{2}$ *per difetto*;
- 1,5 approssima $\sqrt{2}$ *per eccesso*.

Così il numero $\sqrt{2}$ si trova all'interno dell'intervallo delimitato dai numeri 1,4 e 1,5, intervallo che è ampio 0,1 (fig. 2).

E ora si può continuare, dividendo l'intervallo delimitato da 1,4 e 1,5 in dieci parti uguali e così via (fig. 3); fermandosi, per esempio, alla quarta cifra dopo la virgola, si ottengono le approssimazioni di $\sqrt{2}$ elencate nella tabella A.

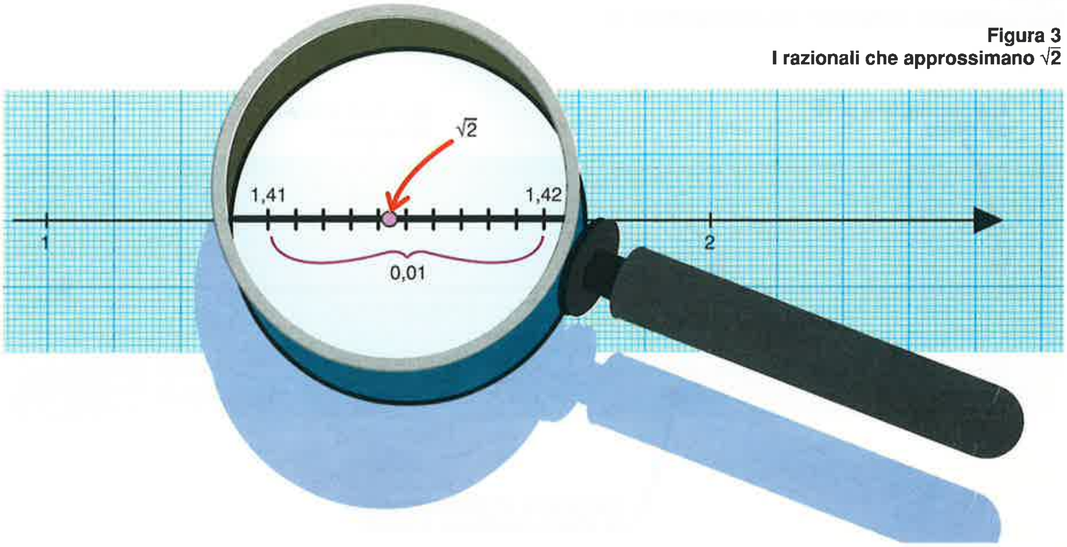
Due successioni di numeri razionali che approssimano un irrazionale

Si trovano così due successioni di numeri razionali che approssimano il numero irrazionale $\sqrt{2}$:

Tabella A
Le approssimazioni di $\sqrt{2}$

Per difetto		Per eccesso	Intervallo
1	$\sqrt{2}$	2	1
1,4	$\sqrt{2}$	1,5	0,1
1,41	$\sqrt{2}$	1,42	0,01
1,414	$\sqrt{2}$	1,415	0,001
1,4142	$\sqrt{2}$	1,4143	0,0001

Figura 3
I razionali che approssimano $\sqrt{2}$



- una successione che approssima $\sqrt{2}$ per difetto (prima colonna della tabella A);
- una successione che approssima $\sqrt{2}$ per eccesso (terza colonna della tabella A).

Queste due successioni presentano delle particolari proprietà, fra le quali si segnalano le seguenti (fig. 4):

1. i numeri che approssimano per difetto vanno aumentando, mentre i numeri che approssimano per eccesso vanno diminuendo;
2. aumentando il numero di cifre dopo la virgola, diventa sempre più piccolo l'intervallo fra un'approssimazione per eccesso e quella per difetto.

Il numero irrazionale $\sqrt{2}$ rimane quindi «stretto» fra due successioni di numeri razionali che possono avvicinarsi a $\sqrt{2}$ quanto si vuole, senza però riuscire a raggiungerlo.
E così non sarà certo la matita o l'occhio che potranno distinguere sulla retta il numero irrazionale $\sqrt{2}$ dai numeri razionali 1,4142135 e 1,4142136 che lo circondano: solo con il pensiero si può immaginare questo «foro invisibile» che rimane fra le due successioni di numeri razionali, «foro» che viene riempito con il numero irrazionale $\sqrt{2}$.
Le considerazioni ora svolte hanno carattere generale e possono essere ripetute a partire da altri numeri irrazionali come $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$, suggerendo la seguente conclusione: *ci si può avvicinare quanto si vuole a un numero irrazionale con due successioni di numeri razionali.*

Verifiche

Conoscenze

① Spiegare il significato della frase seguente: «1,4 approssima $\sqrt{2}$ per difetto».

② Spiegare il significato della frase seguente: «1,5 approssima $\sqrt{2}$ per eccesso».

Comprensione

① Esporre il procedimento seguito nel testo per approssimare $\sqrt{2}$ con due successioni di numeri razionali.

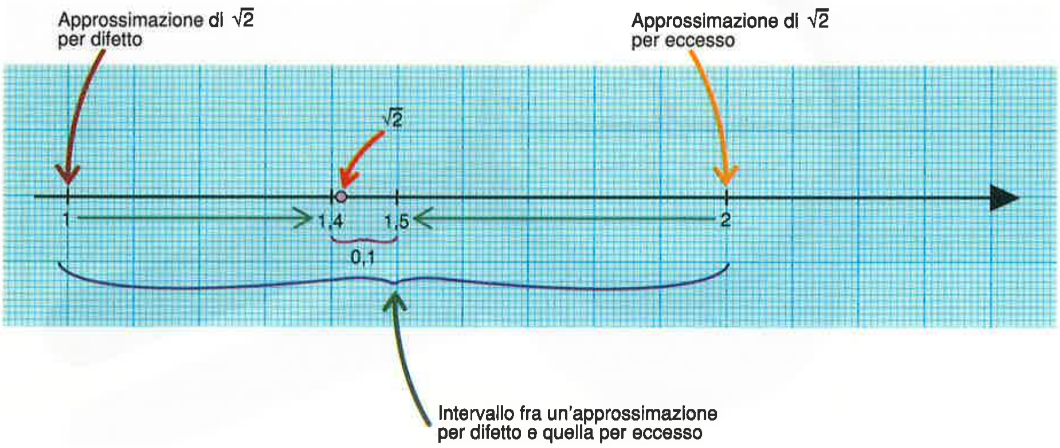
Applicazioni

① Approssimare $\sqrt{2}$ con i due numeri decimali con cinque cifre dopo la virgola.

② Costruire due successioni di numeri razionali che approssimano $\sqrt{3}$ per difetto e per eccesso.

③ Costruire due successioni di numeri razionali che approssimano $\sqrt[3]{4}$ per difetto e per eccesso.

Figura 4
Due successioni di razionali che approssimano $\sqrt{2}$



Esercizi sui valori approssimati di un radicale

Valori approssimati e intervallo di errore

1. Esaminare la disuguaglianza:

$$2{,}2<\sqrt{5}<2{,}3$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. indicare il numero reale che viene approssimato;
b. indicare il valore approssimato per difetto e quello approssimato per eccesso;
c. determinare l'intervallo d'errore, spiegando il procedimento seguito.

2. Ripetere l'esercizio 1 a partire dalle seguenti disuguaglianze:

$2{,}6<\sqrt{7}<2{,}7$ $\quad$ $2{,}64<\sqrt{7}<2{,}65$ $\quad$ $2{,}645<\sqrt{7}<2{,}646$

3. Ripetere l'esercizio 1 a partire dalle seguenti disuguaglianze:

$1{,}7<\sqrt[3]{5}<1{,}8$ $\quad$ $1{,}70<\sqrt[3]{5}<1{,}71$ $\quad$ $1{,}709<\sqrt[3]{5}<1{,}710$

4. Dopo aver svolto l'esercizio 3, risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché 1,7 e 1,70 sono due diversi valori approssimati di $\sqrt[3]{5}$;
b. spiegare perché 1,71 e 1,710 sono due diversi valori approssimati di $\sqrt[3]{5}$.

5. Valersi della calcolatrice per scrivere i seguenti valori approssimati

a. per eccesso e per difetto di $\sqrt{10}$ con intervallo d'errore 1;
b. per eccesso e per difetto di $\sqrt{10}$ con intervallo d'errore 0,1;
c. per eccesso e per difetto di $\sqrt{10}$ con intervallo d'errore 0,01.

6. Valersi della calcolatrice per scrivere i seguenti valori approssimati

a. per eccesso e per difetto di $\sqrt[3]{10}$ con intervallo d'errore 1;
b. per eccesso e per difetto di $\sqrt[3]{10}$ con intervallo d'errore 0,1;
c. per eccesso e per difetto di $\sqrt[3]{10}$ con intervallo d'errore 0,01.

Sulla propagazione degli errori

7. Sono dati i seguenti valori approssimati di $\sqrt{3}$ e $\sqrt{12}$:

$1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8$ $\quad$ $3{,}4<\sqrt{12}<3{,}5$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. indicare l'intervallo d'errore scelto;
b. addizionare i valori approssimati assegnati e determinare l'intervallo d'errore della somma;
c. moltiplicare i valori approssimati assegnati e determinare l'intervallo d'errore del prodotto.

8. Ripetere l'esercizio 7 a partire dai seguenti valori approssimati

$1{,}73<\sqrt{3}<1{,}74$ $\qquad$ $3{,}46<\sqrt{12}<3{,}47$

9. Ripetere l'esercizio 7 a partire dai seguenti valori approssimati

$1{,}7<\sqrt[3]{5}<1{,}8$ $\qquad$ $2{,}9<\sqrt[3]{25}<3$

10. Ripetere l'esercizio 7 a partire dai seguenti valori approssimati

$1{,}70<\sqrt[3]{5}<1{,}71$ $\qquad$ $2{,}92<\sqrt[3]{25}<2{,}93$

11. Le dimensioni di un rettangolo sono lunghe $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ e vengono approssimate con un intervallo d'errore ampio 0,1. Risolvere i seguenti quesiti:
a. determinare l'intervallo d'errore del semiperimetro p del rettangolo;
b. determinare l'intervallo d'errore dell'area S del rettangolo;
c. spiegare perché i due intervalli non sono uguali.

12. Determinare l'intervallo d'errore che si ottiene addizionando tre numeri.

13. Determinare l'intervallo d'errore che si ottiene moltiplicando due numeri uguali.

14. Si vuole determinare il valore approssimato di una somma di due numeri con un intervallo d'errore k; come si può scegliere l'intervallo d'errore dei singoli addendi?

15. Si vuole determinare il valore approssimato di un prodotto con un intervallo d'errore k; come si può scegliere l'intervallo d'errore dei singoli fattori?

Teoria ed esercizi tratti dal testo fuori catalogo
E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti
'Matematica oggi' vol.2