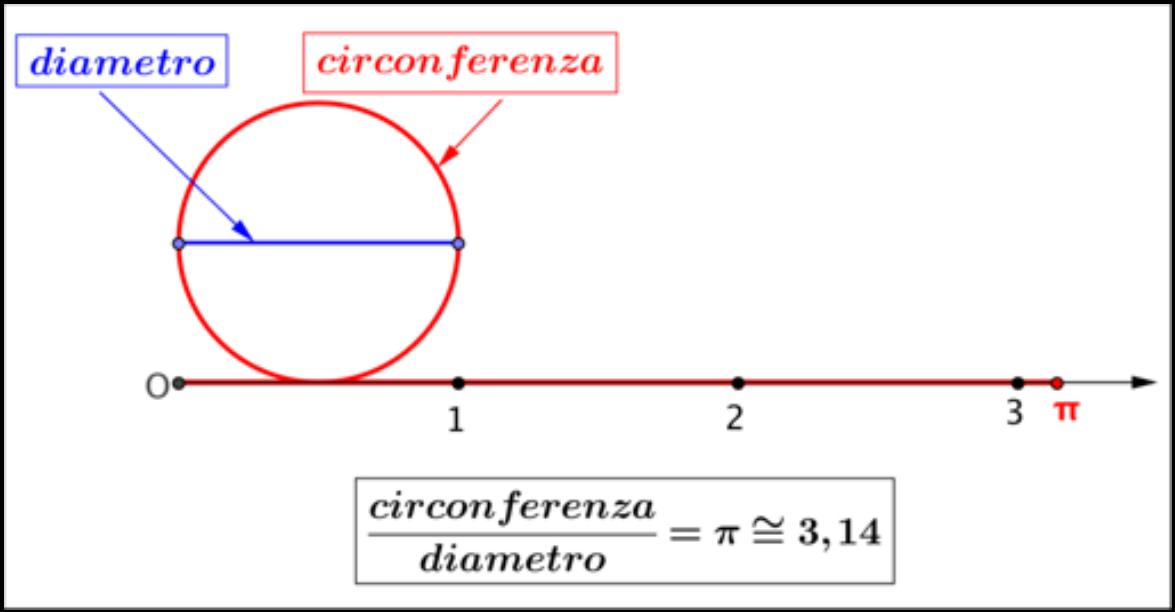
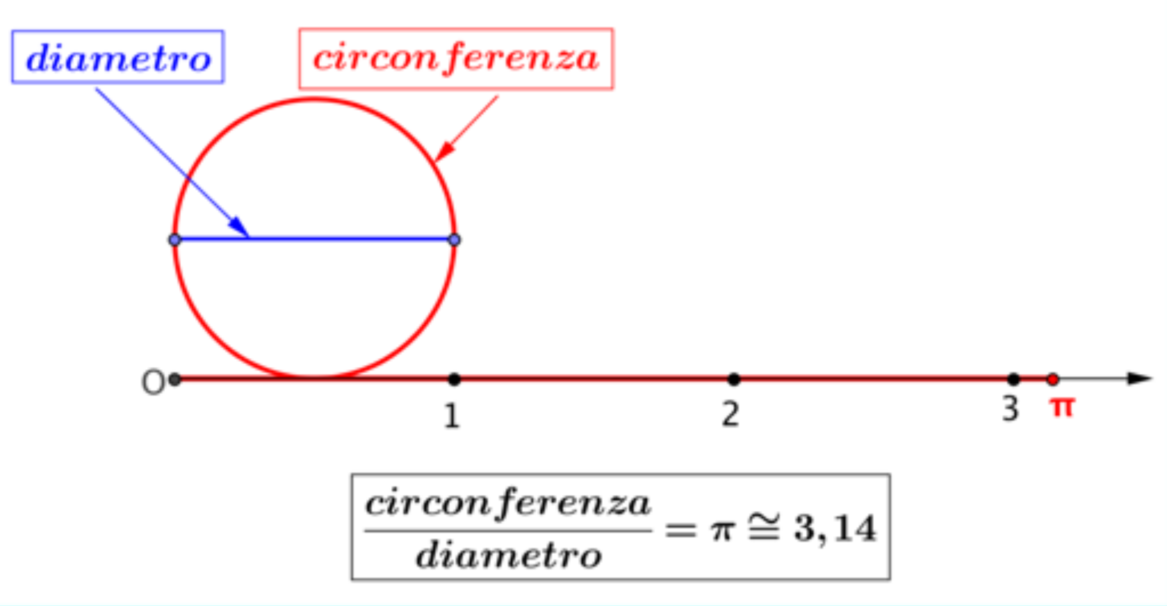
I numeri reali



Numeri irrazionali

I numeri irrazionali non provengono solo dall'estrazione di radice; ad esempio è irrazionale anche il numero indicato con il simbolo π, che esprime il rapporto fra circonferenza e diametro.



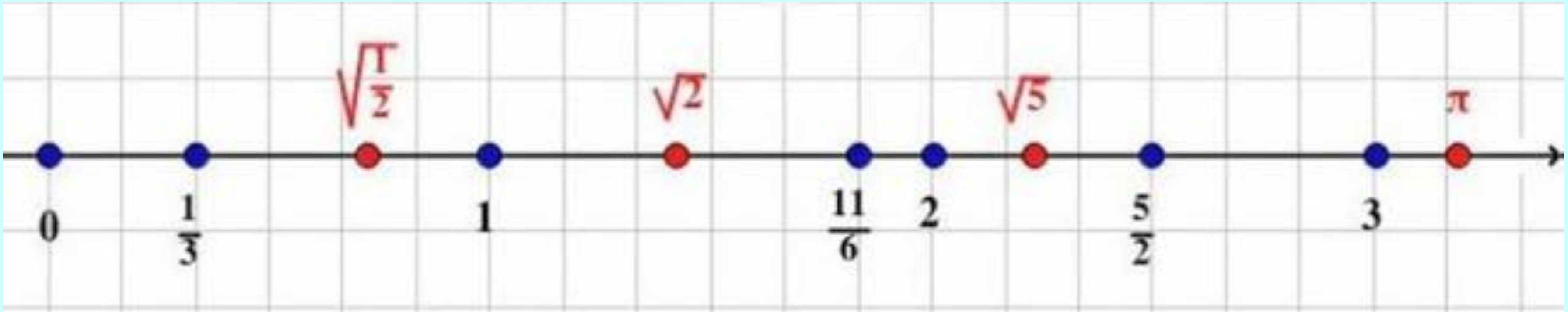
π è un *numero irrazionale*, perciò non può essere scritto esattamente con un numero decimale finito.

3,14 è un valore decimale approssimato di π

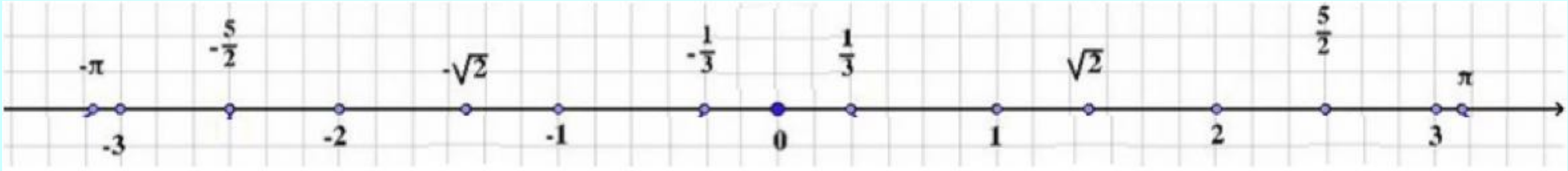
Daniela Valenti, 2021

Numeri razionali e irrazionali sulla retta

I numeri irrazionali trovano posto sulla retta



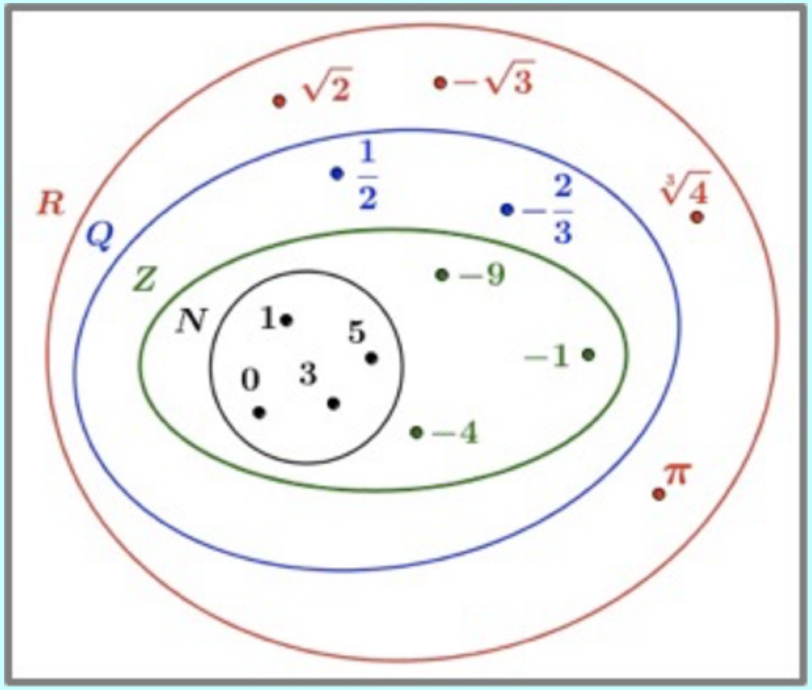
E sulla retta trovo anche gli opposti di questi numeri



Numeri razionali e irrazionali trovano tutti posto sulla retta e formano un unico insieme: l'insieme *dei numeri reali*

L'insieme R dei numeri reali

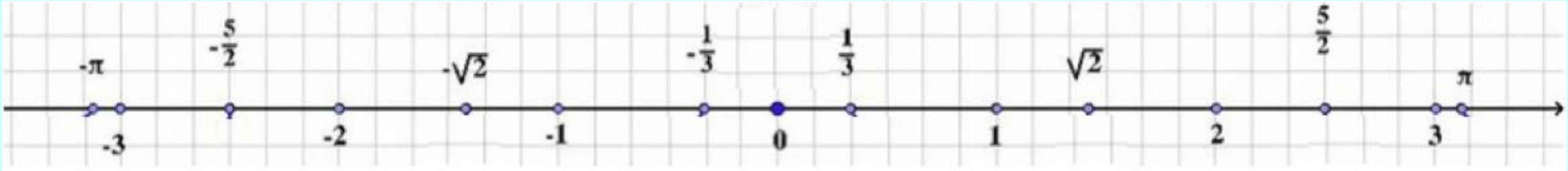
Ecco una figura per 'ritrovare', fra i numeri reali, i numeri razionali, interi e naturali.



La figura ricorda che:

- *N* è contenuto in *Z*, cioè i numeri naturali sono particolari numeri interi;
- *Z* è contenuto in *Q*, cioè i numeri interi sono particolari numeri razionali;
- *Q* è contenuto in *R*, cioè i numeri razionali sono particolari numeri reali.

L'insieme dei numeri reali è ordinato



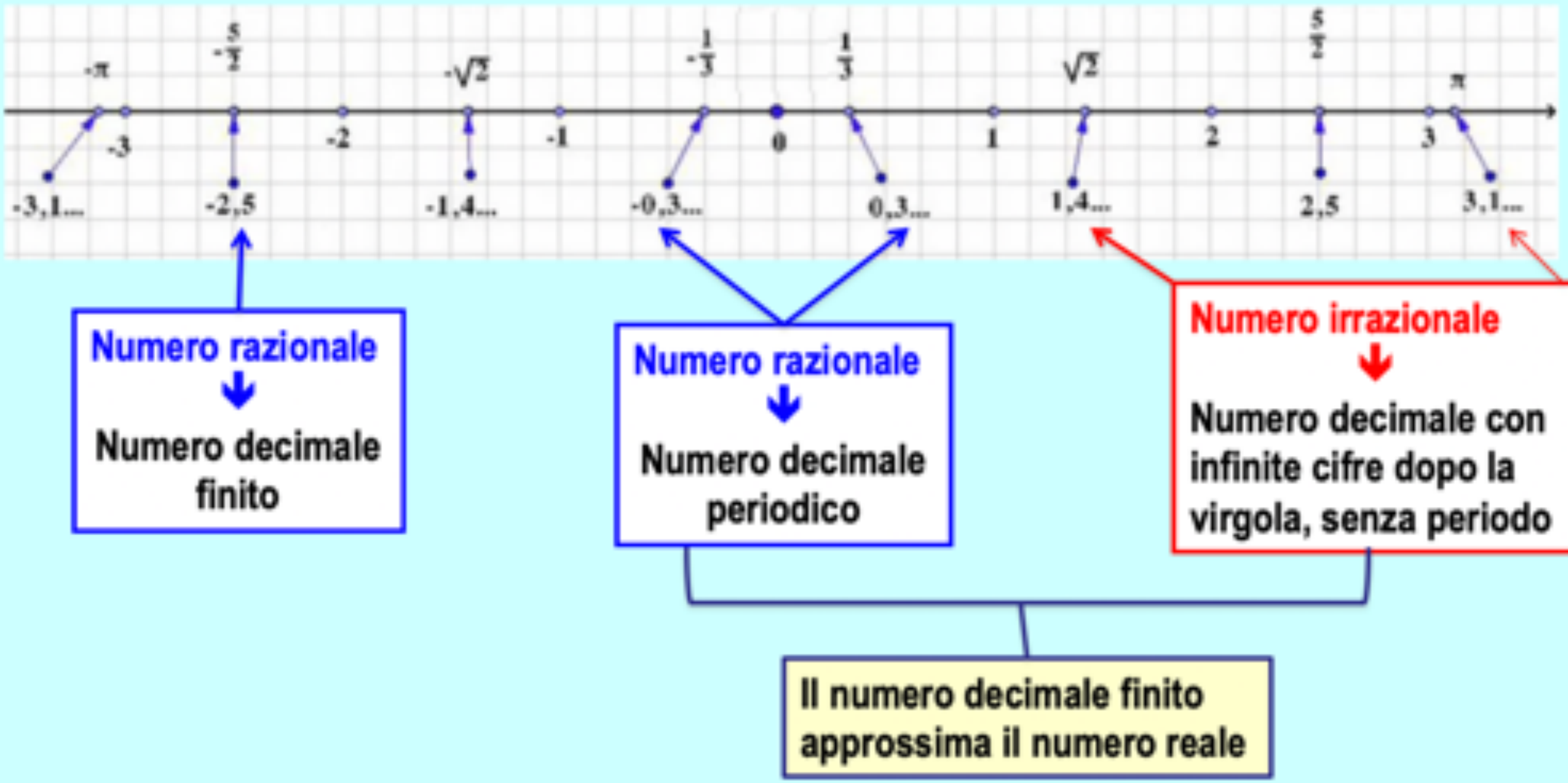
La rappresentazione sulla retta mostra i numeri reali in fila sulla retta uno dopo l'altro, perciò posso sempre stabilire quale viene prima e quale dopo. Ad esempio la retta mostra che risulta:

$$\frac{1}{3} < \sqrt{2} < \frac{5}{2} < \pi$$

Ma la rappresentazione sulla retta richiede tempo e un disegno accurato; più rapido è il procedimento di confrontare numeri reali scritti in forma decimale.

Scrivere un numero reale in forma decimale

Una sintesi dei casi che si possono presentare



Ordinare numeri reali scritti in forma decimale

Esempio.

Scrivere in ordine crescente i seguenti numeri

$$\frac{8}{5} \quad \frac{5}{3} \quad \sqrt{3} \quad \sqrt[3]{4} \quad \sqrt[4]{7}$$

Scrittura in forma decimale

A. Una cifra decimale	B. Due cifre decimali
$\frac{8}{5}=1{,}6$	$\frac{8}{5}=1{,}60$
$\frac{5}{3}\cong 1{,}6$	$\frac{5}{3}\cong 1{,}67$
$\sqrt{3}\cong 1{,}7$	$\sqrt{3}\cong 1{,}73$
$\sqrt[3]{4}\cong 1{,}6$	$\sqrt[3]{4}\cong 1{,}59$
$\sqrt[4]{7}\cong 1{,}6$	$\sqrt[4]{7}\cong 1{,}63$

Sono necessarie due cifre decimali per scrivere in ordine i numeri dati

$$\sqrt[3]{4}<\frac{8}{5}<\sqrt[4]{7}<\frac{5}{3}<\sqrt{3}$$

Per confrontare numeri reali scritti in forma decimale bisogna scrivere, dopo la virgola, le cifre necessarie per distinguere un numero dall'altro.

Operazioni con numeri reali

Arrivo a considerare solo 3 operazioni:

1.Elevazione a potenza

perché l'estrazione di radice diventa potenza ad esponente frazionario:

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$$

2.Moltiplicazione

perché la divisione diventa moltiplicazione per l'inverso:

$$3:2 = 3\cdot\frac{1}{2}$$

3.Addizione

perché la sottrazione diventa addizione con l'opposto.

$$3-2 = 3+(-2)$$

Daniela Valenti, 2021

Calcolare espressioni con numeri reali

Estendo ai numeri reali priorità e ordine delle operazioni valide per i numeri razionali

A. Espressioni con una sola operazione

In espressioni con una sola operazione applicata a tre o più numeri, eseguo i calcoli nell'ordine in cui sono scritti, da sinistra verso destra.

B. Priorità delle operazioni

In espressioni con addizioni, moltiplicazioni e potenze eseguo le operazioni in questo ordine:

1. **Elevazioni a potenza;**
2. **Moltiplicazioni;**
3. **Addizioni.**

C. Uso le parentesi per cambiare l'ordine stabilito.

Daniela Valenti, 2021

Proprietà delle operazioni

Estendo ai numeri reali le proprietà di addizione e moltiplicazione valide per i numeri razionali.

Proprietà	Addizione	Moltiplicazione
Commutativa	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
Associativa	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
Elemento neutro	*0 è l'elemento neutro* $a+0=a$	*1 è l'elemento neutro* $a\cdot 1=a$
Elemento assorbente	*L'addizione **non** ha elemento assorbente*	*0 è l'elemento assorbente* $a\cdot 0=0$
Opposto	*Dato **a**, si trova **–a** tale che* $-a+a=0$	
Inverso (o reciproco)		*Dato **a diverso da 0**, si trova* $\frac{1}{a}$ *tale che* $\frac{1}{a}\cdot a=1$
Distributiva	$a(b+c)=ab+ac$	

Domanda: rimangono delle operazioni che non posso eseguire con i numeri reali?

Non posso dividere per 0 perché nei numeri reali non trovo il reciproco di 0

Numero reale *a*	3	$\sqrt{2}$	$-\sqrt[3]{4}$	π	0
Reciproco $\frac{1}{a}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$\frac{1}{\pi}$	*NON ESISTE x tale che* $0 \cdot x = 1$

Daniela Valenti, 2021

E rimangono altre operazioni che non posso eseguire con i numeri reali?

Radici quadrate e numeri negativi

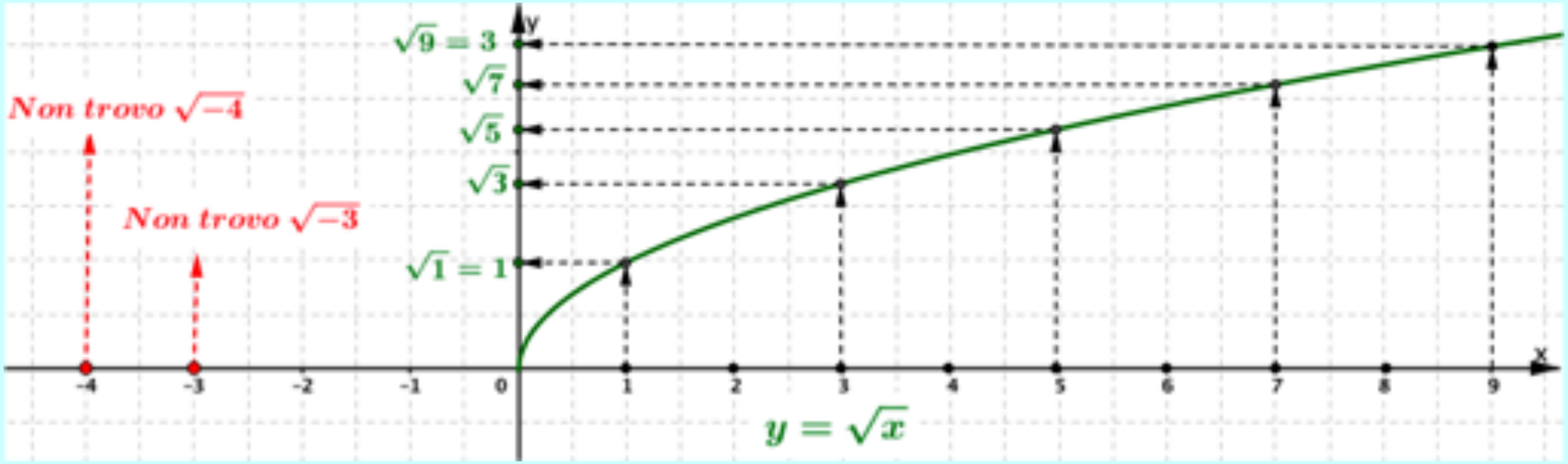
Problema storico

Già gli antichi babilonesi calcolano radici quadrate, ma solo durante il 1600 i matematici europei lavorano stabilmente con i numeri negativi.

Come accordare le ‘antiche’ radici quadrate con i ‘nuovi’ numeri negativi?


L ALGEBRA
PARTE MAGGIORE
DELL'ARIMETICA
DIVISA IN TRE LIBRI
DI RAFAEL BOMBELLI
DA BOLOGNA.
Nouamente poſta in luce.
IN BOLOGNA
Nella ſtamperia di Giouanni Roſsi
M D L X X I I.
Con Licentia delli RR. VV. del Veſc. & Inquiſit.

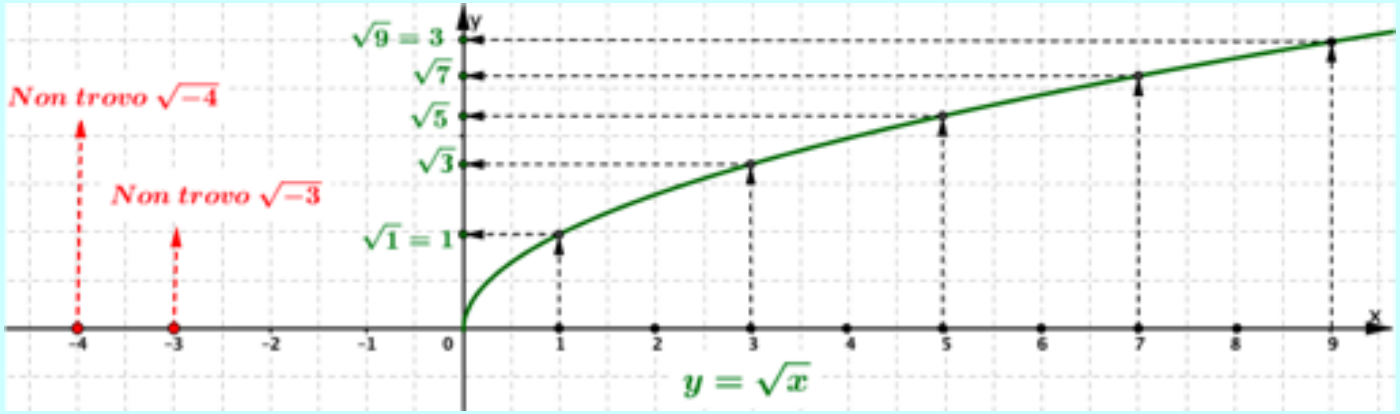
Radici quadrate di numeri negativi

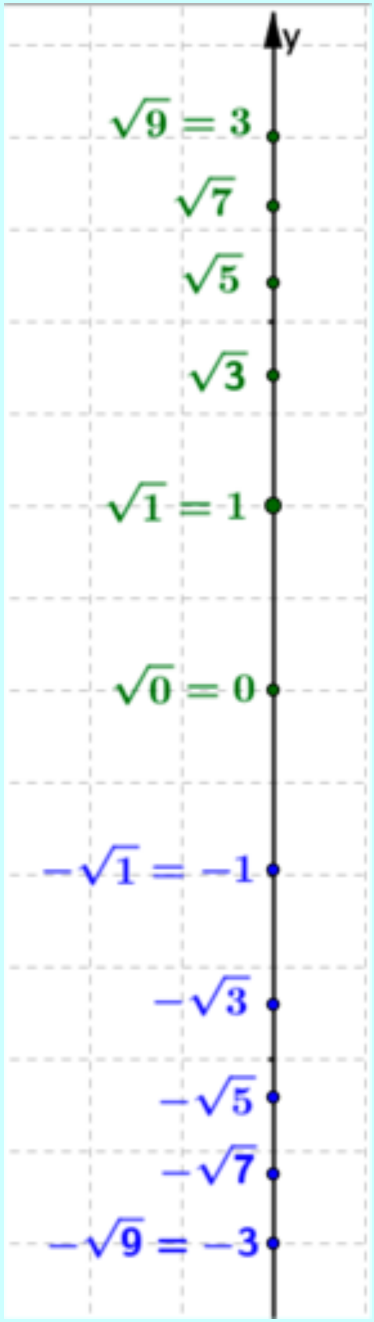


Non trovo $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-3}$,...

Non posso calcolare le radici quadrate di numeri negativi.

Radici quadrate e numeri negativi



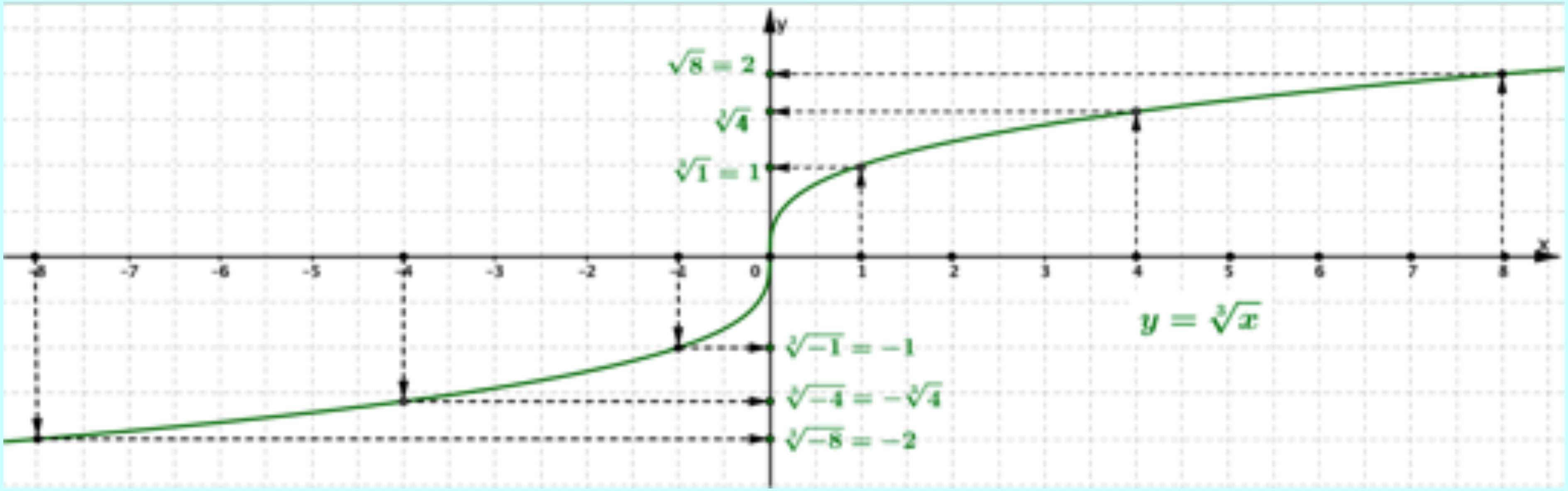


Non trovo $\sqrt{-3}, \sqrt{-9}$

Ma trovo $-\sqrt{3}, -\sqrt{9}$

Daniela Valenti, 2021

Radici cubiche anche di numeri negativi



Trovo sulla retta dei numeri reali le radici cubiche di tutti i numeri reali.

Un risultato più generale

Non trovo sulla retta dei numeri reali solo le radici con indice pari di numeri negativi .

Esempi

Non trovo sulla retta dei numeri reali

$\sqrt{-100}$, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[6]{-64}$, $\sqrt[8]{-25}$

Trovo sulla retta dei numeri reali

$\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[5]{-32}$, $\sqrt[7]{-10}$

Estendo le proprietà dei radicali ad espressioni con numeri negativi?

Le proprietà dei radicali erano importanti per i calcoli con carta e penna, soprattutto quando si lavorava solo con numeri positivi.

Perciò richiedono particolare attenzione in espressioni con numeri negativi.

Ragioniamo su qualche caso significativo

Prodotto di radicali con lo stesso indice pari

$$\sqrt{4}\cdot\sqrt{25}=2\cdot 5=10$$

$$\sqrt{4\cdot 25}=\sqrt{100}=10$$

$$\boxed{\sqrt{4}\cdot\sqrt{25}=\sqrt{4\cdot 25}\ \text{È VERA}}$$

$\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-25}$ non ha risultato nei numeri reali

$$\sqrt{(-4)\cdot(-25)}=\sqrt{100}=10$$

$$\boxed{\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-25}=\sqrt{(-4)\cdot(-25)}\ \text{È FALSA}}$$

Analoghe conclusioni per il quoziente di radicali con lo stesso indice pari, dato che la divisione diventa moltiplicazione per il reciproco.
Rimane impossibile la divisione per 0.

Potenze di radicali con indice pari

$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$

$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$

$\boxed{\left(\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{3^2}}$

È VERA

$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

$\left(\sqrt{-3}\right)^2$ **non ha risultato nei numeri reali**

$\boxed{\sqrt{(-3)^2} = \left(\sqrt{-3}\right)^2}$

È FALSA

Proprietà dei radicali estese a numeri negativi

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}$$

Indice *n* dei radicali dispari

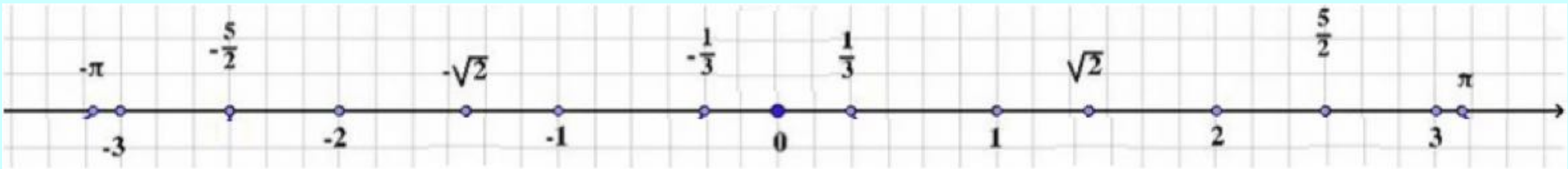
Tutte le proprietà sono valide anche se al posto di *a*, *b* inserisco numeri negativi.

Indice *n* dei radicali pari

Le proprietà non sono valide se al posto di *a*, *b* inserisco numeri negativi.

I numeri reali sulla retta

Osservo di nuovo la retta dei numeri reali



E penso alle operazioni che non hanno risultato

Non trovo sulla retta dei numeri reali

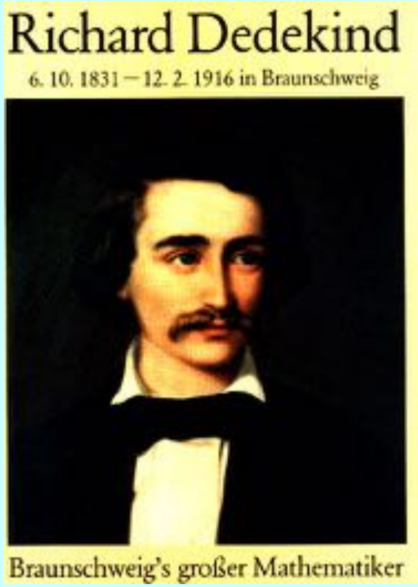
$$\sqrt{-100},\ \sqrt[4]{-16},\ \sqrt[6]{-64},\ \sqrt[8]{-25}$$

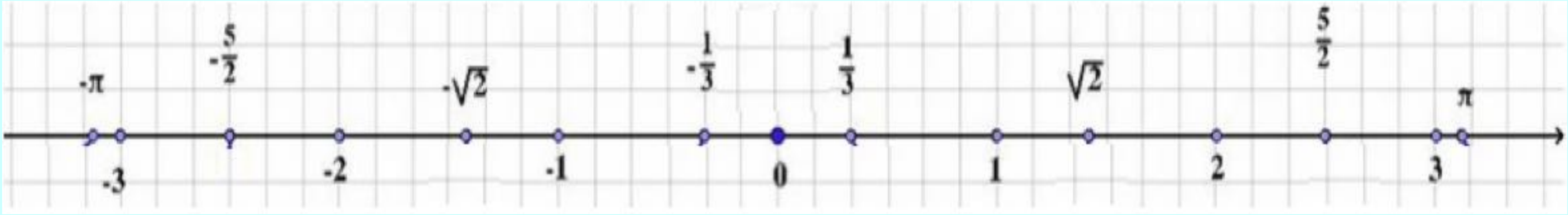
Resta una domanda

Rimangono ancora sulla retta dei vuoti per inserire numeri che non sono reali?

L’assioma di continuità

Il matematico Dedekind ha dato la risposta a questa domanda alla fine del 1800: i numeri reali completano la retta, così si può stabilire una corrispondenza biunivoca fra punti della retta e numeri reali.





Pensiamo la retta e l’insieme R dei numeri reali *perfettamente continui*, senza alcuna interruzione.

Daniela Valenti, 2021