Potenze ad esponente frazionario e proprietà dei radicali

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} \xleftarrow{\sqrt{x}} 3^{1} \xleftarrow{\sqrt{x}} 3^{2} \xleftarrow{\sqrt{x}} 3^{4}$$

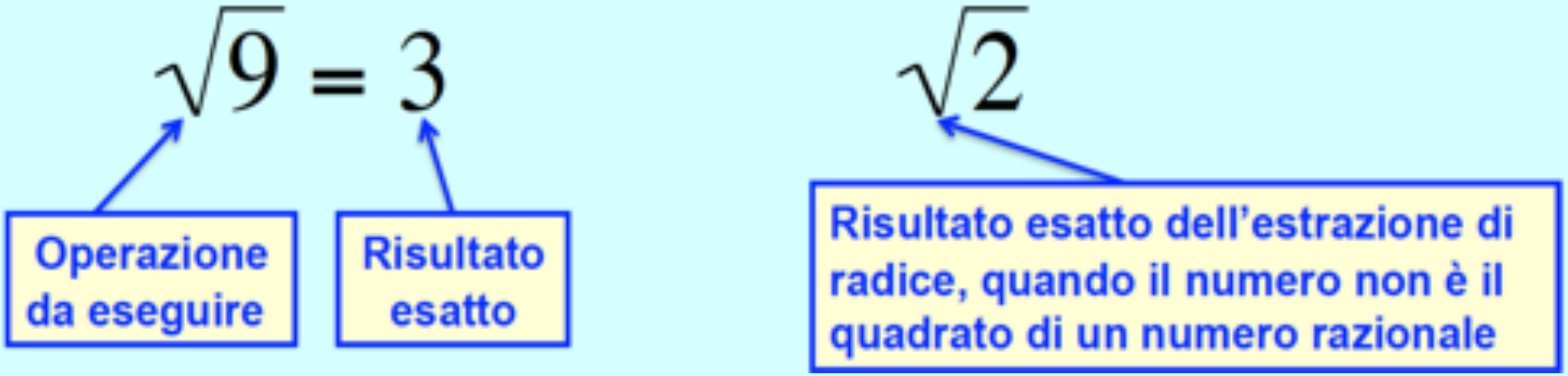
dimezza l’esponente

dimezza l’esponente

Difficoltà dei radicali

La scrittura dei radicali pone varie difficoltà, come ad esempio:

1. In matematica, il simbolo √ viene usato con due significati diversi da distinguere



2. Quando si usano computer e calcolatrici, alcuni software non utilizzano il simbolo di radicale.

Un’idea di Newton

Un’idea di Newton porta a ridurre queste difficoltà: introdurre nuovi simboli legati all’elevazione a potenza.

Richiamo quello che già sai sull’elevazione a potenza

Elevazione a potenza

Esponente

$$3^4 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{4 \textit{ fattori uguali}}$$

Base

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fattori}}$$

$$3^2 = \underbrace{3 \times 3}_{2 \text{ volte}} \qquad 3^1 = \underbrace{3}_{1 \text{ volta}}$$

E posso anche trovare 3^0?

Arrivo all'esponente 0

Per passare da 3^1 a 3^0 divido la potenza per 3.

Così trovo $3^0 = 1$

Alessandro Iannucci, 2021

E anche ad esponenti interi negativi

Esponente		Potenza	
-2	$\boxed{-1}$	$3^{-2}=\frac{1}{3}:3=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3^2}$	$\boxed{:3}$
-1	$\boxed{-1}$	$3^{-1}=1:3=\frac{1}{3}$	$\boxed{:3}$
0	$\boxed{-1}$	$3^0=3:3=1$	$\boxed{:3}$
$\boxed{+1}$ 1	$\boxed{-1}$	$\boxed{\times 3}$ $3^1=3$	$\boxed{:3}$
2		$3^2=3\times 3=9$	

Per passare da 3^0 a 3^{-1} divido la potenza per 3.

Così trovo

$$3^{-1}=\frac{1}{3^1} \qquad 3^{-2}=\frac{1}{3^2} \ldots$$

Ripeto il ragionamento con altre basi e altri esponenti interi negativi

$$2^{-1} = \frac{1}{2^1} \qquad 5^{-2} = \frac{1}{5^2} \qquad 3^{-4} = \frac{1}{3^4} \qquad 10^{-5} = \frac{1}{10^5}$$

Ma posso scegliere 0 come base?

NO!

Esponente	Elevazione a potenza	Potenza
-1	0^{-1}	non ha risultato
0	0^{0}	non ha risultato
1	$0^{1} = 0$	0

non posso dividere per 0

0^0, 0^{-1}, 0^{-2}, 0^{-3} … non hanno risultato

Alessandro Iannucci, 2021

Potenze con esponente intero negativo

Base	Esponente	Potenza
3	-1	$\frac{1}{3}$
3	-2	$\frac{1}{3^2}$
2	-3	$\frac{1}{2^3}$

In generale, solo se l'esponente *n* è un numero naturale e la base a ≠ 0

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

0^{-n} non ha risultato

L’idea di Newton

Alla fine del 1600 Newton estende l’elevazione a potenza . Ecco l’idea.

Che succede se ripeto l’elevazione al quadrato?

$$3 \xrightarrow{x^2} 3^2 \xrightarrow{x^2} \left(3^2\right)^2 = 3^{(2\times 2)} = 3^4$$

L’esponente raddoppia

Le potenze ad esponente frazionario

Che succede se ‘torno indietro’ con l’estrazione di radice quadrata?

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} \xleftarrow{\sqrt{x}} 3^{1} \xleftarrow{\sqrt{x}} 3^{2} \xleftarrow{\sqrt{x}} 3^{4}$$

dimezza l’esponente   dimezza l’esponente

L’estrazione di radice quadrata ha l’effetto di dimezzare l’esponente

Daniela Valenti, 2021

Le potenze ad esponente frazionario

L’estrazione di radice quadrata divide per 2 l’esponente.
E così, l’estrazione di radice cubica divide per 3 l’esponente.
E comincio a scrivere.

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \qquad \sqrt[3]{4^2} = 4^{\frac{2}{3}} \qquad \sqrt{3^5} = 3^{\frac{5}{2}} \quad \ldots\ldots$$

In generale

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

Se nel radicale non compare *n*, è sottinteso *n* = 2.
Se nel radicale non compare *p*, è sottinteso *p* = 1

In questa lezione penso di sostituire alla lettera a solo numeri razionali positivi.

Nuovi simboli per estrazione di radice

$$3 \underset{x^{\frac{1}{2}}}{\overset{x^2}{\rightleftarrows}} 9$$

$$9^{\frac{1}{2}} = 3$$

$$2 \underset{x^{\frac{1}{3}}}{\overset{x^3}{\rightleftarrows}} 8$$

$$8^{\frac{1}{3}} = 2$$

Un'analogia

La divisione dai numeri naturali ai razionali

$$15:3 = 5$$

$$4:3 \begin{cases} = \dfrac{4}{3} & \text{risultato esatto} \\ \\ \cong 1{,}33 & \text{risultato approssimato} \end{cases}$$

L'estrazione di radice dai numeri razionali agli irrazionali

$$9^{\frac{1}{2}} = 3$$

$$3^{\frac{1}{2}} \begin{cases} = \sqrt{3} & \text{risultato esatto} \\ \cong 1{,}73 & \text{risultato approssimato} \end{cases}$$

Linguaggio matematico

Negli sviluppi successivi della matematica e del suo linguaggio, gli esponenti frazionari si diffondono, ma non sostituiscono il simbolo $\sqrt{}$, anche per indicare l'operazione di estrazione di radice.

Così troviamo nei testi e nelle applicazioni entrambi i simboli: in ogni situazione si sceglie quello che rende più agevoli la scrittura, i calcoli, le dimostrazioni, …

Vantaggi degli esponenti frazionari

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

Conosco le proprietà delle potenze con esponente intero.

Se estendo le stesse proprietà al caso di esponenti frazionari, trovo proprietà che guidano nei calcoli con radicali.
Ecco come posso ragionare.

Ricordo tre proprietà delle potenze

1. Prodotto di potenze con lo stesso esponente

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

2. Quoziente di potenze con lo stesso esponente

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

3. Potenza di potenza

$$\left(a^n\right)^p = a^{n \cdot p}$$

1. Prodotto di potenze con lo stesso esponente

Proprietà delle potenze n numero naturale	Potenze ad esponente frazionario	Radicali	Esempi numerici
Prodotto di potenze con stesso esponente $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5 \cdot 2}$

Proprietà del prodotto di radicali con lo stesso indice

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Vantaggi degli esponenti frazionari

Esponenti frazionari e parentesi facilitano la corretta lettura delle formule

$4^{\frac{1}{3}} \cdot 5$ **si distingue bene da** $(4 \cdot 5)^{\frac{1}{3}}$

Per distinguere le espressioni scritte con i radicali, bisogna osservare attentamente il segno di radice!

$\sqrt[3]{4} \cdot 5$ $\qquad$ $\sqrt[3]{4 \cdot 5}$

Questo spiega perché vari software chiedono di inserire formule solo con esponenti frazionari e parentesi.

2.Quoziente di potenze con lo stesso esponente

Proprietà delle potenze n numero naturale	Quoziente di potenze ad esponente frazionario	Radicali	Esempio numerico
Quoziente di potenze con stesso esponente $\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{16}{2}}$

Proprietà del quoziente di radicali con lo stesso indice

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

3. Potenza di potenza

Proprietà delle potenze n, p numeri naturali	Potenze ad esponente frazionario	Radicali	Esempi numerici
Potenza di potenza $\left(a^n\right)^p = a^{n \cdot p}$	$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = a^{\frac{1}{n} \cdot p} = a^{\frac{p}{n}}$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$	$\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5^2}$
	$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{np}}$	$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[3 \cdot 2]{7} = \sqrt[6]{7}$

Potenza di un radicale

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$$

Radice di un radicale

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$$

Proprietà dei radicali

Ecco le proprietà che abbiamo trovato

Proprietà dei radicali	Esempio numerico
Prodotto *di radicali* ***con stesso indice*** $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$	$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{5\cdot 2}$
Quoziente *di radicali* ***con stesso indice*** $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{16}{2}}$
Potenza di un radicale $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}$	$\left(\sqrt[3]{5}\right)^2=\sqrt[3]{5^2}$
Radice di un radicale $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n\cdot p]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{7}}=\sqrt[3\cdot 2]{7}=\sqrt[6]{7}$

Le proprietà guidano i calcoli anche con esponenti negativi

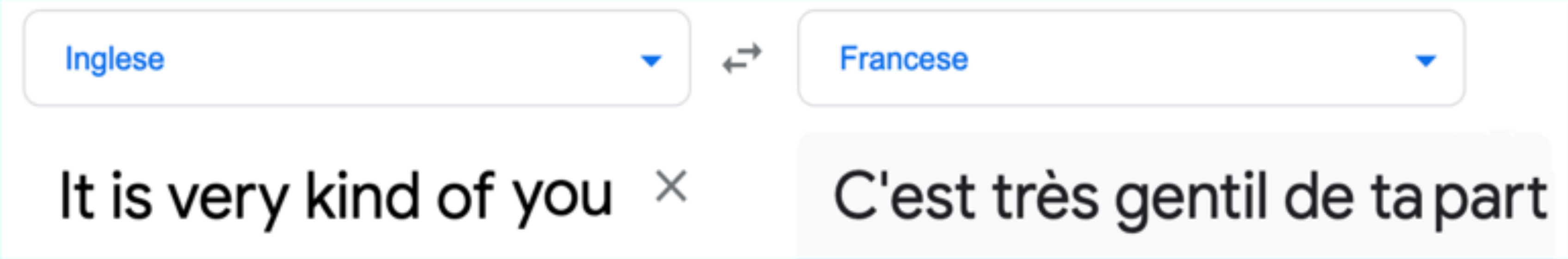
ESEMPI

$$5^{-2} = (5^{-1})^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

$$9^{-\frac{1}{2}} = (9^{-1})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

Radicali ed esponenti frazionari

Radicali ed esponenti frazionari sono due *linguaggi* diversi per esprimere gli stessi risultati irrazionali di estrazione di radice.



Radicali	Potenze con esponenti frazionari
$\left(\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}\right)^2=\left(\sqrt[3]{10}\right)^2=\sqrt[3]{10^2}$	$\left(2^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\right)^2=\left(10^{\frac{1}{3}}\right)^2=10^{\frac{2}{3}}$
$\sqrt[3]{10^2}=10^{\frac{2}{3}}$	