# Potenze
# Risposte e commenti delle attività

# Quesiti 1 e 2

**1.** Completa i calcoli qui sotto per spiegare come trovi la proprietà della potenza di potenza.

$$\left(4^3\right)^2 = \underbrace{4^3 \times 4^3}_{\text{2 volte}} = \underbrace{\underbrace{(4\times4\times4)}_{\text{3volte}}\times\underbrace{(4\times4\times4)}_{\text{3volte}}}_{2\times3\text{ volte}} = 4^{2\times3} = 4^6$$

**2.** Completa i due calcoli qui sotto per spiegare perché ottieni risultati diversi

$$\left(4^3\right)^2 = 64^2 = 4096$$ Prima operazione in parentesi

$$4^{3^2} = 4^9 = 262144$$ Prima elevazione a potenza

# Quesiti 3 e 4

**3.** Completa i calcoli qui sotto per spiegare come trovi la proprietà del prodotto di potenze con la **stessa base**.

$$3^2 \times 3^4 = \underbrace{\underbrace{3\times 3}_{2\text{ volte}} \times \underbrace{3\times 3\times 3\times 3}_{4\text{ volte}}}_{2+4\text{ volte}} = 3^{2+4}$$

**4.** Osserva i calcoli qui sotto per spiegare perché **non si può trovare** la proprietà della somma di potenze con la **stessa base**.

$$3^2 + 3^4 = \underbrace{3\times 3}_{2\text{ volte}} + \underbrace{3\times 3\times 3\times 3}_{4\text{ volte}}$$

Al secondo membro non c'è solo una moltiplicazione ripetuta: c'è anche un'addizione

# Quesiti 5 e 6

**5.** Completa i calcoli qui sotto per spiegare come trovi la proprietà del prodotto di potenze con lo **stesso esponente**.

$$2^3 \times 4^3 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{\text{3 volte}} \times \underbrace{4 \times 4 \times 4}_{\text{3 volte}} = \underbrace{(2 \times 4) \times (2 \times 4) \times (2 \times 4)}_{\text{3 volte}} = (2 \times 4)^3$$

**6.** Osserva i calcoli qui sotto per spiegare perché **non si può trovare** la proprietà della somma di potenze con lo **stesso esponente.**

$$2^3 + 4^3 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{\text{3 volte}} + \underbrace{4 \times 4 \times 4}_{\text{3 volte}}$$

Al secondo membro non ci sono solo moltiplicazioni ripetute: c'è anche un'addizione

# Quesiti 7, 8, 9,10

**7.** Applica la proprietà di potenza di potenza per completare i seguenti calcoli:

$$(2^{-1})^3 = 2^{(-1)\cdot 3} = 2^{-3} \qquad 3^{-4} = (3^{-1})^4$$

**8.** Frazioni e potenze ad esponente negativo portano a scrivere una divisione a : b come moltiplicazione; completa le uguaglianze seguenti.

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1} \qquad a : b^3 = a \cdot \frac{1}{b^3} = a \cdot b^{-3}$$

**9.** Completa i calcoli qui sotto per spiegare come trovi la proprietà del quoziente di potenze con la **stessa base**

$$2^7 : 2^3 = 2^7 \cdot 2^{-3} = 2^{7+(-3)} = 2^{7-3}$$

**10.** Completa i calcoli qui sotto per spiegare come trovi la proprietà del quoziente di potenze con lo **stesso esponente**

$$10^3 : 2^3 = 10^3 \cdot 2^{-3} = 10^3 \cdot (2^{-1})^3 = [10 \cdot (2^{-1})]^3 = (10 : 2)^3$$

# Quesito 11

**11.** Quali fra le seguenti affermazioni sono corrette? **C e D**

**A.** $a^{-1} = \frac{1}{a}$ , se scelgo come base ***a*** un numero razionale.

**B.** $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ , dove ***a*** è un numero razionale ed ***n*** è un numero naturale escluso 0.

**C.** $a^{-1} = \frac{1}{a}$ , dove ***a*** un numero razionale, escluso zero.

**D.** $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ , dove ***a*** è un numero razionale escluso 0 e ***n*** un numero naturale.

**Attenzione all'affermazione B.**
**Se $a \neq 0$, ad esempio $a = 3$, perché escludere $n = 0$?**

**Sviluppo** $3^{-0} = \frac{1}{3^0}$

**E ottengo** $3^0 = \frac{1}{1}$ **ossia.** $1 = \frac{1}{1}$ **che è vera**

# Quesiti 12 e 13

**12.** Qual è il risultato di $(-2)^{-1}$?

**A.** 2 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $-\frac{1}{2}$

$$(-2)^{-1} = \frac{1}{(-2)^1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

**13.** Fra le seguenti uguaglianze scegli quelle vere e correggi quelle false, come mostra la prima riga

| Uguaglianza | Vera/falsa | Uguaglianza corretta |
|---|---|---|
| $4^{-1} = -4$ | Falsa | $4^{-1} = \frac{1}{4}$ |
| $5^{-1} = 0{,}2$ | Vera | |
| $2^{-3} = -6$ | Falsa | $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ |
| $0^{-2}$ = non ha risultato | Vera | |
| $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$ | Falsa | $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$ |
| $0^0 = 0$ | Falsa | $0^0$ non ha risultato |

$$5^{-1} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

# Quesiti 14,15 e 16

*Scegli la risposta esatta ai quesiti da 14 a 16*

**14.** Il risultato di $10^{-5}$ è

**A.** 0,00001 **B.** 100 000 **C.** $-50$ **D.** $\frac{1}{1000}$

5 zeri prima di 1

$(0{,}1)^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-3} = [(10)^{-1}]^{-3} = 10^{(-1)\cdot(-3)} = 10^3$

**15.** Il risultato di $(0{,}1)^{-3}$

**A.** non si può calcolare **B.** è uguale a $10^3$ **C.** è 10 000 **D.** è uguale a $10^{-3}$

$2^{15} + 2^{15} = 2 \times 2^{15} = 2^1 \times 2^{15} = 2^{15+1} = 2^{16}$

**16.** Il risultato di $\mathbf{2^{15} + 2^{15}}$

**A.** è $2^{30}$ **B.** è $4^{30}$ **C.** è $2^{16}$ **D.** è $4^{15}$

# Quesiti 17 e 18

***Calcola il risultato delle seguenti espressioni***

**17.** $4 + (2 \times 5)^{-2} = 4 + 10^{-2} = 4 + 0{,}01 = 4{,}01$

$(4 + 2) \times 5^{-2} = 6 \times \frac{1}{5^2} = 6 \times \frac{1}{25} = \frac{6}{25}$

**18.** $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$ $\frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}$ $\frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$

# Insiemi numerici e potenze

## Una riflessione sul percorso seguito finora

**Numeri naturali:**
Trovo sempre il risultato di addizione e moltiplicazione

**Numeri interi**
Trovo sempre il risultato di addizione, moltiplicazione e sottrazione.

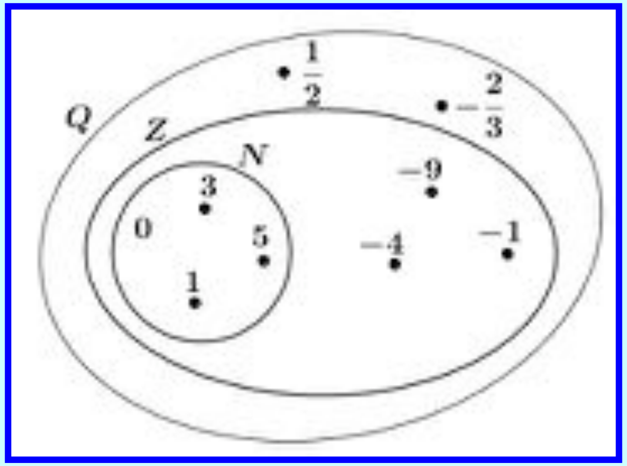
**Numeri razionali**
Trovo sempre il risultato di addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione

# Proprietà delle operazioni e insiemi numerici

H. Hankel
1839 - 1873

Alla fine del 1800 lo studio dei fondamenti della matematica diventa più approfondito. In particolare sugli insiemi numerici, Hankel studia come ampliare l'insieme N dei naturali. Ecco due condizioni importanti da rispettare:

1. L'insieme N dei numeri naturali è contenuto nel nuovo insieme.
2. Nel nuovo insieme posso eseguire addizione e moltiplicazione, con tutte le proprietà valide per i naturali.



# *Conservare* le proprietà delle operazioni

**La seconda condizione di ampliamento è: conservare le proprietà delle operazioni e prende anche il nome di ‘Principio di conservazione delle proprietà formali’. Ecco un esempio di applicazione di questo principio, proprio nel campo delle potenze.**

# Elevazione a potenza con esponente 0

**Che cosa succede se calcolo $2^3 : 2^3$ ?**

$$\boxed{2^3 : 2^3}$$

**Eseguo il calcolo**

$$2^3 : 2^3 = 8 : 8 = 1$$

**Applico la proprietà del quoziente di due potenze con uguale base**

$$2^3 : 2^3 = 2^{3-3} = 2^0$$

**Per conservare la proprietà delle potenze anche con esponente 0 stabilisco che**

$$2^0 = 1$$

# Potenza con esponente zero

## Una prima osservazione

**Il ragionamento NON è una dimostrazione che**

$$2^0 = 1$$

**Invece, spiega perché i matematici sono stati d'accordo nel decidere che**

$$2^0 = 1$$

# Potenza con esponente zero

## Una seconda osservazione

**Posso ripetere il ragionamento basato sulla divisione per altre potenze con uguale base *b* e uguale esponente *n*.**

**Ma non posso scegliere come base zero, perché non posso dividere per zero.**

**Ritroviamo dunque:**

$$b^0 = 1 \qquad \text{per qualunque } b \neq 0$$

$$0^0 \ \text{ non ha risultato}$$