

# Potenze con esponente intero e proprietà delle potenze

Esponente	Potenza
-2  <span style="border: 1px solid green; padding: 2px;">-1</span>	$3^{-2} = \frac{1}{3} : 3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$  <span style="border: 1px solid yellow; padding: 2px;">: 3</span>
-1  <span style="border: 1px solid green; padding: 2px;">-1</span>	$3^{-1} = 1 : 3 = \frac{1}{3}$  <span style="border: 1px solid yellow; padding: 2px;">: 3</span>
0  <span style="border: 1px solid green; padding: 2px;">-1</span>	$3^0 = 3 : 3 = 1$  <span style="border: 1px solid yellow; padding: 2px;">: 3</span>
<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">+1</span>  <span style="border: 1px solid green; padding: 2px;">-1</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">× 3</span>  <span style="border: 1px solid yellow; padding: 2px;">: 3</span>
1  <span style="border: 1px solid green; padding: 2px;">-1</span>	$3^1 = 3$
2	$3^2 = 3 \times 3 = 9$

# Elevazione a potenza

Esponente

Base

$$3^4 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{4 \text{ fattori uguali}}$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fattori}}$$

$$3^2 = \underbrace{3 \times 3}_{2 \text{ volte}}$$

$$3^1 = \underbrace{3}_{1 \text{ volta}}$$

**E posso trovare  $3^0$ ?**

# Verso l'esponente 0

**Posso trovare  $3^0$ ?**

**Non ha senso moltiplicare 0 volte 3**

**Ma in matematica posso ragionare  
per arrivare anche all'esponente 0**

# Ecco come posso ragionare

Esponente	Elevazione a potenza	Potenza
1	$3^1 = 3$	3
2	$3^2 = 3 \times 3$	9
3	$3^3 = 3 \times 3 \times 3$	27

l'esponente aumenta di 1

la potenza è moltiplicata per 3

Per passare da  $3^1$  a  $3^2$   
**moltiplico** la potenza per 3.

# Arrivo all'esponente 0

Esponente	Elevazione a potenza	Potenza
0	$3^0 = 3 : 3$	1
-1		3
1	$3^1 = 3$	3
-1		9
2	$3^2 = 3 \times 3$	9

l'esponente diminuisce di 1

la potenza è divisa per 3

Per passare da  $3^1$  a  $3^0$   
**divido** la potenza per 3.

Così trovo  $3^0 = 1$

# Ripeto il ragionamento con altre basi

E trovo

$$3^0 = 1 \quad 5^0 = 1 \quad 10^0 = 1 \quad 0,1^0 = 1$$

Ma posso scegliere **0** anche come base?

# Con la base 0 il ragionamento non vale

Esponente	Elevazione a potenza	Potenza
0	$0^0$	non ha risultato
1	$0^1 = 0$	0
2	$0^2 = 0 \times 0$	0

non posso dividere per 0

Per passare da  $0^1$  a  $0^0$  dovrei dividere per 0 la potenza.  
Ma non posso dividere per 0.

$0^0$  non ha risultato

# Esponente intero negativo

Esponente	Potenza
-2  <span style="border: 1px solid green; padding: 2px;">-1</span>	$3^{-2} = \frac{1}{3} : 3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$  <span style="border: 1px solid yellow; padding: 2px;">:3</span>
-1  <span style="border: 1px solid green; padding: 2px;">-1</span>	$3^{-1} = 1 : 3 = \frac{1}{3}$  <span style="border: 1px solid yellow; padding: 2px;">:3</span>
0  <span style="border: 1px solid green; padding: 2px;">-1</span>	$3^0 = 3 : 3 = 1$  <span style="border: 1px solid yellow; padding: 2px;">:3</span>
<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">+1</span>  <span style="border: 1px solid green; padding: 2px;">-1</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">×3</span>  <span style="border: 1px solid yellow; padding: 2px;">:3</span>
1  <span style="border: 1px solid green; padding: 2px;">-1</span>	$3^1 = 3$
2	$3^2 = 3 \times 3 = 9$

Per passare da  $3^0$  a  $3^{-1}$  **divido** la potenza per 3.

Così trovo

$$3^{-1} = \frac{1}{3^1} \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} \dots$$

# Ripeto il ragionamento con altre basi e altri esponenti interi negativi

$$2^{-1} = \frac{1}{2^1} \quad 5^{-2} = \frac{1}{5^2} \quad 3^{-4} = \frac{1}{3^4} \quad 10^{-5} = \frac{1}{10^5}$$

Ma posso scegliere **0** come base?

**NO!**

Esponente	Elevazione a potenza	Potenza
-1	$0^{-1}$	non ha risultato
0	$0^0$	non ha risultato
1	$0^1 = 0$	0

non posso dividere per 0

**$0^{-1}$ ,  $0^{-2}$ ,  $0^{-3}$  ... non hanno risultato**

# Potenze con esponente intero negativo

Base	Esponente	Potenza
3	-1	$\frac{1}{3}$
3	-2	$\frac{1}{3^2}$
2	-3	$\frac{1}{2^3}$

In generale, solo se l'esponente  $n$  è un numero naturale e la base  $a \neq 0$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

**0<sup>-n</sup>** non ha risultato

# Potenze di 10 ad esponente intero

Esponente $z$	$10^z$	Scrittura decimale
<b>3</b>	$10^3 = \mathbf{1000}$	<b>3 zeri dopo</b> la cifra <b>1</b>
<b>1</b>	$10^1 = \mathbf{10}$	<b>1 zero dopo</b> la cifra <b>1</b>
<b>0</b>	$10^0 = \mathbf{1}$	<b>Nessuno zero dopo</b> la cifra <b>1</b>
<b>-1</b>	$10^{-1} = \frac{1}{10} = \mathbf{0,1}$	<b>1 zero prima</b> della la cifra <b>1</b>
<b>-3</b>	$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \mathbf{0,001}$	<b>3 zeri prima</b> della la cifra <b>1</b>

# Una riflessione sulle potenze con esponente intero negativo

# L'esponente -1

Numero razionale $a$	$a^{-1} = \frac{1}{a}$
2	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
-2	$(-2)^{-1} = -\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$
$\frac{3}{4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$
$0,2 = \frac{1}{5}$	$0,2^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$
<b>0</b>	<b>Non esiste il reciproco di 0</b>

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

$\frac{1}{a}$  è il reciproco di  $a$

$a^{-1}$  può sostituire  
il reciproco

# Espressioni con potenze: regole 'di lettura'

## A. Priorità delle operazioni

In un'espressione le operazioni si eseguono in questo ordine:

1. Elevazioni a potenza
2. Moltiplicazioni e divisioni
3. Addizioni e sottrazioni

**B. Si usano le parentesi per cambiare questo ordine stabilito**

# Qualche esempio

$$\underbrace{5 \times 2^3 = 5 \times 8}_{\text{prima la potenza}} = 40$$

$$\underbrace{(5 \times 2)^3 = 10^3}_{\text{prima l'operazione fra parentesi}} = 1000$$

$$\underbrace{4^{2^3} = 4^8}_{\text{prima la potenza}} = 65536$$

$$\underbrace{(4^2)^3 = 16^3}_{\text{prima l'operazione fra parentesi}} = 4096$$

# Qualche esempio

$$-3^2 = (-1) \cdot 3^2 = (-1) \cdot 9 = -9$$

Prima la potenza

$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$$

Solo moltiplicazione

$$-2^3 = (-1) \cdot 2^3 = (-1) \cdot 8 = -8$$

Prima la potenza

$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$$

Solo moltiplicazione

**Le potenze di un numero negativo hanno segno negativo solo se l'esponente è dispari (1, 3, 5, ...); negli altri casi hanno segno positivo.**

# Una prima proprietà delle potenze

La prima proprietà risponde alla domanda:

*‘Che cosa ottengo se ripeto l’elevazione a potenza, cioè se calcolo la potenza di una potenza?’*

## Potenza di potenza

$$(a^m)^p = a^{m \cdot p} \quad \leftarrow$$

*‘Ottengo ancora un’elevazione a potenza’*

## Esempio

$$(4^3)^2 = 4^{2 \times 3} = 4^6$$

# Altre proprietà delle potenze

Altre due proprietà trattano prodotti o quozienti di potenze **con la stessa base**

Proprietà delle potenze	Esempi
<p><b>Prodotto</b> di potenze con la <b>stessa base <math>a</math></b></p> $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$	$3^2 \times 3^4 = 3^{2+4}$
<p><b>Quoziente</b> di potenze con la <b>stessa base <math>a</math></b></p> $a^m : a^p = a^{m-p}$	$2^7 : 2^3 = 2^{7-3}$

# Perché c'è una proprietà per la somma di potenze con la stessa base?

## Un esempio per riflettere

### Somma di potenze con la stessa base

$$3^2 + 3^4 = \underbrace{3 \times 3}_{2 \text{ volte}} + \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{4 \text{ volte}}$$

*Non è un'unica moltiplicazione ripetuta*

Invece

### Prodotto di potenze con la stessa base

$$3^2 \times 3^4 = \underbrace{3 \times 3}_{2 \text{ volte}} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{4 \text{ volte}}$$

*È un'unica moltiplicazione ripetuta 2 + 4 volte*

# Altre proprietà delle potenze

Infine due proprietà che trattano prodotti o quozienti di potenze con **lo stesso esponente**.

Proprietà delle potenze	Esempio
<b>Prodotto</b> di potenze con lo stesso esponente $n$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^3 \times 4^3 = (2 \times 4)^3$
<b>Quoziente</b> di potenze con lo stesso esponente $n$ $a^n : b^n = (a : b)^n$	$10^3 : 2^3 = (10 : 2)^3$

# Proprietà delle potenze

Proprietà delle potenze	Esempio numerico
<b>Potenza di potenza</b> $(a^m)^p = a^{m \cdot p}$	$(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$
<b>Prodotto di potenze con la stessa base</b> $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$	$7^3 \times 7^5 = 7^{3+5} = 7^8$
<b>Prodotto di potenze con lo stesso esponente</b> $a^n \cdot b^n = (ab)^n$	$10^3 \times 5^3 = (10 \times 5)^3$
<b>Quoziente di potenze con la stessa base</b> $a^m : a^p = a^{m-p}$	$7^5 : 7^3 = 7^{5-3} = 7^2$
<b>Quoziente di potenze con lo stesso esponente</b> $a^n : b^n = (a:b)^n$	$10^3 : 5^3 = (10:5)^3$

**Le proprietà valgono anche se gli esponenti sono negativi**

# Potenze e frazioni

Quoziente di potenze con stesso esponente	
Con simbolo ':'	Con frazioni
$10^3 : 2^3 = (10 : 2)^3$	$\frac{10^3}{2^3} = \left(\frac{10}{2}\right)^3$
$5^3 : 4^3 = (5 : 4)^3$	$\frac{5^3}{4^3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3$
$(7 : 5)^2 = 7^2 : 5^2$	$\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{7^2}{5^2}$
$(8 : 3)^4 = 8^4 : 3^4$	$\left(\frac{8}{3}\right)^4 = \frac{8^4}{3^4}$

# Con le proprietà calcolo la potenza di una frazione

$$\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{7^2}{5^2}$$

Necessarie le parentesi per elevare a potenza una frazione

Elevo a potenza numeratore **e** denominatore

# Esempi

Con le parentesi

$$\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{7^2}{5^2} = \frac{49}{25}$$

È il quadrato  
della frazione

Senza le parentesi

$$\frac{7^2}{5} = \frac{49}{5}$$

$$\frac{7}{5^2} = \frac{7}{25}$$

**NON** è il quadrato  
della frazione

# Proprietà delle operazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali

Le proprietà delle potenze completano le proprietà di addizione e moltiplicazione.

Proprietà	Addizione	Moltiplicazione
<b>Commutativa</b>	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
<b>Associativa</b>	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
<b>Elemento neutro</b>	$0$ è l'elemento neutro $a + 0 = a$	$1$ è l'elemento neutro $a \cdot 1 = a$
<b>Elemento assorbente</b>	L'addizione <b>non</b> ha elemento assorbente	$0$ è l'elemento assorbente $a \cdot 0 = 0$
<b>Opposto</b>	Dato $a$ , si trova $-a$ tale che $-a + a = 0$	
<b>Inverso (o reciproco)</b>		Dato $a$ diverso da $0$ , si trova $\frac{1}{a}$ tale che $\frac{1}{a} \cdot a = 1$
<b>Distributiva</b>	$a(b + c) = ab + ac$	

Proprietà delle potenze
Potenza di potenza $(a^m)^p = a^{m \cdot p}$
Prodotto di potenze con stessa base $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$
Prodotto di potenze con stesso esponente $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
Quoziente di potenze con stessa base $a^m : a^p = a^{m-p}$
Quoziente di potenze con stesso esponente $a^n : b^n = (a : b)^n$