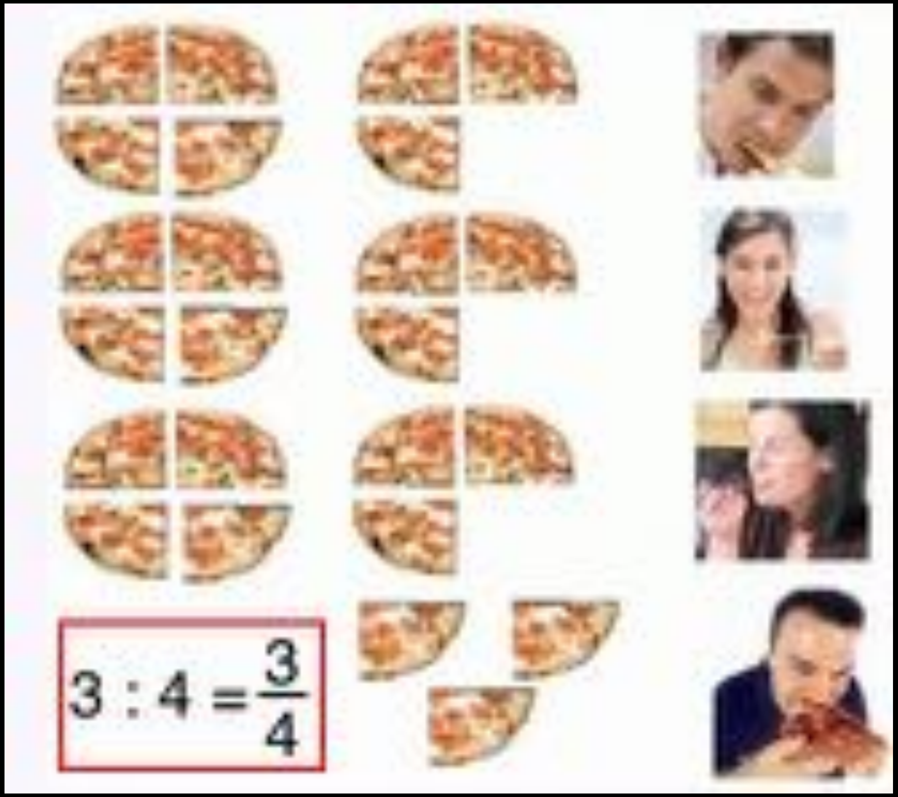
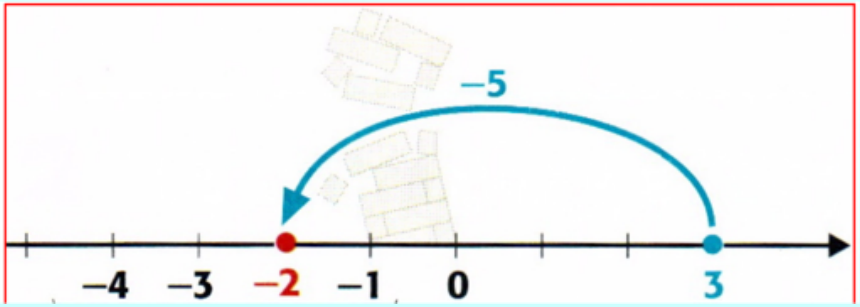
Dalle frazioni ai numeri razionali

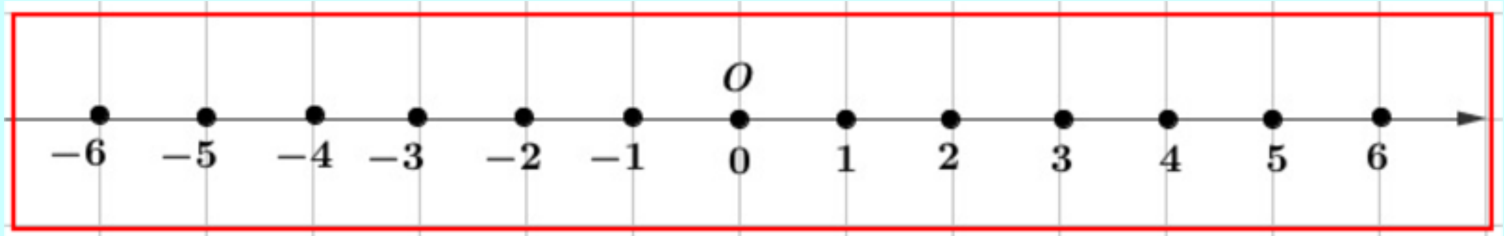


Dai numeri naturali ai numeri interi

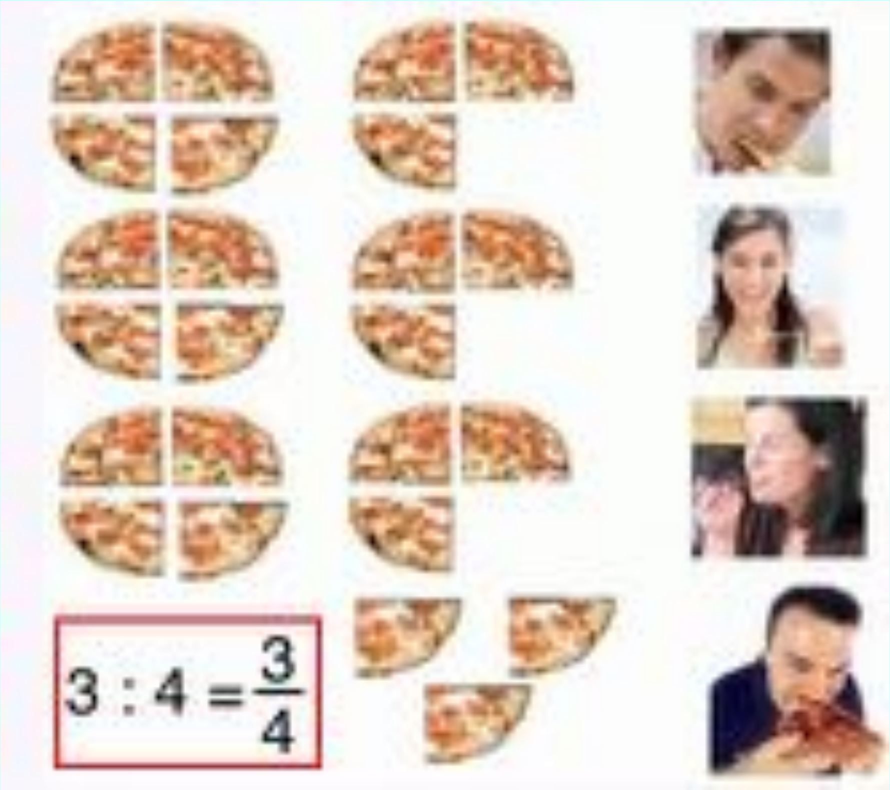
I *numeri naturali* sono i primi numeri che hai incontrato, quando hai cominciato a contare con le dita.
Ma vuoi eseguire tutte le sottrazioni.



E allora hai bisogno dei *numeri interi*.



E ora perché le frazioni?



Divido 3 pizze fra 4 persone; con una frazione scrivo il risultato esatto della divisione 3 : 4.

Frazione

Con una frazione scrivo il risultato esatto di una divisione

$$3:4=\frac{3}{4}$$

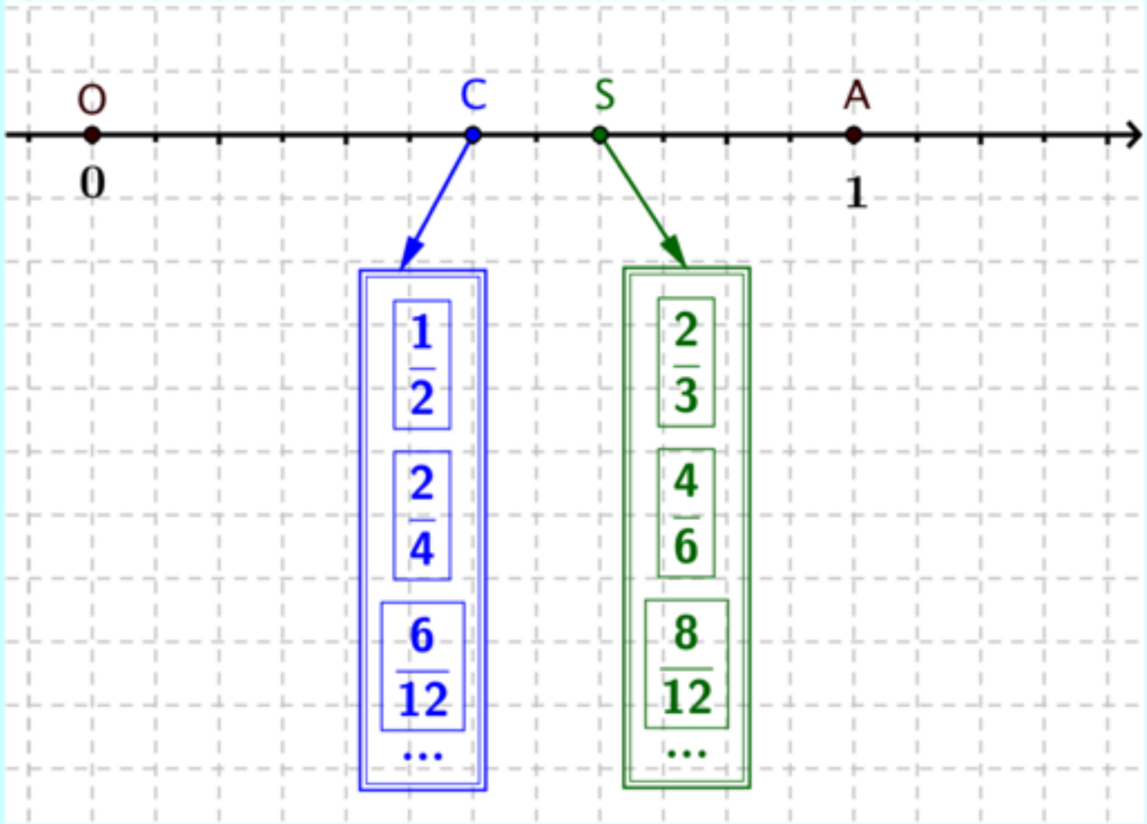
Numeratore 3

$$\frac{3}{4}$$

Denominatore 4

Rappresentare frazioni sulla retta

Un punto rappresenta una classe di frazioni equivalenti



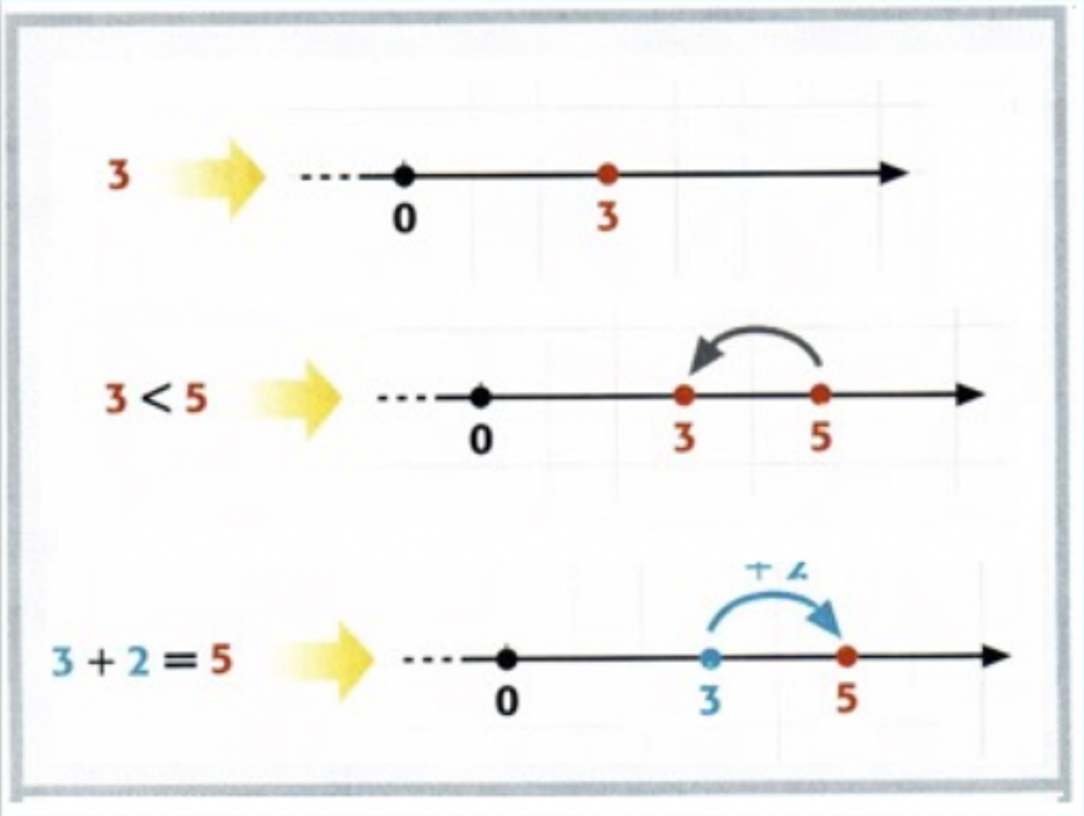
Che cos'è un numero?

Penso ai numeri naturali sulla retta

Un punto rappresenta un numero naturale

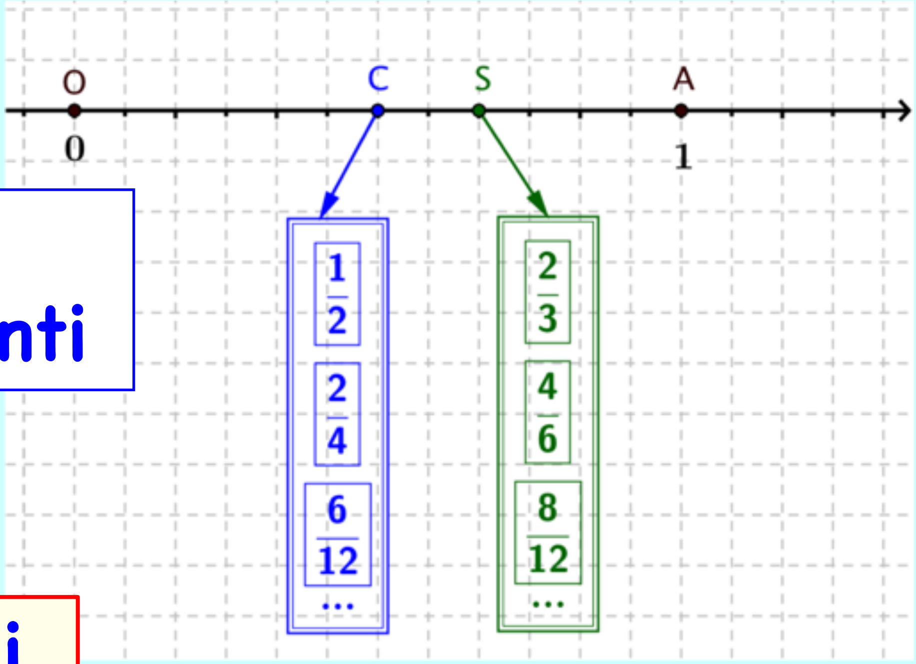
Confronto un numero naturale con un altro

Addiziono un numero naturale con un altro



Che cos'è un numero?

Penso alle frazioni sulla retta

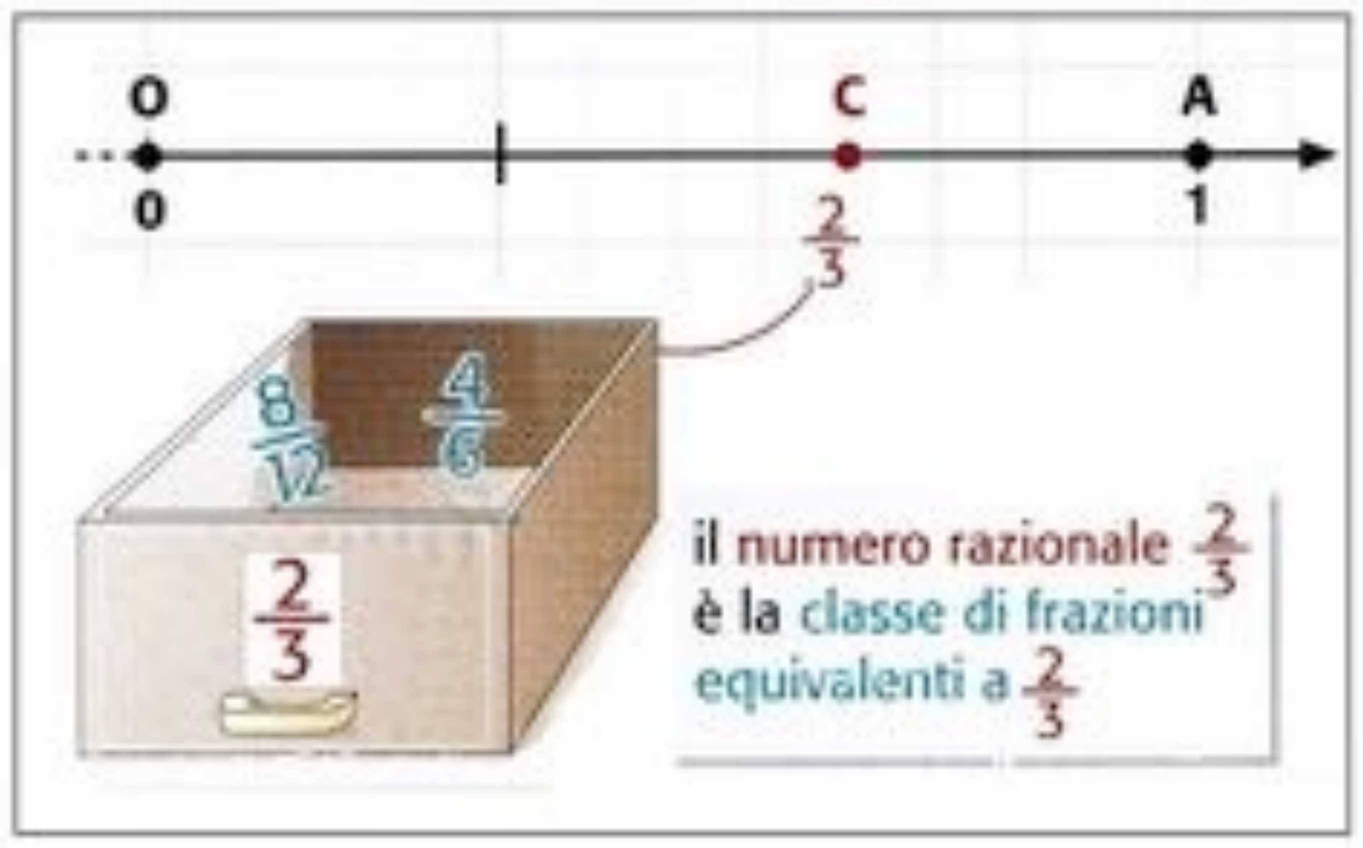


Un punto rappresenta una classe di frazioni equivalenti

Un numero è una classe di frazioni equivalenti.

Che cos'è un numero razionale?

Un numero razionale è una classe di frazioni equivalenti



Daniela Valenti, 2021

L'insieme Q dei *'numeri razionali'*

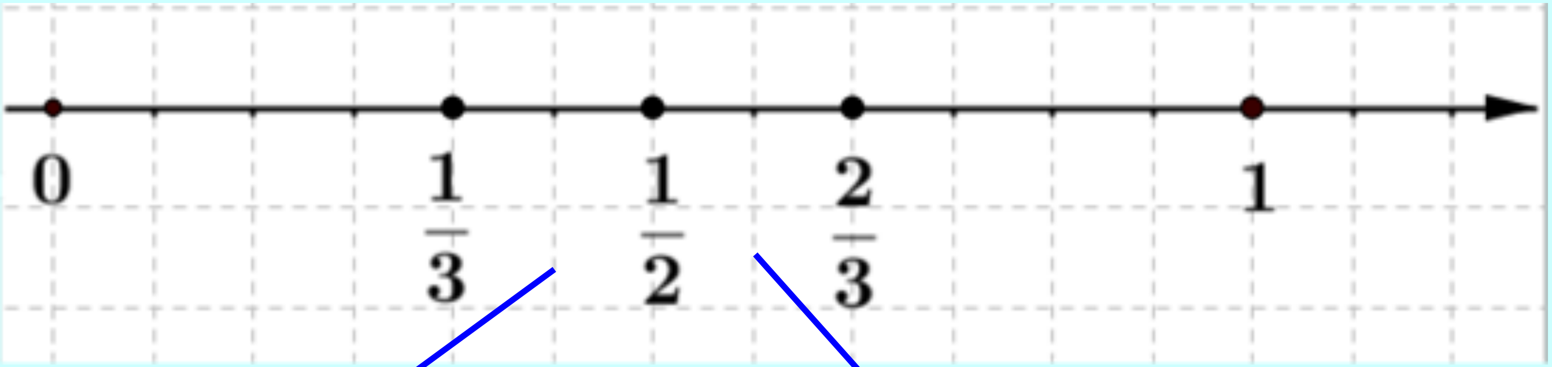
Razionale proviene dal latino '*ratio*': si legge 'razio' e ha molti significati fra i quali *'quoziente'*.
In matematica, trovi l'insieme di tutti i numeri che si ottengono come quoziente di due interi: **è l'insieme dei numeri razionali e si indica con la lettera *Q*,** iniziale di **q**uoziente.

L'insieme Q è ordinato

La rappresentazione sulla retta suggerisce:

l'insieme dei numeri razionali è ordinato

Scegli due numeri razionali; puoi sempre dire quale viene prima e quale dopo.



$\frac{1}{3}$ **viene prima di** $\frac{1}{2}$

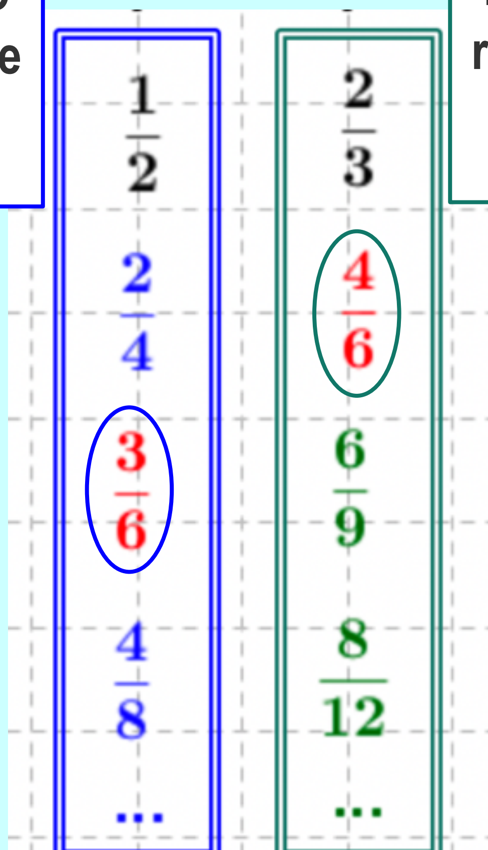
$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

$\frac{2}{3}$ **viene dopo** $\frac{1}{2}$

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$$

Confrontare due numeri razionali senza rappresentarli sulla retta

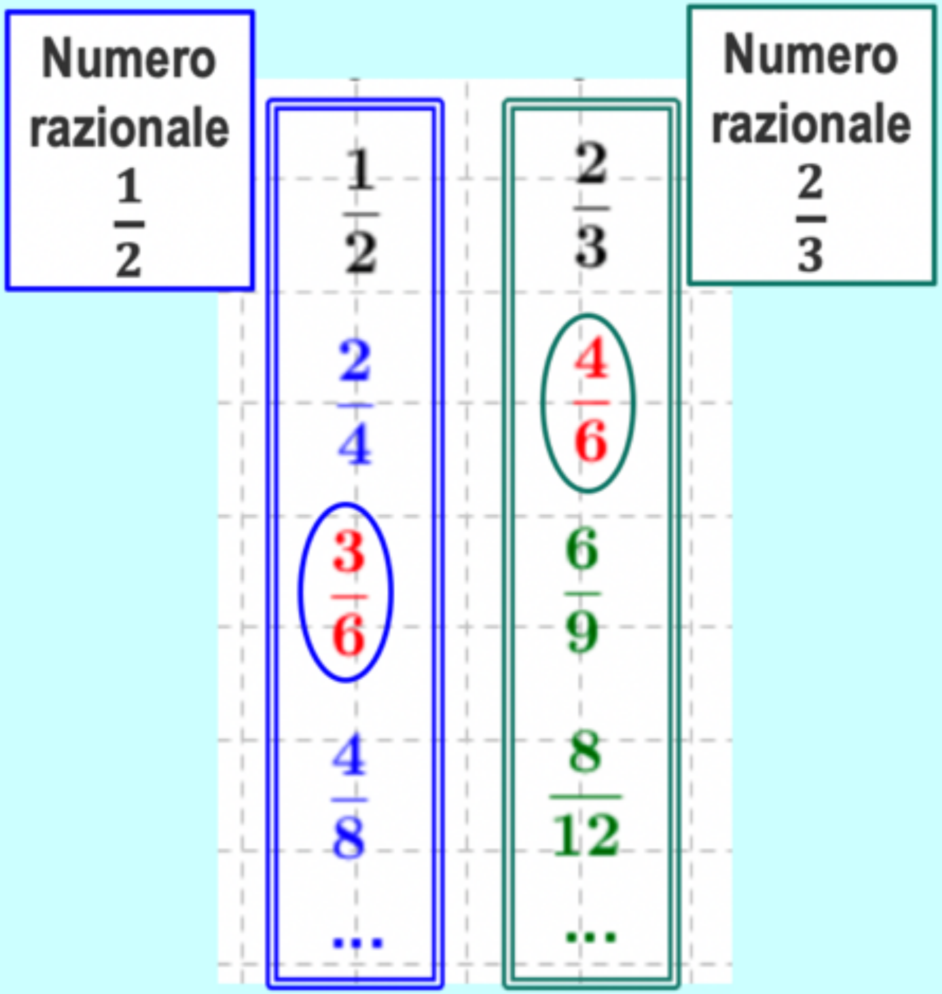
Numero razionale $\frac{1}{2}$



Numero razionale $\frac{2}{3}$

$$\frac{4}{6} > \frac{3}{6} \rightarrow \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$$

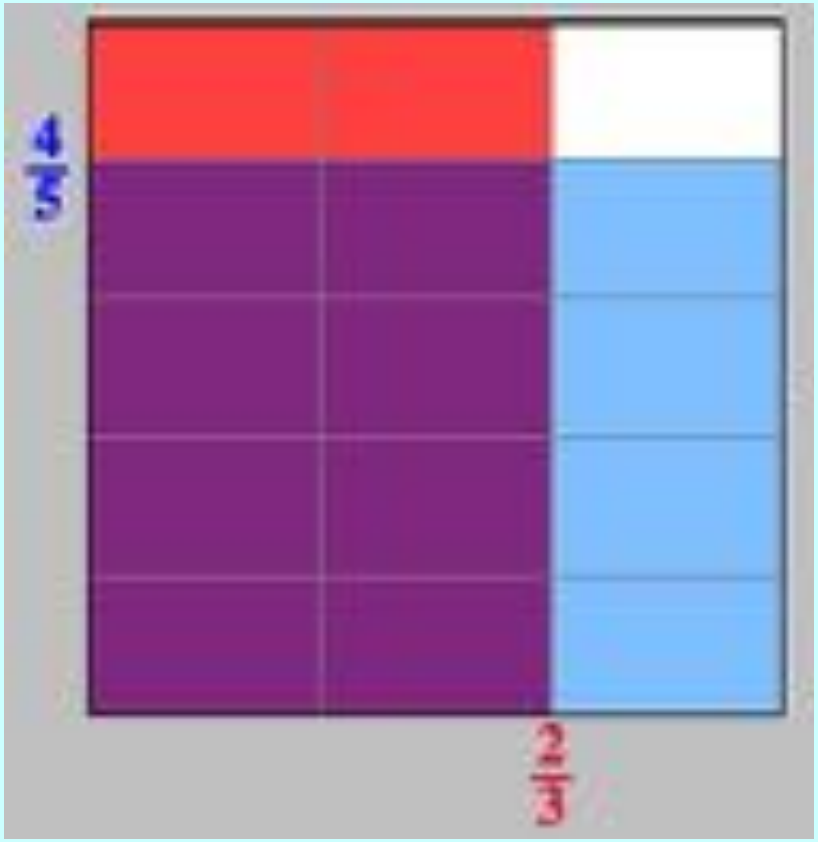
Addizionare due numeri razionali



$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$$

Moltiplicare due numeri razionali

‘Vedere’ il prodotto di due numeri razionali



$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5}$$

L'inverso di un numero razionale

a	4	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	1	0
Inverso di a $\frac{1}{a}$	$\frac{1}{4}$	5	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{1}=1$	*Trovo l'inverso x di 0?* ***NO***
$a\cdot\frac{1}{a}$	$4\cdot\frac{1}{4}=1$	$\frac{1}{5}\cdot 5=1$	$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1$	$1\cdot 1=1$	$0\cdot x=0$ *vera per qualunque x razionale*

Attenzione al significato dei simboli

$$\text{Se } a=\frac{1}{5}\text{ , trovi } \frac{1}{a}=5$$

Nell’insieme Q ‘scompare’ la divisione

Quando lavoriamo con i numeri razionali, la divisione diventa moltiplicazione per l’inverso.

Esempio

$$\left.\begin{array}{l} 5:2=\dfrac{5}{2} \\ 5\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2} \end{array}\right\rangle \quad 5:2=5\cdot\frac{1}{2}$$

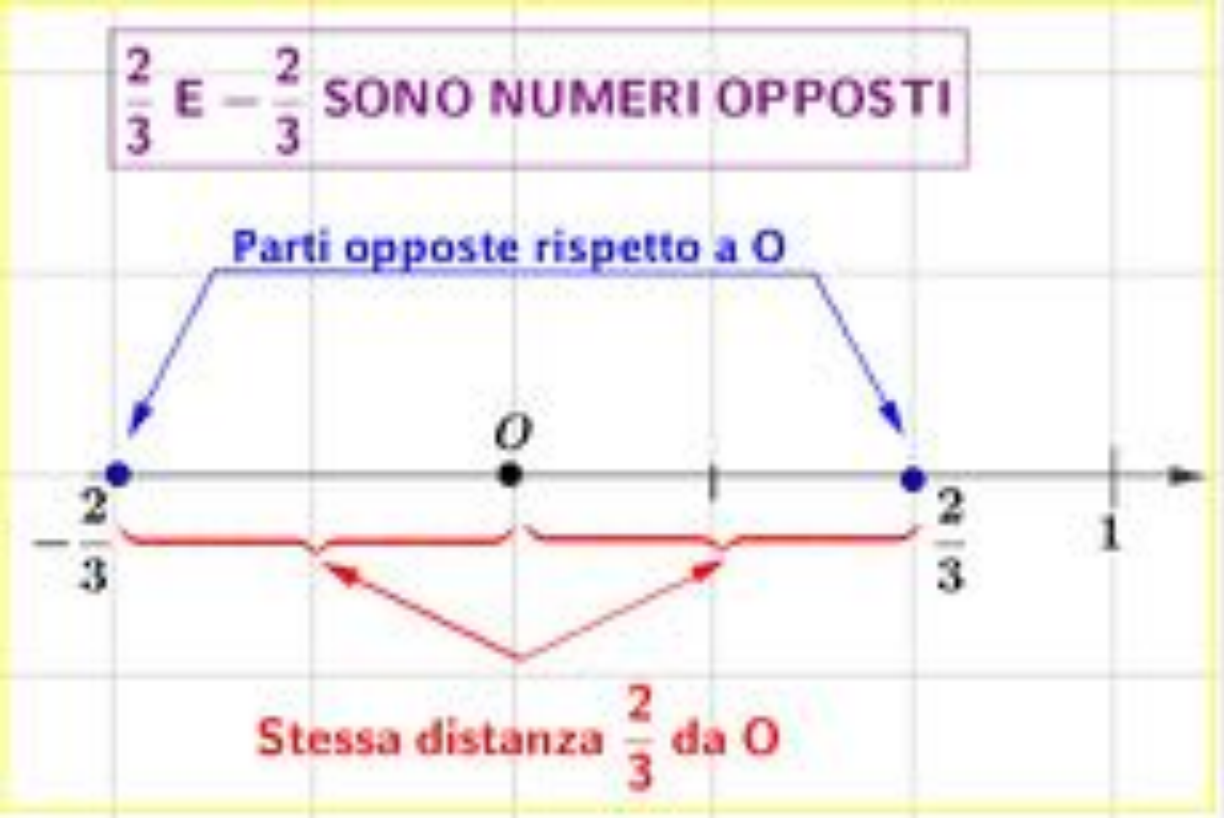
Anche nell'insieme Q non posso dividere per 0

Per dividere per *0*, scrivo, ad esempio

$$5:0=5\cdot\frac{1}{0}$$

Ma l'inverso di *0* non esiste,
perciò non posso dividere per *0*.

Numeri razionali opposti



Numeri razionali opposti

a	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	2	1	0
Opposto di a $-a$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{5}$	-2	-1	0
$-a+a=0$	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$	$\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{4}\right)=0$	$\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)=0$	$-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=0$	$-2+2=0$	$-1+1=0$	$0+0=0$

Attenzione al significato dei simboli: se a è negativo, $-a$ è positivo.

Daniela Valenti, 2021

Nell’insieme Q ‘scompare’ la sottrazione

Nell’insieme Q di razionali la sottrazione diventa addizione con l’opposto.

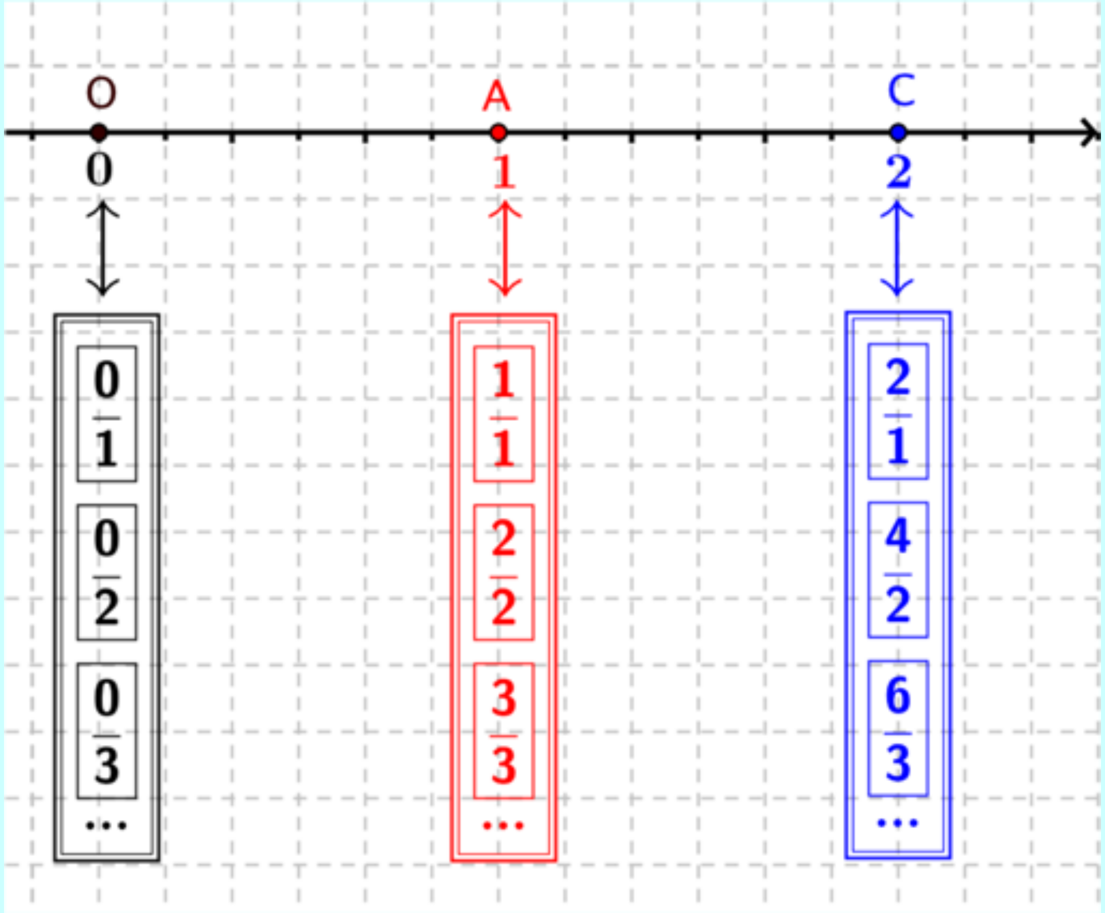
Esempio

$$\frac{5}{3}-\frac{4}{5}=\frac{5}{3}+\left(-\frac{4}{5}\right)$$

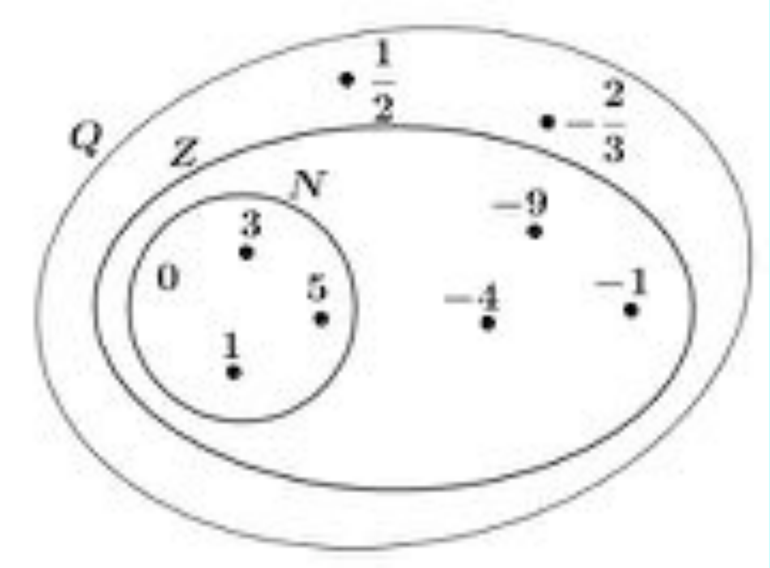
Proprietà di addizione e moltiplicazione nell'insieme Q dei razionali

Proprietà	Addizione	Moltiplicazione
Commutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Associativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Elemento neutro	*0 è l'elemento neutro* $a + 0 = a$	*1 è l'elemento neutro* $a \cdot 1 = a$
Elemento assorbente	*L'addizione **non** ha elemento assorbente*	*0 è l'elemento assorbente* $a \cdot 0 = 0$
Opposto	*Dato **a**, si trova **−a** tale che* $-a + a = 0$	
Inverso (o reciproco)		*Dato **a diverso da 0**, si trova* $\frac{1}{a}$ *tale che* $\frac{1}{a} \cdot a = 1$
Distributiva	$a\,(b + c) = ab + ac$	

I numeri interi sono particolari numeri razionali



Gli insiemi N, Z e Q



La figura mostra che:

- *N* è contenuto in *Z*, cioè i numeri naturali sono particolari numeri interi;
- *Z* è contenuto in *Q*, cioè i numeri interi sono particolari numeri razionali.