

Testo tratto da
E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti
Matematica oggi 1

3

Errore assoluto ed errore relativo

Approssimazione di numeri periodici

Nel paragrafo precedente si è visto che danno luogo a numeri decimali periodici le frazioni che, ridotte ai minimi termini, non hanno il denominatore composto solo da 2 o 5. Ecco un esempio:

$$\frac{3}{7} = 0,428571$$

Il numero decimale presenta dunque infinite cifre dopo la virgola, e tutte le cifre si ottengono ripetendo il periodo 428571, racchiuso fra parentesi.

Racchiudere fra parentesi il periodo è però solo una convenzione, scelta per continuare ad usare i numeri decimali anche quando la scrit-

tura decimale non riesce a tradurre esattamente la frazione.

In pratica, però, non si usano le cifre fra parentesi, ma si considera solo un certo numero di cifre dopo la virgola, troncando o arrotondando il decimale; così si scrive, per esempio:

$$\frac{3}{7} \approx 0,4$$

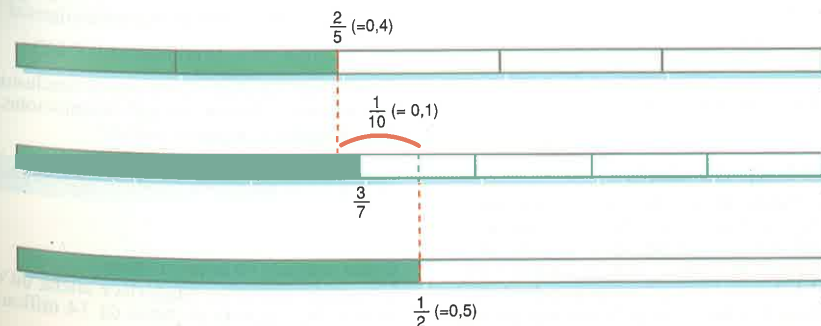
In questo caso risulta:

$$0,4 < 0,428571 < 0,5$$

e perciò si è certi (fig. 1) che 0,4 dista da $\frac{3}{7}$ meno di:

$$0,5 - 0,4 = 0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$$

Figura 1
Il decimale 0,4 approssima $\frac{3}{7}$ a meno di 0,1



Proprio per questo si dice che $0,4$ è un valore approssimato di $\frac{3}{7}$ a meno di 10^{-1} .

Analogamente, si avrà che:

- $0,43$, che ha 2 cifre dopo la virgola, approssima $\frac{3}{7}$ a meno di 10^{-2} ;

- $0,429$, che ha 3 cifre dopo la virgola, approssima $\frac{3}{7}$ a meno di 10^{-3} .

Se poi si esegue con il calcolatore la divisione $3:7$, sul visualizzatore compare:

0,4285714

numero con 7 cifre dopo la virgola; si può allora dire che il calcolatore approssima la frazione a meno di 10^{-7} .

Che cosa vuol dire «buona approssimazione»

L'approssimazione data dal calcolatore sembra davvero molto buona.

In realtà, non si può parlare di approssimazione «buona» in assoluto, perché un'approssimazione che va bene per certi problemi diventa inadeguata per altri.

Ecco qualche esempio.

- Quando si misura una strada, si esprime la lunghezza in chilometri e, come sottomultiplo, si arriva al metro (che è 10^{-3} km); questo vuol dire che la lunghezza della strada è ben espressa da un numero con tre cifre dopo la virgola.
- Quando si misurano le dimensioni di una stanza per rifare il pavimento, si esprimono le lunghezze in metri e centimetri (che sono 10^{-2} m); questo vuol dire che le dimensioni sono ben espresse da numeri con due cifre dopo la virgola.
- Il meccanico che costruisce un oggetto con il tornio, misura le lunghezze in metri, arrivando anche ai decimillimetri (che sono 10^{-4} m); questo vuol dire che le dimensioni di un pezzo meccanico sono adeguatamente espresse da numeri con quattro cifre dopo la virgola.

L'errore di approssimazione

Un problema che conduce a riflettere meglio sulle approssimazioni può essere il seguente.

Gli aiuti che una nazione invia ai paesi in via di sviluppo sono spesso indicati da una frazione del bilancio; perciò si può calcolare la somma da stanziare usando le frazioni o i deci-

mali. Quali errori si possono commettere usando i decimali?

Per capire meglio di che si tratta, conviene lavorare su un caso numerico: si stabilisce di inviare $\frac{1}{700}$ del bilancio, tenendo presente che

$$\text{risulta: } \frac{1}{700} = \frac{1}{7} \cdot 10^{-2} = 0,00(142857)$$

Ecco che cosa può succedere in due casi diversi:

A. Nel bilancio annuale di una singola persona che guadagna 14 milioni di lire, la somma da inviare, calcolata con le frazioni, sarà:

$$\frac{1}{700} \cdot 14\,000\,000 = \frac{1}{7} \cdot 10^{-2} \cdot 14 \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^4 = 20\,000$$

Approssimando la frazione a meno di 10^{-3} si avrà invece:

$$0,001 \cdot 14\,000\,000 = 14\,000$$

L'approssimazione scelta porta dunque ad inviare 14 000 lire, invece che 20 000 lire; si inviano perciò 6000 lire in meno.

Ora, 6000 indica proprio l'errore commesso; si ha cioè

$$6000 = 20\,000 - 14\,000$$

B. Nel bilancio annuale di un comune, che ammonta a 14 miliardi, la somma da inviare, calcolata con le frazioni, sarà:

$$\frac{1}{700} \cdot 14\,000\,000\,000 = \frac{1}{7} \cdot 10^{-2} \cdot 14 \cdot 10^9 = 2 \cdot 10^7 = 20\,000\,000$$

Approssimando la frazione a meno di 10^{-3} sarà invece:

$$0,001 \cdot 14\,000\,000\,000 = 14\,000\,000$$

Ora, l'errore commesso è dato da:

$$20\,000\,000 - 14\,000\,000 = 6\,000\,000$$

Il problema conduce ad una prima conclusione: per valutare l'errore di approssimazione, si deve eseguire il seguente calcolo:

$$\text{errore} = \text{risultato esatto} - \text{risultato approssimato}$$

Errore assoluto ed errore relativo

L'esempio numerico suggerisce anche un'osservazione: quando si passa da 14 milioni a

14 miliardi, che è 14 milioni moltiplicato per 1000, anche l'errore si moltiplica per 1000. In tutti e due i casi rimane invece costante il rapporto fra l'errore ed il risultato esatto; si ha infatti:

$$\text{caso A. } \frac{\text{errore}}{\text{risultato esatto}} = \frac{6000}{20\,000} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$\text{caso B. } \frac{\text{errore}}{\text{risultato esatto}} = \frac{6\,000\,000}{20\,000\,000} = \frac{3}{10} = 0,3$$

Il rapporto che rimane costante prende anche il nome di *errore relativo*; proprio per questo l'errore introdotto inizialmente prende anche il nome di *errore assoluto*.
In conclusione si ha:

$$\text{errore assoluto} = \text{risultato esatto} - \text{risultato approssimato}$$

$$\text{errore relativo} = \frac{\text{errore assoluto}}{\text{risultato esatto}}$$

Verifiche

Conoscenze

- Come è scritto un decimale che approssima una frazione a meno di 10^{-3} ?
- Quando si usano i valori approssimati, come si calcola l'errore assoluto?
- Quando si usano i valori approssimati, come si calcola l'errore relativo?

Comprensione

- Spiegare perché non ha senso parlare di buona approssimazione in assoluto, portan-

do almeno due esempi diversi da quelli dati dal testo.

- L'errore relativo può essere un numero più grande di 1?

Applicazioni

- Molti calcolatori mostrano sul visualizzatore 7 cifre dopo la virgola, ma lavorano con valori approssimati con 10 cifre dopo la virgola; in tal caso qual è l'approssimazione effettiva data dal calcolatore? Leggere le istruzioni del proprio calcolatore sull'argomento.

Leggere le istruzioni del proprio calcolatore sull'argomento.

- Calcolare l'espressione:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{12}$$

nei seguenti modi:

- lavorando con le frazioni;
- lavorando con i decimali che approssimano le frazioni a meno di 10^{-1} ;
- lavorando con i decimali che approssimano le frazioni a meno di 10^{-3} ;
- lavorando con il calcolatore. Valutare l'errore assoluto e relativo negli ultimi tre casi.

- Calcolare con il calcolatore l'espressione seguente:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{4}$$

Spiegare il risultato ottenuto, tenendo presenti i primi due esercizi.

- Ripetere l'esercizio 2 a partire dall'espressione seguente:

$$\frac{13}{14} \cdot \frac{7}{26}$$

- Calcolare con il calcolatore l'espressione seguente:

$$\frac{13}{14} \cdot \frac{7}{26} - \frac{1}{4}$$

Spiegare il risultato ottenuto.

Errore assoluto ed errore relativo. Esercizi

Calcoli con frazioni e numeri decimali

1. Calcola l'errore assoluto e l'errore relativo che commetti se scrivi come risultati delle seguenti divisioni quelli indicati qui sotto.

$$2:3=0,6$$

$$2:3=0,7$$

$$2:3=0,66$$

$$2:3=0,6$$

$$2:3=0,667$$

$$3:4=0,7$$

$$3:4=0,75$$

2. Fra le seguenti formule scegli quelle corrette e motiva la tua scelta.

$$\frac{2}{3}=0,7$$

$$\frac{2}{3}\cong 0,7$$

$$\frac{3}{4}=0,75$$

$$\frac{3}{4}\cong 0,75$$

$$\frac{3}{4}\cong 0,7$$

3. Calcola l'errore assoluto e l'errore relativo che commetti se scrivi come risultati delle seguenti divisioni quelli indicati qui sotto.

$$7:6=1,1$$

$$7:6=1,2$$

$$7:6=1,16$$

$$7:6=1,17$$

$$7:6=1,167$$

$$47:40=1,1$$

$$47:40=1,2$$

$$47:40=1,17$$

$$47:40=1,175$$

4. Fra le seguenti formule scegli quelle corrette e motiva la tua scelta.

$$\frac{7}{6}=1,17$$

$$\frac{7}{6}\cong 1,17$$

$$\frac{47}{40}=1,175$$

$$\frac{47}{40}\cong 1,175$$

$$\frac{47}{40}\cong 1,17$$

5. Calcola l'errore assoluto e l'errore relativo che commetti se scrivi come risultati delle seguenti divisioni quelli indicati qui sotto.

$$13:15=0,8$$

$$13:15=0,86$$

$$13:15=0,87$$

$$13:15=0,867$$

$$7:8=0,8$$

$$7:8=0,9$$

$$7:8=0,87$$

$$7:8=0,875$$

6. Fra le seguenti formule scegli quelle corrette e motiva la tua scelta.

$$\frac{13}{15}=0,8$$

$$\frac{13}{15}\cong 0,8$$

$$\frac{7}{8}=0,875$$

$$\frac{7}{8}\cong 0,875$$

$$\frac{7}{8}\cong 0,87$$

7. Esamina le seguenti espressioni.

$$\frac{5}{6} + \frac{1}{24}$$

$$\frac{8}{21} + \frac{2}{7}$$

Risolvi i seguenti quesiti:

- Calcola ogni espressione lavorando con le frazioni.
- Calcola ogni espressione lavorando con i decimali che approssimano le frazioni a meno di $1/10$ (10^{-1}).
- Calcola ogni espressione lavorando con i decimali che approssimano le frazioni a meno di $1/100$ (10^{-2}).
- Valuta l'errore relativo e l'errore assoluto che commetti negli ultimi due casi.

8. Esamina le seguenti espressioni.

$$\frac{11}{24} \cdot \frac{15}{22} \qquad \frac{13}{34} \cdot \frac{17}{26}$$

Risolvi i seguenti quesiti:

- Calcola ogni espressione lavorando con le frazioni.
- Calcola ogni espressione lavorando con i decimali che approssimano le frazioni a meno di $1/10$ (10^{-1}).
- Calcola ogni espressione lavorando con i decimali che approssimano le frazioni a meno di $1/100$ (10^{-2}).
- Valuta l'errore relativo e l'errore assoluto che commetti negli ultimi due casi.

9. Esamina le seguenti espressioni.

$$\frac{8}{3} - \frac{1}{6} \qquad \frac{17}{14} - \frac{5}{7}$$

Risolvi i seguenti quesiti:

- Calcola ogni espressione lavorando con le frazioni.
- Calcola ogni espressione lavorando con i decimali che approssimano le frazioni a meno di $1/10$ (10^{-1}).
- Calcola ogni espressione lavorando con i decimali che approssimano le frazioni a meno di $1/100$ (10^{-2}).
- Valuta l'errore relativo e l'errore assoluto che commetti negli ultimi due casi.

10. Esamina le seguenti espressioni.

$$\frac{13}{21} \cdot \frac{26}{7} \qquad \frac{11}{28} \cdot \frac{5}{8}$$

Risolvi i seguenti quesiti:

- Calcola ogni espressione lavorando con le frazioni.
- Calcola ogni espressione lavorando con i decimali che approssimano le frazioni a meno di $1/10$ (10^{-1}).
- Calcola ogni espressione lavorando con i decimali che approssimano le frazioni a meno di $1/100$ (10^{-2}).
- Valuta l'errore relativo e l'errore assoluto che commetti negli ultimi due casi.

11. Esamina le seguenti espressioni.

$$\frac{13}{28} \cdot \frac{14}{39} - \frac{13}{27} \cdot \frac{26}{9} \qquad \frac{10}{17} \cdot \frac{34}{30} + \frac{7}{13} \cdot \frac{21}{13}$$

Risolvi i seguenti quesiti:

- Calcola ogni espressione lavorando con le frazioni.
- Calcola ogni espressione lavorando con i decimali che approssimano le frazioni a meno di $1/10$ (10^{-1}).
- Calcola ogni espressione lavorando con i decimali che approssimano le frazioni a meno di $1/100$ (10^{-2}).
- Valuta l'errore relativo e l'errore assoluto che commetti negli ultimi due casi.

Calcoli approssimati con la calcolatrice

12. Esamina le seguenti divisioni.

$$2:3 \quad 7:6 \quad 3:4 \quad 47:40 \quad 13:15 \quad 7:8$$

A partire da ogni divisione risolvi i seguenti quesiti.

- Calcola con la calcolatrice il risultato della divisione.
- Valuta l'errore assoluto e l'errore relativo commesso dalla calcolatrice.

13. Esamina le seguenti espressioni.

$$\frac{5}{6} + \frac{1}{24} - \frac{7}{8} \quad \frac{11}{24} \cdot \frac{15}{22} - \frac{5}{16}$$

A partire da ogni espressione risolvi i seguenti quesiti.

- Calcola l'espressione con carta e penna, lavorando solo con le frazioni
- Calcola l'espressione con la calcolatrice.
- Confronta i due risultati.

14. Esamina le seguenti espressioni.

$$\frac{8}{3} - \frac{1}{6} - \frac{5}{2} \quad \frac{11}{28} \cdot \frac{5}{8} - \frac{22}{35}$$

A partire da ogni espressione risolvi i seguenti quesiti.

- Calcola l'espressione con carta e penna, lavorando solo con le frazioni
- Calcola l'espressione con la calcolatrice.
- Confronta i due risultati.

15. Esamina le seguenti espressioni.

$$\frac{8}{21} + \frac{2}{7} - \frac{2}{3} \quad \frac{13}{34} \cdot \frac{17}{26} - \frac{1}{4}$$

A partire da ogni espressione risolvi i seguenti quesiti.

- Calcola l'espressione con carta e penna, lavorando solo con le frazioni
- Calcola l'espressione con la calcolatrice.
- Confronta i due risultati.

16. Esamina le seguenti espressioni.

$$\frac{17}{14} - \frac{5}{7} - \frac{1}{2} \quad \frac{13}{21} \cdot \frac{26}{7} - \frac{1}{6}$$

A partire da ogni espressione risolvi i seguenti quesiti.

- Calcola l'espressione con carta e penna, lavorando solo con le frazioni
- Calcola l'espressione con la calcolatrice.
- Confronta i due risultati.