Funzioni continue e discontinue. Esercizi

Fenomeni continui e discontinui

1. Per studiare la dilatazione termica di una sostanza, per esempio la paraffina, si può procedere così: si riscalda un blocchetto di paraffina, inizialmente mantenuto alla temperatura di 0°, e si misura il volume V del blocchetto al variare della temperatura T.
Il fenomeno è descritto, in prima approssimazione, da una legge del tipo

$$V=V_0+kT,$$

dove k è una costante e V_0 indica il volume alla temperatura di 0°. Questa legge descrive però il fenomeno solo se la temperatura si mantiene inferiore alla temperatura di fusione T_F, che è di circa 50°. Infatti, quando avviene la fusione, si ha un brusco aumento di volume, senza alcun cambiamento di temperatura. Continuando poi a scaldare la paraffina liquida, senza però raggiungere la temperatura di ebollizione T_E, si ha ancora un graduale aumento di volume descritto dalla legge

$$V=V_F+hT,$$

dove h è una costante (diversa da k) e V_F indica il volume della paraffina liquida alla temperatura di fusione.
La dilatazione della paraffina è regolata dunque dalla seguente legge:

$$V=V_0+kT, \quad \text{per } 0°\leq T<T_F,$$
$$V=V_F+hT, \quad \text{per } T_F\leq T\leq T_E.$$

Rappresentare graficamente la legge nell'intervallo $0°\leq T\leq T_E$ e scegliere fra le seguenti frasi quelle che descrivono correttamente il fenomeno e il corrispondente grafico:

a) – il fenomeno è continuo,
– il grafico della legge è continuo;
b) – il fenomeno è continuo solo nell'intervallo $0°\leq T<T_F$,
– il grafico è continuo solo nell'intervallo $0°\leq T<T_F$;
c) – il fenomeno ha una discontinuità in corrispondenza alla fusione,
– il grafico è discontinuo nel punto d'ascissa $T=T_F$.

2. Le figg. 1, 2, 3 e 4 rappresentano alcuni dei segnali elettrici che sono visualizati più frequentemente sullo schermo di un oscilloscopio.
Esaminare ed interpretare le varie figure, distinguendo le curve continue da quelle discontinue.

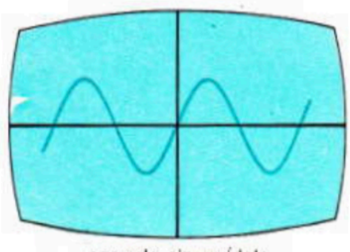

Fig. 1 segnale sinusoidale

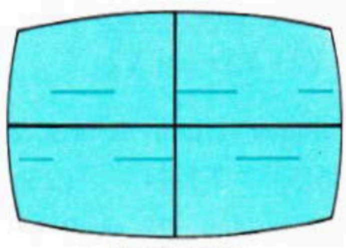

Fig. 2 onda quadra

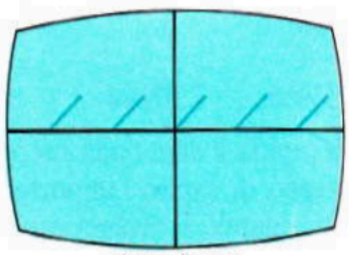

Fig. 3 dente di sega

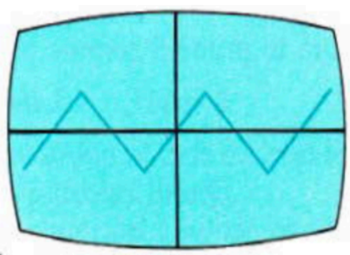

Fig. 4 onda triangolare

3. Esaminare i due seguenti sistemi di tassazione del reddito:

A) per redditi annui fino a 15 milioni, si paga il 18% del reddito,
per redditi annui fino a 20 milioni, si paga il 22% del reddito,
per redditi annui fino a 25 milioni, si paga il 26% del reddito,
per redditi annui fino a 30 milioni, si paga il 30% del reddito,
....

B) per i primi 15 milioni annui, l'imposta è il 18% del reddito,
per la parte eccedente i 15 milioni fino a 20 milioni, si paga il 22%,
per la parte eccedente i 20 milioni fino a 25 milioni, si paga il 26%,
per la parte eccedente i 25 milioni fino a 30 milioni, si paga il 30%,
....

risolvere i seguenti quesiti:

- scrivere la legge che lega l'imposta I che si paga al reddito annuo R nel caso A) e tracciarne il grafico,
- scrivere la legge che lega l'imposta I che si paga al reddito annuo R nel caso B) e tracciarne il grafico,
- illustrare le principali differenze fra le due leggi, fissando in particolare l'attenzione sulla continuità o discontinuità delle funzioni ottenute.

4. Intorno al 1897, l'economista italiano Vilfredo Pareto osservò una certa regolarità nella distribuzione dei redditi nei paesi capitalisti.
Esaminando dati statistici rilevati in diversi paesi, Pareto considerava il numero y di persone che avevano un reddito annuo superiore o uguale ad un valore x; rappresentando graficamente i dati ordinati in questo modo, trovava che, nella maggior parte dei casi, i dati venivano ben raccordati da curve d'equazione

$$y=\frac{A}{(x-b)^n}$$

dove A è una costante caratteristica del paese esaminato, la costante b indica il minimo reddito rilevato e l'esponente n assume generalmente valori vicini a 1,5.
Tracciare un grafico approssimativo delle curve indicate, chiamate anche **curve di Pareto**, e descrivere il comportamento delle curve in corrispondenza del valore $x=b$, spiegandone il significato economico.

Definizione di funzione continua in un punto

Nella presentazione è data la seguente definizione di funzione continua in un punto:
una funzione $y=f(x)$ è continua in un punto d'ascissa $x=a$ se e solo se risulta

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Esaminare le definizioni di funzione continua in punto esposte negli esercizi dal 5 al 13 e verificare che sono equivalenti a quella data nel testo.

5. Una funzione è continua in un punto d'ascissa $x=a$ se e solo se risultano verificate le seguenti condizioni:

I) $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$

II) $\ell=f(a)$

6. Una funzione è continua in un punto d'ascissa $x=a$ se e solo se risultano verificate le seguenti condizioni:

I) $\lim_{x\to a^+} f(x)=\ell_1$

II) $\lim_{x\to a^-} f(x)=\ell_2$

III) $\ell_1=\ell_2=f(a)$

7. Una funzione è continua in un punto d'ascissa $x=a$ se e solo se risulta

$$\lim_{x\to a} [f(x)-f(a)]=0$$

8. Una funzione è continua in un punto d'ascissa $x=a$ se e solo se risulta

$$\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a) \quad .$$

(Scrivendo $x=a+h$, si ha che, quando $h\to 0$, $x\to a$ ...)

9. Una funzione è continua in un punto d'ascissa $x=a$ se e solo se risulta

$$\lim_{h\to 0} [f(a+h)-f(a)]=0$$

(Vedere anche lo svolgimento dell'esercizio precedente ...)

10. La linea curva continua è quella la cui natura è espressa da una sola funzione determinata di x. Ma se la linea curva è composta da differenti parti BM, MD, DM, ... determinate da più funzioni di x, ... noi chiamiamo queste specie di linee curve discontinue o miste o irregolari, giacché esse non sono formate secondo una legge costante e sono composte di porzioni di differenti curve continue (Eulero 1748).

11. La legge di continuità consiste nel fatto che una quantità non può passare da uno stato ad un altro senza passare attraverso tutti gli stati intermedi che sono soggetti alla stessa legge (Arbogast 1791).

12. Sia $f(x)$ una funzione della variabile x e supponiamo che, per ogni valore di x entro due limiti dati, la funzione ammetta sempre un valore finito. Se, partendo da un valore di x compreso entro questi limiti, si attribuisce alla variabile x un incremento infinitesimo α, la funzione stessa riceverà per incremento la differenza

$$f(x+\alpha)-f(x),$$

che dipenderà al tempo stesso dalla nuova variabile α e dal valore di x. Ciò posto, la funzione $f(x)$ sarà, entro i due limiti assegnati alla variabile x, funzione continua di questa variabile se, per ogni valore di x compreso fra questi due limiti, il valore numerico della differenza

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

decrescerà indefinitamente insieme a quello di α (Cauchy 1821).

Casi di discontinuità

Per risolvere gli esercizi da 13 a 26 bisogna tenere presenti le nozioni relative ai punti di discontinuità richiamate qui sotto.

Una funzione y = f(x) può presentare, in corrispondenza all'ascissa x = a,

- ***un punto di discontinuità infinita, se si verifica che***

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

- ***un punto di salto, se si verificano le condizioni seguenti***

I) $\lim_{x\to a^-} f(x)=\ell_1$

II) $\lim_{x\to a^+} f(x)=\ell_2$

III) $\ell_1\neq\ell_2$

- ***un punto di discontinuità eliminabile, se si verificano le condizioni seguenti***

I) $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$

II) $f(a)\neq\ell$

oppure

II') ***non esiste*** $f(a)$.

13. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni individuandone gli eventuali punti di discontinuità infinita:

$$y=\frac{1}{x}, \qquad y=\frac{1}{x}-1, \qquad y=\frac{1}{x-1}$$

14. Ripetere l'esercizio 13. a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\frac{1}{x^2}, \qquad y=\frac{1}{x^2}+1, \qquad y=\frac{1}{(x+1)^2}$$

15. Ripetere l'esercizio 13. a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\ln x, \qquad y=\operatorname{tg} x$$

16. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni individuandone gli eventuali punti di salto:

$$y=\frac{|x|}{x}, \qquad y=x+\frac{|x|}{x}, \qquad y=x^2+\frac{|x|}{x}$$

17. Ripetere l'esercizio 16. a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=x-[x], \qquad y=x\cdot[x], \qquad y=2^{[x]}$$

18. Ripetere l'esercizio 16. a partire dalle seguenti funzioni:

$$\begin{cases} \text{per } x\le 1 & y=2x \\ \text{per } x>1 & y=3x \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{per } x\ge \pi & y=\cos x \\ \text{per } x<\pi & y=\operatorname{sen} x \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{per } x\ge 0 & y=2^x \\ \text{per } x<0 & y=x^2 \end{cases}$$

19. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni individuandone gli eventuali punti di discontinuità eliminabile. Spiegare come si potrebbe modificare la definizione della funzione in modo da eliminare tali discontinuità:

$$y=\frac{x^2+3x}{x}, \qquad y=\frac{2x^2-x-1}{x-1}, \qquad y=\frac{x^3+1}{x+1}$$

20. Ripetere l'esercizio 19. a partire dalle seguenti funzioni:

$$\begin{cases} \text{per } x\ne 1 & y=x \\ \text{per } x=1 & y=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{per } x\ne 0 & y=e^x \\ \text{per } x=0 & y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{per } x\ne \pi & y=\operatorname{sen} x \\ \text{per } x=\pi & y=1 \end{cases}$$

21. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni; individuare gli eventuali punti di discontinuità, indicandone il tipo:

$$y=\ln|x|, \qquad y=[x^2], \qquad \begin{cases} \text{per } x\ne 0 & y=\dfrac{1}{x} \\ \text{per } x=0 & y=0 \end{cases}$$

22. Ripetere l'esercizio 21. a partire dalle seguenti funzioni:

$$\begin{cases} \text{per } x\le 1 & y=2x \\ \text{per } x>1 & y=\dfrac{1}{x^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{per } x\ge 1 & y=2x \\ \text{per } x<1 & y=\dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

23. Ripetere l'esercizio 21. a partire dalle seguenti funzioni:

$$\begin{cases} \text{per } x\le 0 & y=x^2 \\ \text{per } 0<\le 1 & y=2x \\ \text{per } x>1 & y=2^x \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{per } x\le 0 & y=2^x \\ \text{per } 0<x\le 1 & y=2x \\ \text{per } x>1 & y=x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{per } x\le 0 & y=2x \\ \text{per } 0<x\le 1 & y=x^2 \\ \text{per } x>1 & y=2^x \end{cases}$$

24. Ripetere l'esercizio 21. a partire dalle seguenti funzioni:

$$\begin{cases} \text{per } x\le 0 & y=x \\ \text{per } 0<x\le 1 & y=\sqrt{x} \\ \text{per } x>1 & y=\ln x \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{per } x\le 0 & y=\ln(-x) \\ \text{per } 0<x\le 1 & y=x \\ \text{per } x>1 & y=\sqrt{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{per } x\le 0 & y=\sqrt{-x} \\ \text{per } 0>x\le 1 & y=x \\ \text{per } x>1 & y=\ln x \end{cases}$$

25. Disegnare almeno due curve che possono rappresentare una funzione $y=f(x)$, definita nell'insieme dei reali, di cui sono date le seguenti informazioni:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=-1, \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x)=1, \qquad f(3)=0$$

26. Ripetere l'esercizio 25. a partire dalle seguenti informazioni

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=3, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=-3, \qquad f(2)=1$$

Sulla definizione di funzione continua legata alla definizione formale di limite

In questa lezione è data la seguente definizione di funzione continua in un punto:

una funzione y=f(x) è continua in un punto d'ascissa x=a se e solo se risulta

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Esaminare le definizioni di funzione continua date negli esercizi 27e 28 per verificare se sono equivalenti a quella data in questa lezione.

27. Una funzione è continua in un punto d'ascissa $x=a$ se e solo se risulta

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = 0$$

28. Una funzione è continua in un punto d'ascissa $x=a$ se e solo se, scelto un qualunque numero positivo ε, si può trovare un corrispondente intorno $I(a)$, tale che risulti

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon, \qquad \text{quando si sceglie } x \text{ in } I(a).$$

Basarsi sulla definizione di funzione continua data nell'esercizio 27 e sulla definizione unitaria di limite data negli approfondimenti della lezione precedente.

Le definizioni di funzione continua date negli esercizi 29 e 30 sono tratte da opere di grandi matematici; tenere presente anche la definizione formale di limite data nella lezione precedente per confrontare tali definizioni con quella data in questa lezione.

29. La continuità è ancora un'idea confusa, che definisce come continua una funzione reale $f(x)$ di una variabile x quando, fissata una quantità δ, piccola quanto si vuole, si possa rendere

$$f(x) - f(x') < \delta$$

e questa disuguaglianza sussista poi ponendo in luogo di x' qualunque altro valore che più di esso si accosti ad x (Kronecker, negli appunti di Casorati del 1864).

30. È molto utile l'interpretazione geometrica della continuità quando si rappresenta la funzione $y=f(x)$ con il suo grafico (fig. 5). Sia $P_0(x_0, y_0)$ un punto del grafico. I punti $P(x, y)$ con

$$y_0 - \varepsilon < x < y_0 + \varepsilon$$

formano una "striscia orizzontale" J che contiene P_0. La continuità di f in x_0 significa che, data una qualunque striscia orizzontale J, comunque sottile, si può trovare una striscia verticale I, data da

$$x_0 - \delta < y < x_0 + \delta,$$

tanto sottile che ogni punto P del grafico appartenente ad I, cade anche in J (Richard Courant 1934).

Fig.5