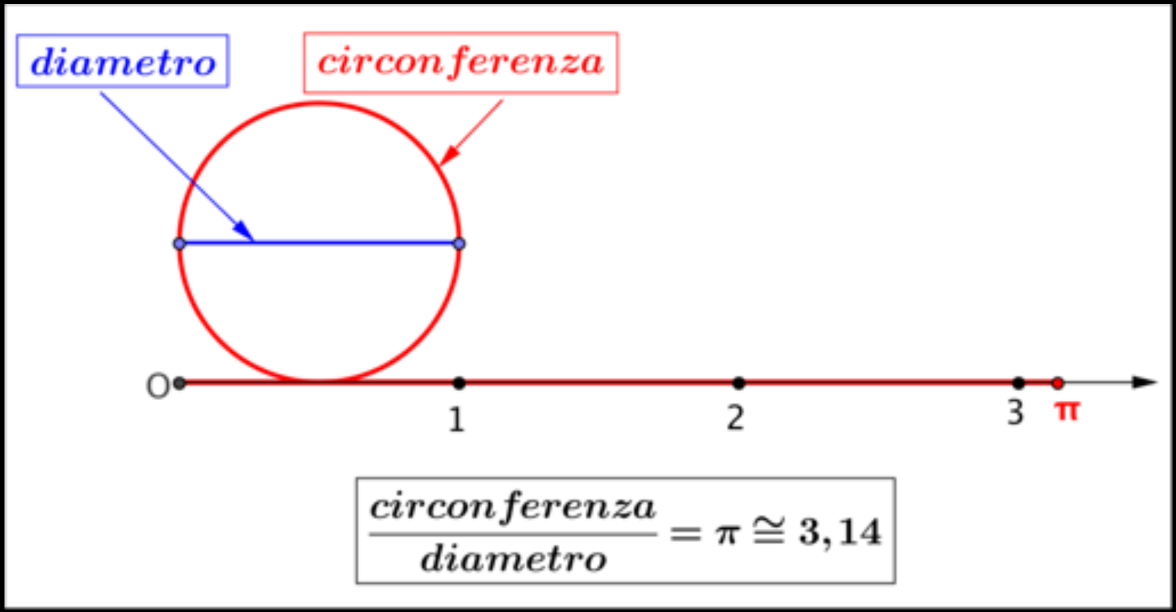
I numeri reali



Un video per esplorare il tema

Dove si trovano i numeri reali?

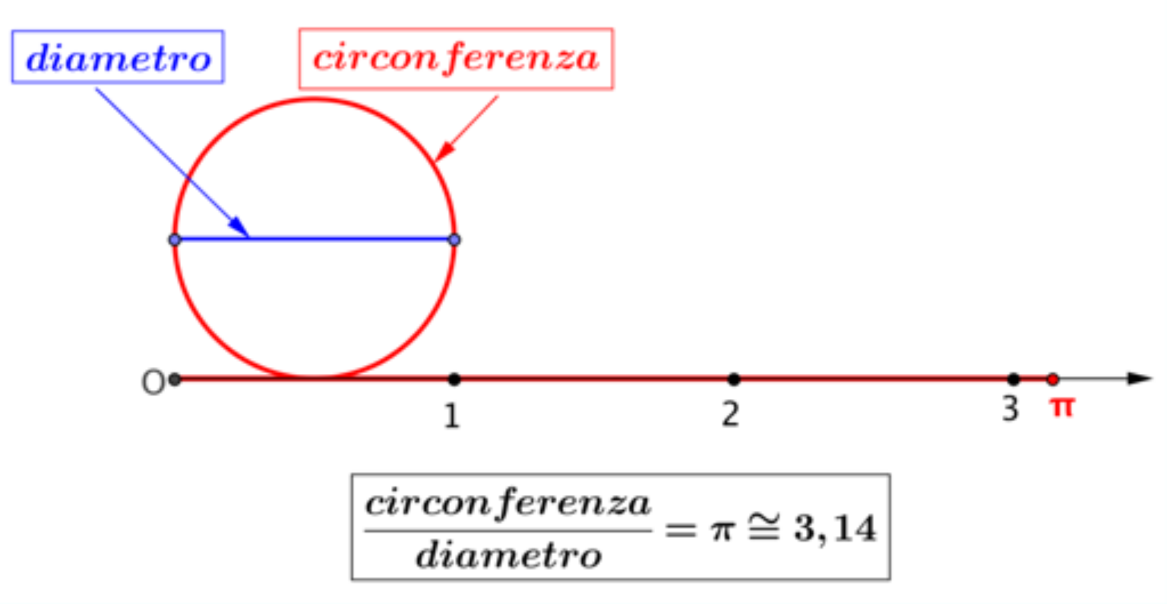
Ecco un breve video per trovare le prime risposte

Video ‘Dove si trovano i numeri reali?’

Daniela Valenti, 2021

Che cosa ha richiamato il video?

I numeri irrazionali non provengono solo dall'estrazione di radice; ad esempio è irrazionale anche il numero indicato con il simbolo π, che esprime il rapporto fra circonferenza e diametro.



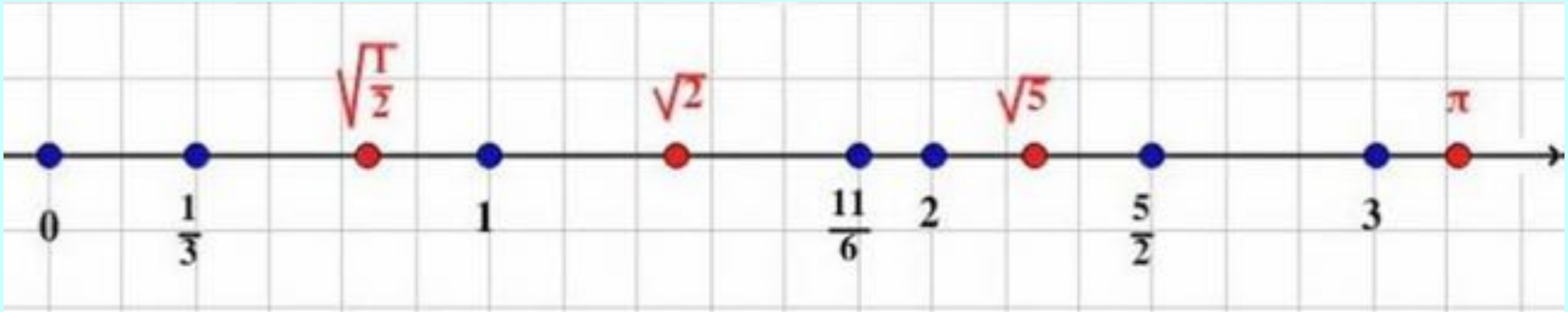
π è un *numero irrazionale*, perciò non può essere scritto esattamente con un numero decimale finito.

3,14 è un valore decimale approssimato di π

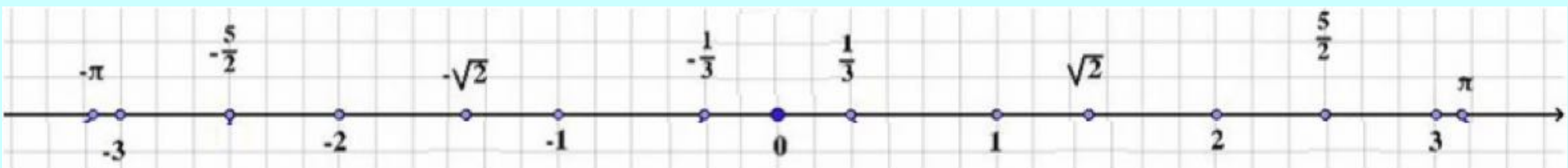
Daniela Valenti, 2021

Numeri razionali e irrazionali sulla retta

I numeri irrazionali trovano posto sulla retta



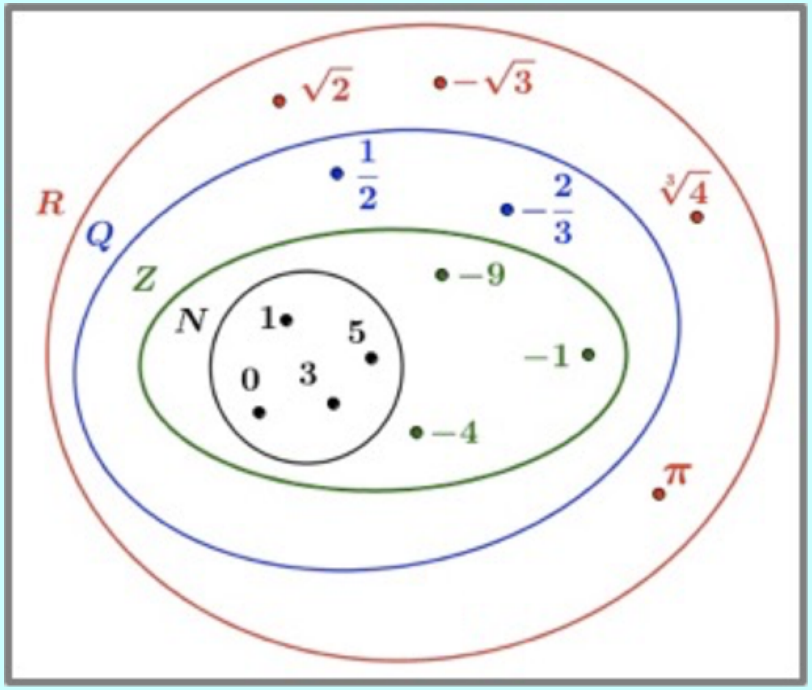
E sulla retta trovo anche gli opposti di questi numeri



Numeri razionali e irrazionali trovano tutti posto sulla retta e formano un unico insieme: l'insieme *dei numeri reali*

L'insieme R dei numeri reali

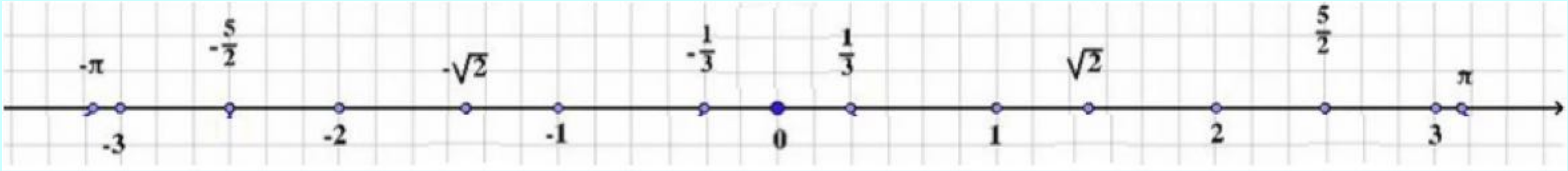
Ecco una figura per 'ritrovare', fra i numeri reali, i numeri razionali, interi e naturali.



La figura ricorda che:

- *N* è contenuto in *Z*, cioè i numeri naturali sono particolari numeri interi;
- *Z* è contenuto in *Q*, cioè i numeri interi sono particolari numeri razionali;
- *Q* è contenuto in *R*, cioè i numeri razionali sono particolari numeri reali.

L’insieme dei numeri reali è ordinato



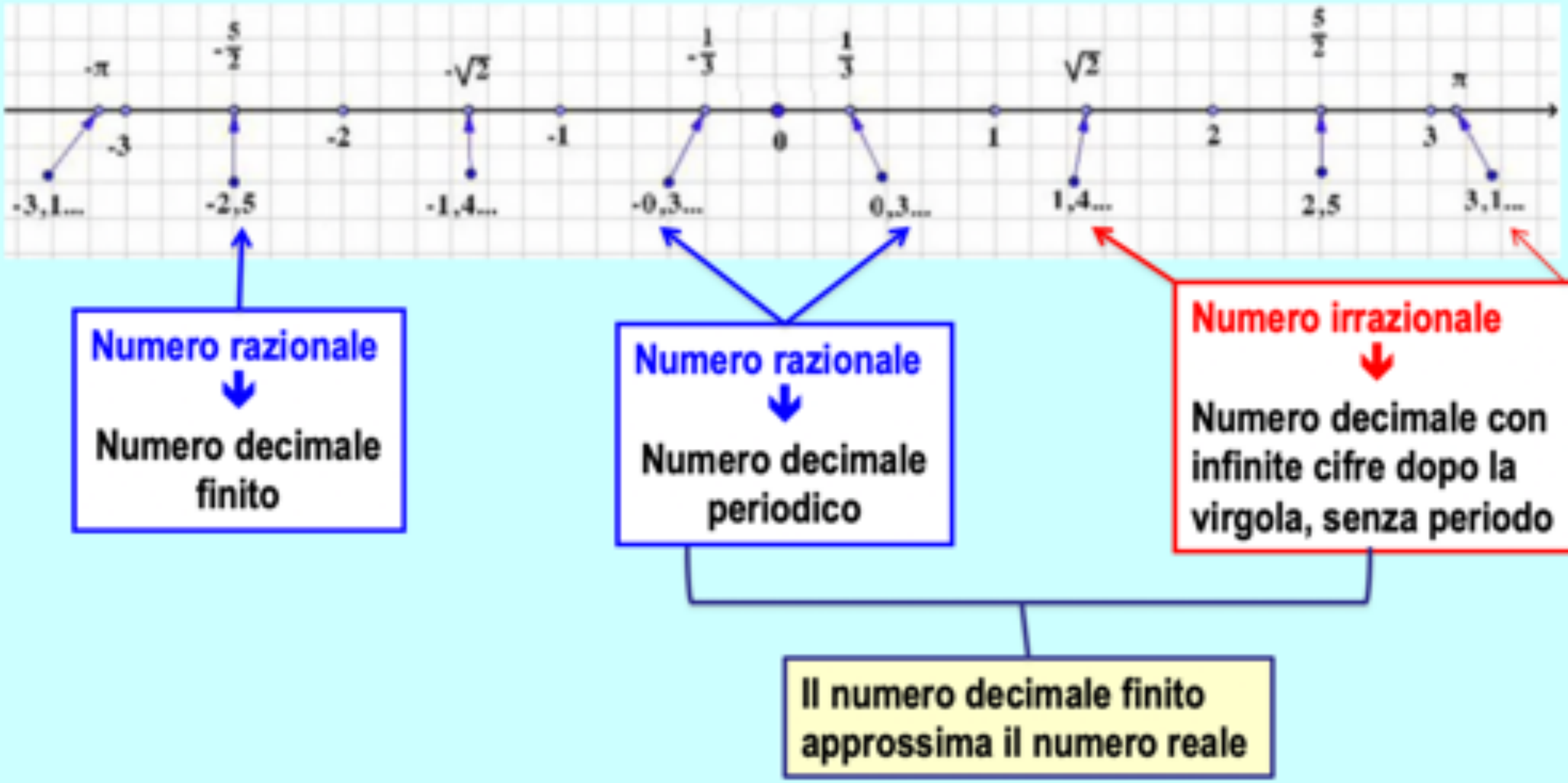
La rappresentazione sulla retta mostra i numeri reali in fila sulla retta uno dopo l’altro, perciò posso sempre stabilire quale viene prima e quale dopo. Ad esempio la retta mostra che risulta:

$$\frac{1}{3} < \sqrt{2} < \frac{5}{2} < \pi$$

Ma la rappresentazione sulla retta richiede tempo e un disegno accurato; più rapido è il procedimento di confrontare numeri reali scritti in forma decimale.

Scrivere un numero reale in forma decimale

Una sintesi dei casi che si possono presentare



Daniela Valenti, 2021

Ordinare numeri reali scritti in forma decimale

Esempio.

Scrivere in ordine crescente i seguenti numeri

$$\frac{8}{5} \quad \frac{5}{3} \quad \sqrt{3} \quad \sqrt[3]{4} \quad \sqrt[4]{7}$$

Scrittura in forma decimale

A. Una cifra decimale	B. Due cifre decimali
$\frac{8}{5}=1,6$	$\frac{8}{5}=1,60$
$\frac{5}{3}\cong 1,6$	$\frac{5}{3}\cong 1,67$
$\sqrt{3}\cong 1,7$	$\sqrt{3}\cong 1,73$
$\sqrt[3]{4}\cong 1,6$	$\sqrt[3]{4}\cong 1,59$
$\sqrt[4]{7}\cong 1,6$	$\sqrt[4]{7}\cong 1,63$

Sono necessarie due cifre decimali per scrivere in ordine i numeri dati

$$\sqrt[3]{4}<\frac{8}{5}<\sqrt[4]{7}<\frac{5}{3}<\sqrt{3}$$

Per confrontare numeri reali scritti in forma decimale bisogna scrivere, dopo la virgola, le cifre necessarie per distinguere un numero dall'altro.

Attività

Completa la scheda di lavoro per consolidare quello che sai sui numeri reali

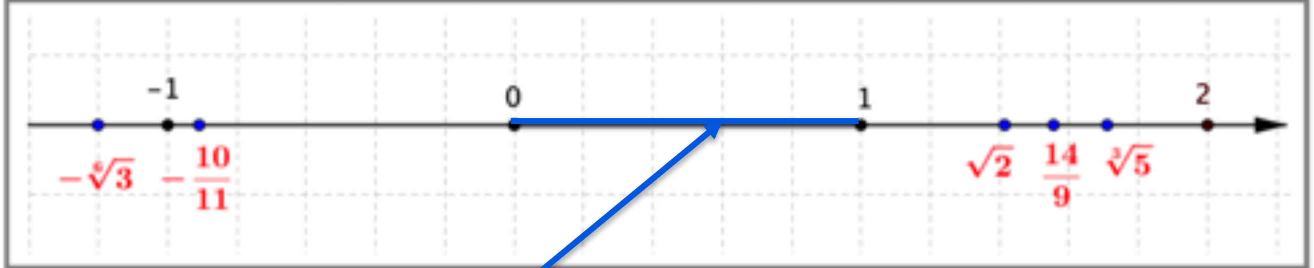
Che cosa hai trovato

Quesiti 1a,b,c

a. *completa la tabella;*
b. *rappresenta i numeri dati sulla retta disegnata sotto la tabella;*
c. *scrivi qui sotto tutti i numeri in ordine crescente;*

$$-\sqrt[6]{3} < -1 < -\frac{10}{11} < 0 < 1 < \sqrt{2} < \frac{14}{9} < \sqrt[3]{5} < 2$$

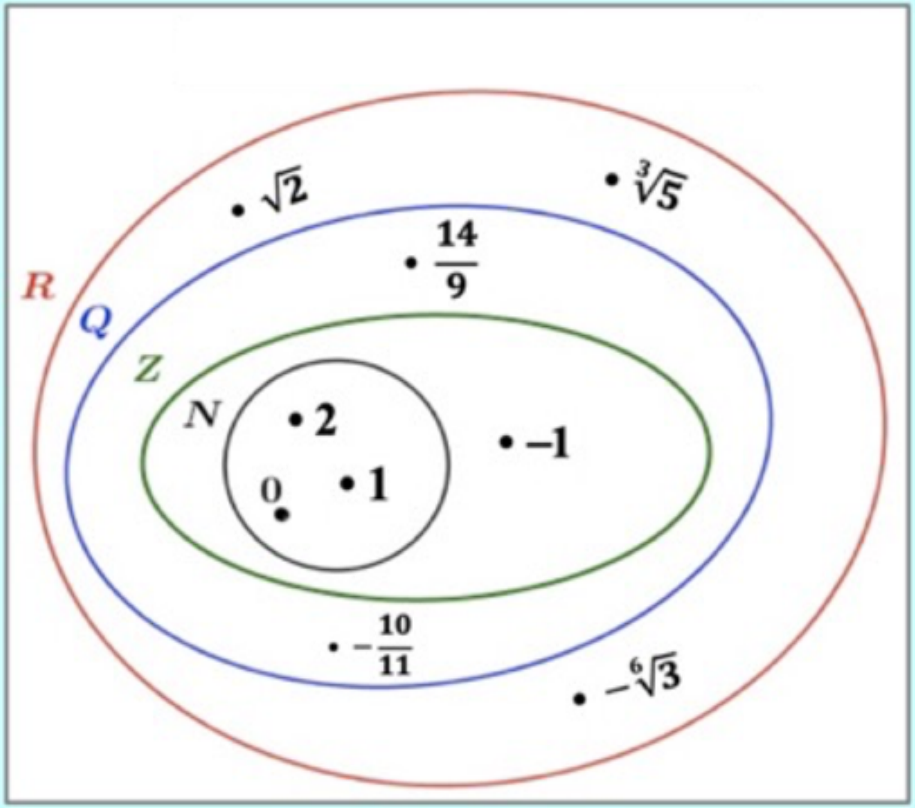
Numero scritto con frazioni e radicali	$-\frac{10}{11}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt[3]{5}$	2	$-\sqrt[6]{3}$	$\frac{14}{9}$	-1
Numero decimale arrotondato con tre cifre dopo la virgola	$-0{,}909$	$1{,}414$	$1{,}710$	2	$-1{,}201$	$1{,}556$	-1



Attenzione all'unità di misura!

Quesito 1d

d. *inserisci nel diagramma sotto la tabella tutti i numeri che sono sulla retta.*



Quesito 2

2. Scegli l'unica affermazione **vera**.

A. Un numero decimale periodico non sempre può essere scritto sotto forma di frazione.

B. Un numero intero non può sempre essere scritto sotto forma di frazione.

C. Un numero decimale con infinite cifre dopo la virgola e senza periodo può essere scritto sotto forma di frazione.

D. Un numero decimale con infinite cifre dopo la virgola non può mai essere scritto sotto forma di frazione.

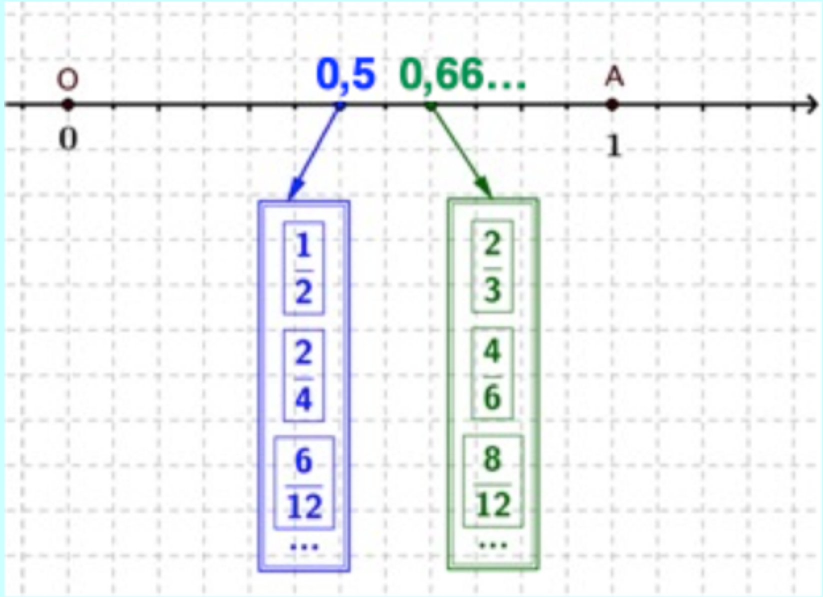
E. Un numero razionale può sempre essere scritto sotto forma di frazione.

Riflessioni sulla scrittura di un numero reale

Daniela Valenti, 2021

Scrivere un numero razionale

Hai già incontrato i numeri razionali che puoi scrivere in varie forme.



Daniela Valenti, 2021

Scrivere un radicale frazionario

Come scrivo $\sqrt{\frac{1}{2}}$?

Frazione	Radice quadrata di frazione	Quoziente di radicali	Eseguiti i calcoli
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{2}{4}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{4}{8}$	$\sqrt{\frac{4}{8}}$	$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{8}}$	$\frac{2}{\sqrt{8}}$

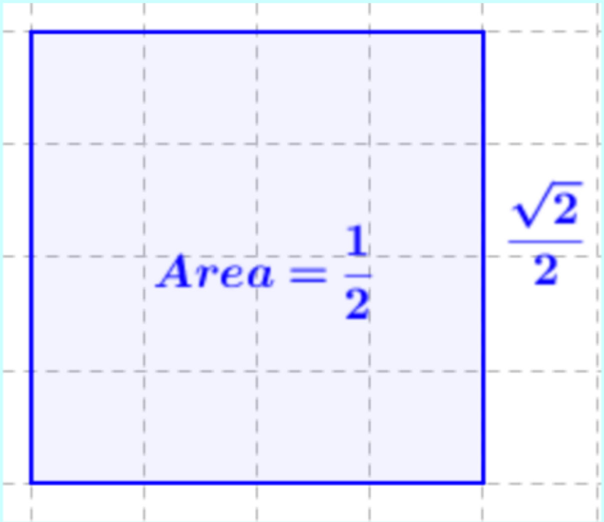
Numero decimale	Radice quadrata di numero decimale	Risultato della calcolatrice
0,5	$\sqrt{0,5}$	0,707

Daniela Valenti, 2021

Scrivere un radicale frazionario

Nelle varie scritture trovo tracce della storia della matematica, dei suoi sviluppi teorici e dei suoi campi applicativi: numeri decimali diffusi in commerci e misure, frazioni e radicali diffusi per studiare equazioni, problemi geometrici, …

In particolare si sono diffuse due scritture per radicali e frazioni in campo algebrico e geometrico.



Daniela Valenti, 2021

Scrivere un radicale frazionario

Numero razionale	Radice quadrata irrazionale di una frazione
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
È scritto con la frazione ridotta ai minimi termini	È scritta con il radicale frazionario che ha il denominatore intero

Arrivo ad un risultato generale

Frazione	Radice quadrata della frazione
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{1}{a}$	$\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$
Solo se $a > 0$	

Daniela Valenti, 2021

Simboli che rappresentano lo stesso numero

Estendo i risultati ottenuti con le frazioni

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$$

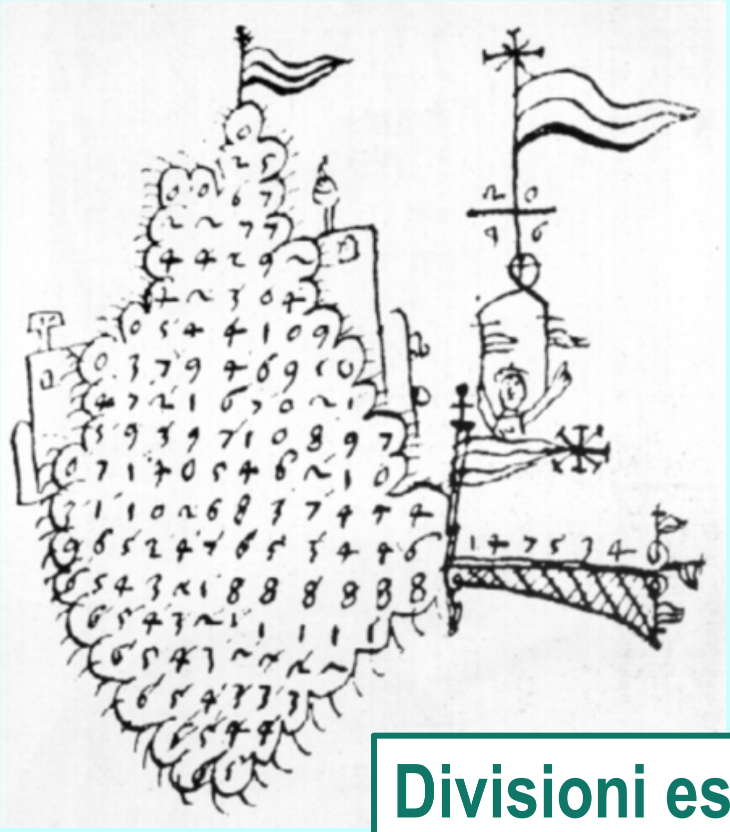
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

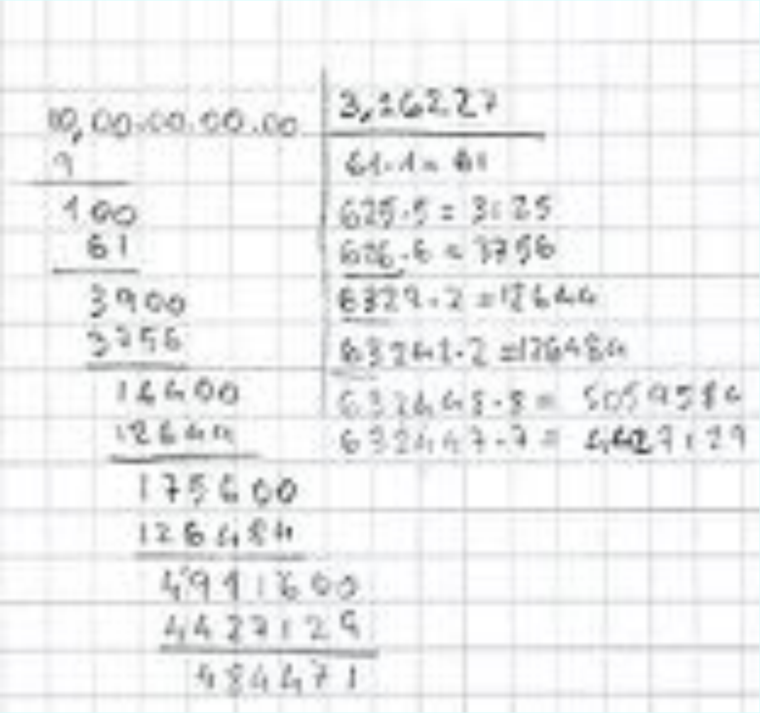
$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1 \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Daniela Valenti, 2021

Perché si è diffusa la scrittura $\frac{\sqrt{a}}{a}$?

La storia della matematica può aiutarci a trovare una risposta





Divisioni eseguite con carta e penna

Uno sguardo alla storia della matematica

Dal 1700 si diffonde il simbolo $\sqrt{}$ e, fino a circa il 1970, si calcolavano con carta, penna e tavole numeriche espressioni con frazioni e radicali.

Immagino di eseguire i calcoli con carta, penna e tavole

Trovo sulle tavole $\sqrt{2} \cong 1,41421$

Calcolo $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$1{,}41421 : 2$

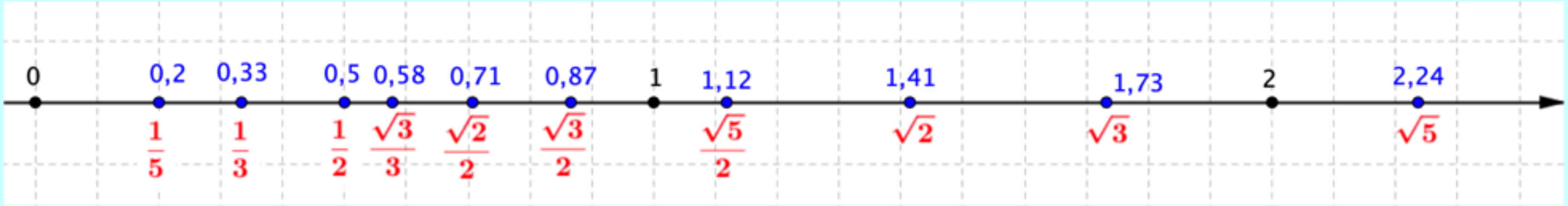
Calcolo $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$1 : 1{,}41421$

Quale divisione è più facile?

I numeri reali sulla retta

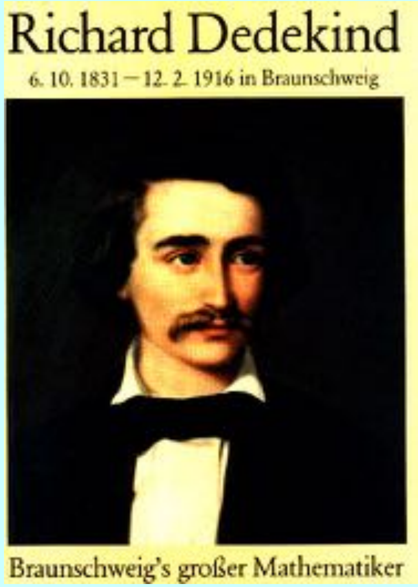
La retta dei numeri reali con alcuni numeri irrazionali che ritroverai in algebra e geometria



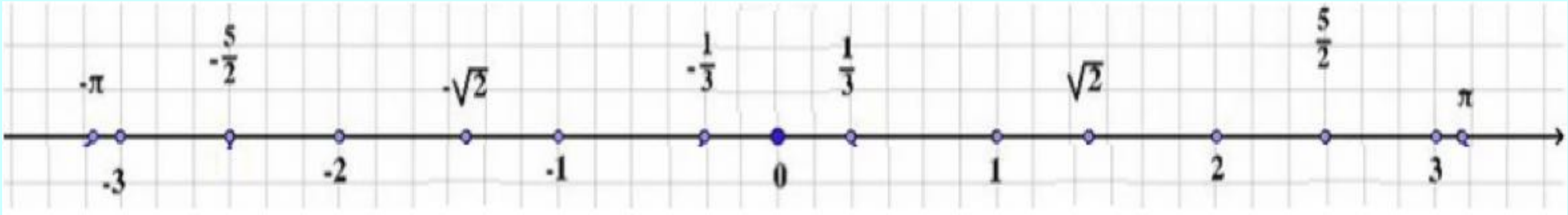
Resta una domanda

Rimangono ancora sulla retta dei vuoti per inserire numeri che non sono reali?

L’assioma di continuità



Il matematico Dedekind ha dato la risposta a questa domanda alla fine del 1800: i numeri reali completano la retta, così si può stabilire una corrispondenza biunivoca fra punti della retta e numeri reali.



Pensiamo la retta e l’insieme R dei numeri reali *perfettamente continui*, senza alcuna interruzione.