Radicali e potenze ad esponente frazionario

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} \xleftarrow{\sqrt{x}} 3^{1} \xleftarrow{\sqrt{x}} 3^{2} \xleftarrow{\sqrt{x}} 3^{4}$$

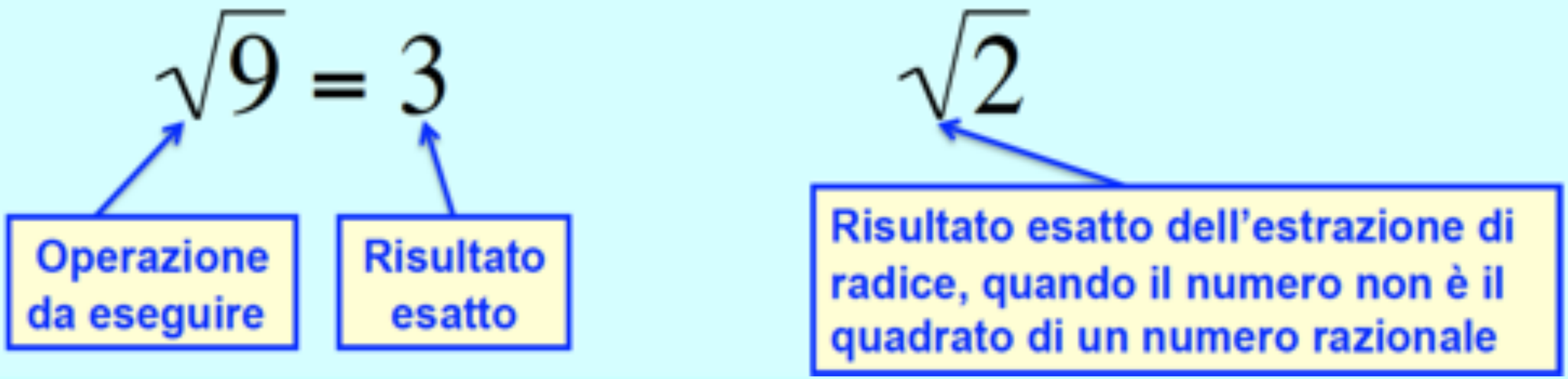
dimezza l'esponente

dimezza l'esponente

Difficoltà dei radicali

La scrittura dei radicali pone varie difficoltà, come ad esempio:

1. In matematica, il simbolo √ viene usato con due significati diversi da distinguere



2. Quando si usa il computer, alcuni software non utilizzano il simbolo di radicale.

Un’idea di Newton

Un’idea di Newton porta a ridurre queste difficoltà: introdurre nuovi simboli legati all’elevazione a potenza.

Richiamo quello che già sai sull'elevazione a potenza

L’elevazione a potenza

È la scrittura abbreviata di una moltiplicazione ripetuta

Esponente

$$3^{4} = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{4\ \textit{fattori uguali}}$$

Base

$$a^{n} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{fattori}}$$

L'elevazione a potenza. Esempi

Altri esempi

$$3^2 = \underbrace{3 \times 3}_{\text{2 volte}} \qquad 3^1 = \underbrace{3}_{\text{1 volta}}$$

E posso trovare 3^0?

Ha senso moltiplicare 0 volte 3 ??

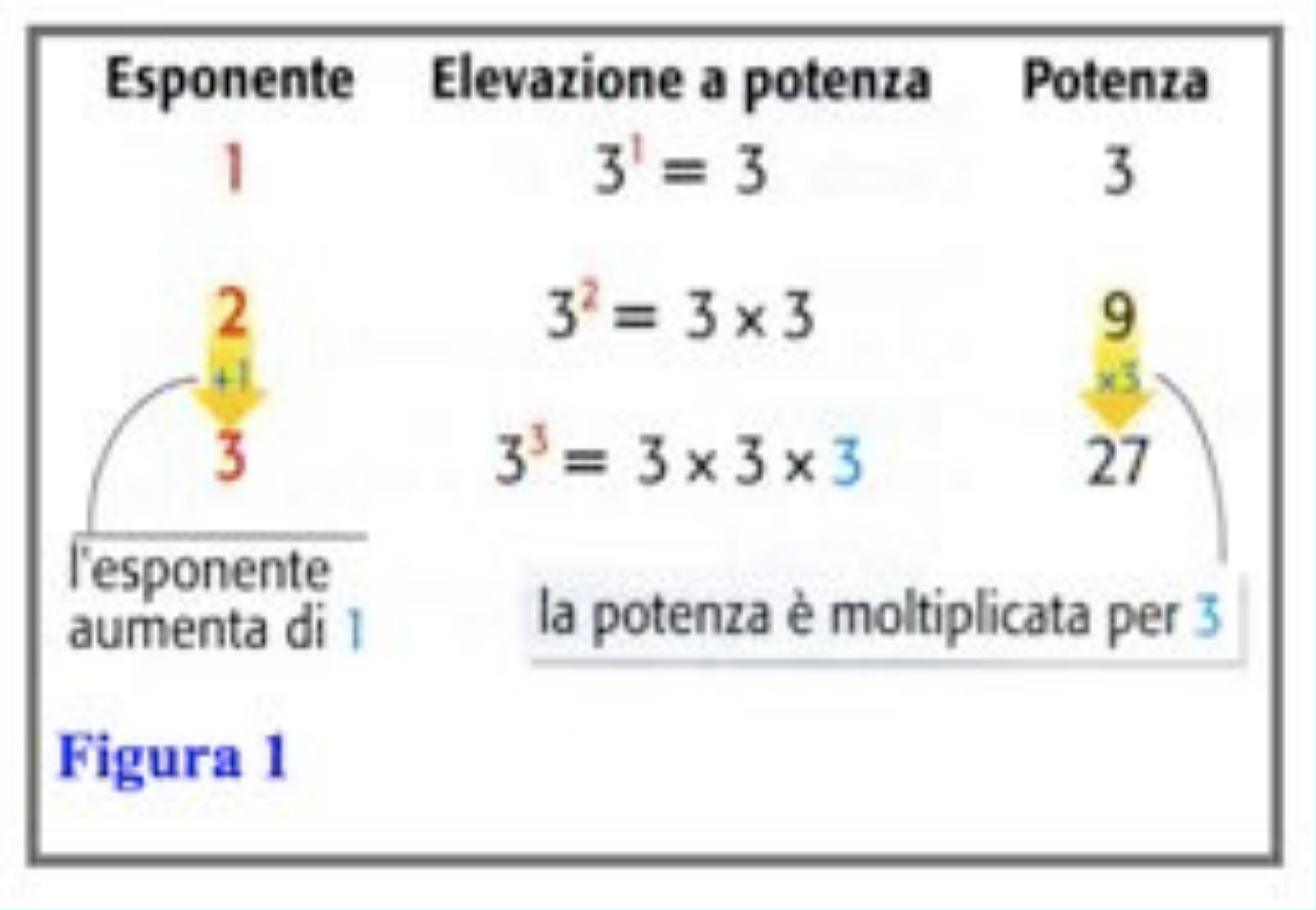
L’elevazione a potenza. Verso l’esponente 0

E posso trovare 3^0?

Non ha senso moltiplicare 0 volte 3

Ma in matematica posso ragionare per arrivare anche all’esponente 0

Ecco come si può ragionare



Arrivo all’esponente 0

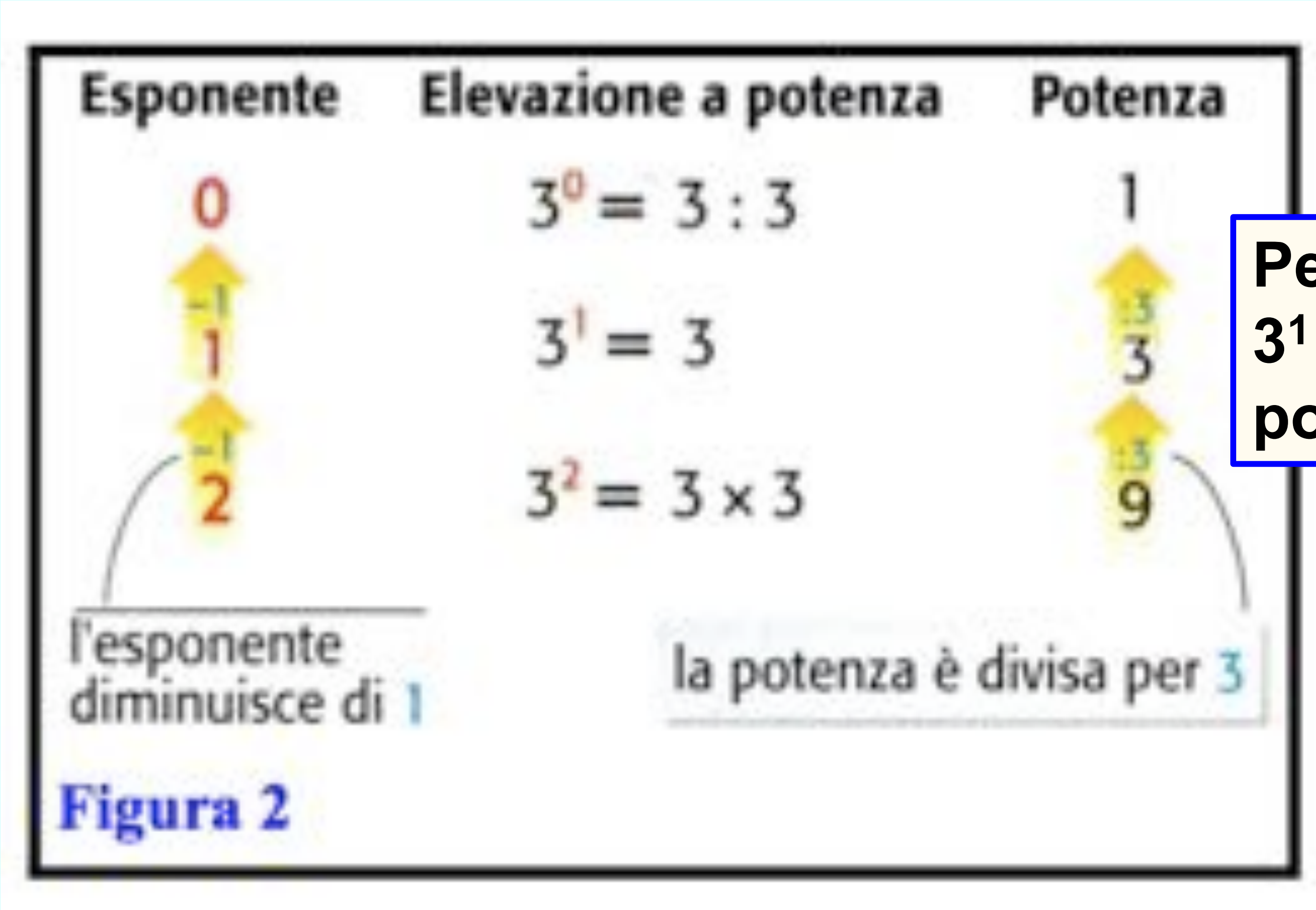


Figura 2

Per passare da 3^1 a 3^0 divido la potenza per 3.

Così trovo $3^0 = 1$

Ripeto il ragionamento con altre basi.

E trovo

$3^0 = 1 \qquad 5^0 = 1 \qquad 10^0 = 1 \qquad 0{,}1^0 = 1$

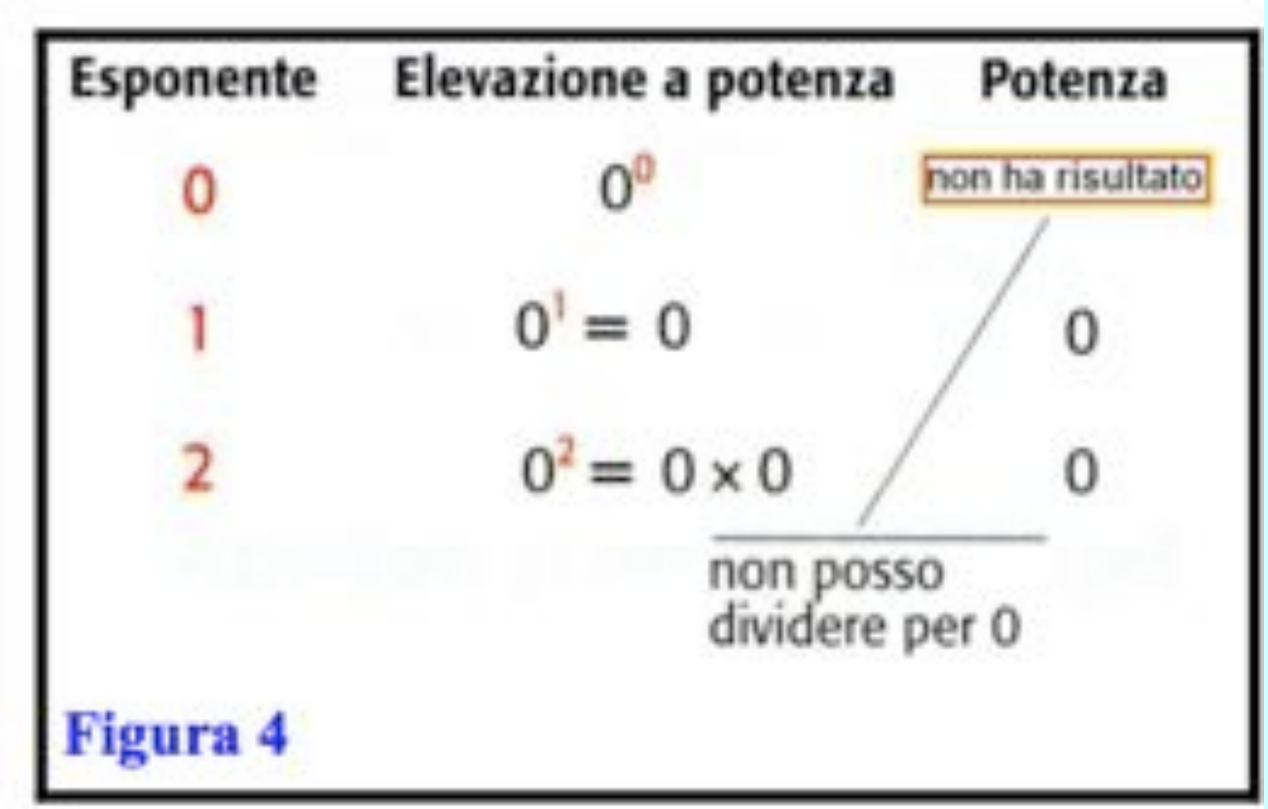
Ma posso scegliere 0 anche come base?

Riprendo le potenze di 0

Esponente	Elevazione a potenza	Potenza
1	$0^1 = 0$	0
2	$0^2 = 0 \times 0$	0
3	$0^3 = 0 \times 0 \times 0$	0
⋮	⋮	⋮
	$0^3 = 0$	

Figura 3

Come trovo 0^0?



Esponente	Elevazione a potenza	Potenza
0	0^0	non ha risultato
1	$0^1 = 0$	0
2	$0^2 = 0 \times 0$	0

non posso dividere per 0

Figura 4

Per passare da 0^1 a 0^0 dovrei dividere per 0 la potenza.
Ma non posso dividere per 0.

0^0 non ha risultato

Verso gli esponenti interi negativi

Esponente		Potenza	
-2	$\boxed{-1}$	$3^{-2}=\frac{1}{3}:3=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3^2}$	$\boxed{:3}$
-1	$\boxed{-1}$	$3^{-1}=1:3=\frac{1}{3}$	$\boxed{:3}$
0	$\boxed{-1}$	$3^0=3:3=1$	$\boxed{:3}$
$\boxed{+1}$ 1	$\boxed{-1}$	$\boxed{\times 3}$ $3^1=3$	$\boxed{:3}$
2		$3^2=3\times 3=9$	

Per passare da 3^0 a 3^{-1} divido la potenza per 3.

Così trovo

$$3^{-1}=\frac{1}{3^1} \qquad 3^{-2}=\frac{1}{3^2}\ \ldots$$

Ripeto il ragionamento con altre basi e altri esponenti interi negativi

$$2^{-1} = \frac{1}{2^{1}} \qquad 5^{-2} = \frac{1}{5^{2}} \qquad 3^{-4} = \frac{1}{3^{4}} \qquad 10^{-5} = \frac{1}{10^{5}}$$

Ma posso scegliere 0 come base?

NO!

Esponente	Elevazione a potenza	Potenza
-1	0^{-1}	non ha risultato
0	0^{0}	non ha risultato
1	$0^{1} = 0$	$\frac{0}{\text{non posso dividere per 0}}$

0^{0}, 0^{-1}, 0^{-2}, 0^{-3} … **non hanno risultato**

Potenze con esponente intero negativo

Base	Esponente	Potenza
3	-1	$\frac{1}{3}$
3	-2	$\frac{1}{3^2}$
2	-3	$\frac{1}{2^3}$

In generale, solo se l'esponente *n* è un numero naturale e la base $a \neq 0$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

0^{-n} non ha risultato

L'idea di Newton

Alla fine del 1600 Newton estende l'elevazione a potenza . Ecco l'idea.

Che succede se ripeto l'elevazione al quadrato?

$$3 \xrightarrow{x^2} 3^2 \xrightarrow{x^2} \left(3^2\right)^2 = 3^{(2\times 2)} = 3^4$$

L'esponente raddoppia

Le potenze ad esponente frazionario

Che succede se ‘torno indietro’ con l’estrazione di radice quadrata?

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} \xleftarrow{\sqrt{x}} 3^1 \xleftarrow{\sqrt{x}} 3^2 \xleftarrow{\sqrt{x}} 3^4$$

dimezza l’esponente

dimezza l’esponente

L’estrazione di radice quadrata ha l’effetto di dimezzare l’esponente

Le potenze ad esponente frazionario

L’estrazione di radice quadrata divide per 2 l’esponente.
E così, l’estrazione di radice cubica divide per 3 l’esponente.
E comincio a scrivere.

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \qquad \sqrt[3]{4^2} = 4^{\frac{2}{3}} \qquad \sqrt{3^5} = 3^{\frac{5}{2}} \quad \ldots.$$

In generale

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

Se nel radicale non compare *n*, è sottinteso *n* = 2.
Se nel radicale non compare *p*, è sottinteso *p* = 1

In questa lezione penso di sostituire alla lettera a solo numeri razionali positivi.

Nuovi simboli per estrazione di radice

$$3 \underset{x^{\frac{1}{2}}}{\overset{x^{2}}{\rightleftarrows}} 9$$

$$9^{\frac{1}{2}} = 3$$

$$2 \underset{x^{\frac{1}{3}}}{\overset{x^{3}}{\rightleftarrows}} 8$$

$$8^{\frac{1}{3}} = 2$$

Un'analogia

La divisione dai numeri naturali ai razionali

$$15:3 = 5$$

$$4:3 \begin{cases} = \dfrac{4}{3} & \text{risultato esatto} \\ \cong 1{,}33 & \text{risultato approssimato} \end{cases}$$

L'estrazione di radice dai numeri razionali agli irrazionali

$$9^{\frac{1}{2}} = 3$$

$$3^{\frac{1}{2}} \begin{cases} = \sqrt{3} & \text{risultato esatto} \\ \cong 1{,}73 & \text{risultato approssimato} \end{cases}$$

Linguaggio matematico

Negli sviluppi successivi della matematica e del suo linguaggio, gli esponenti frazionari si diffondono, ma non sostituiscono il simbolo $\sqrt{}$, anche per indicare l'operazione di estrazione di radice.

Così troviamo nei testi e nelle applicazioni entrambi i simboli: in ogni situazione si sceglie quello che rende più agevole la scrittura, i calcoli, le dimostrazioni, …

Attività: radicali e potenze con esponente frazionario

Completa la scheda di lavoro per consolidare i nuovi simboli introdotti

Che cosa hai ottenuto?

Potenze con esponente frazionario e radicali

Esponenti frazionari		Radicali		Come sono sostituite le parentesi?
$(2\cdot 8)^{\frac{1}{2}}$	$(a\cdot b)^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt{2\cdot 8}$	$\sqrt[n]{a\cdot b}$	Un tratto lungo completa il segno √ e racchiude l'espressione che era fra parentesi.
$2\cdot 8^{\frac{1}{2}}$	$a\cdot b^{\frac{1}{n}}$	$2\cdot\sqrt{8}$	$a\cdot\sqrt[n]{b}$	Non ci sono parentesi
$2^{\frac{1}{2}}\cdot 8$	$a^{\frac{1}{n}}\cdot b$	$\sqrt{2}\cdot 8$	$\sqrt[n]{a}\cdot b$	Non ci sono parentesi
$(2+7)^{\frac{1}{2}}$	$(a+b)^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt{2+7}$	$\sqrt[n]{a+b}$	Un tratto lungo completa il segno √ e racchiude l'espressione che era fra parentesi.
$2+7^{\frac{1}{2}}$	$a+b^{\frac{1}{n}}$	$2+\sqrt{7}$	$a+\sqrt[n]{b}$	Non ci sono parentesi
$2^{\frac{1}{2}}+7$	$a^{\frac{1}{n}}+b$	$\sqrt{2}+7$	$\sqrt[n]{a}+b$	Non ci sono parentesi

Potenze con esponente frazionario e radicali

Esponenti frazionari		Radicali		Come sono sostituite le parentesi?
$\left(\frac{16}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[3]{\frac{16}{2}}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	Il segno √ è deformato e racchiude l'espressione che era fra parentesi.
$\frac{16^{\frac{1}{3}}}{2}$	$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b}$	$\frac{\sqrt[3]{16}}{2}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{b}$	Non ci sono parentesi
$\frac{16}{2^{\frac{1}{3}}}$	$\frac{a}{b^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{16}{\sqrt[3]{2}}$	$\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$	Non ci sono parentesi