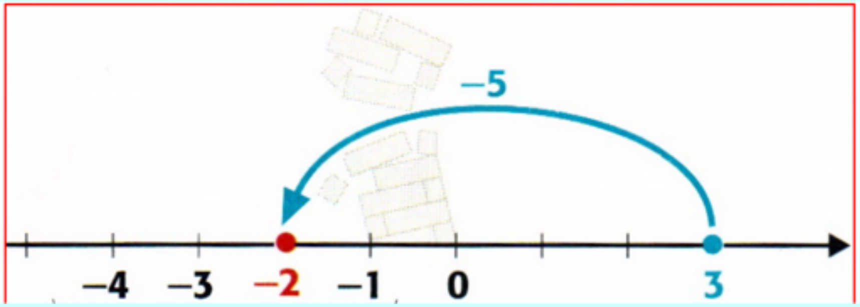
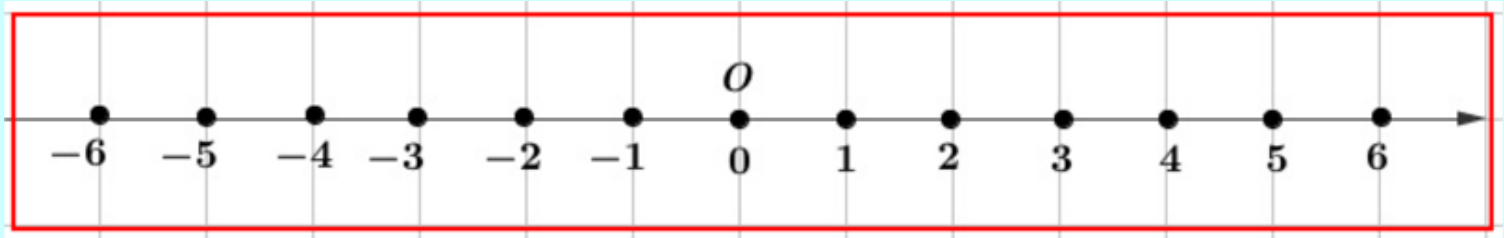
Frazioni e numeri razionali

Dai numeri naturali ai numeri interi

I *numeri naturali* sono i primi numeri che hai incontrato, quando hai cominciato a contare con le dita.
Ma vuoi eseguire tutte le sottrazioni.



E allora hai bisogno dei *numeri interi*.



E ora perché le frazioni?

Già civiltà molto antiche, come quella egizia, avevano bisogno di ‘nuovi’ numeri.
Vediamo un breve video per capire perché:

A che servono le frazioni?

Video: A che servono le frazioni?

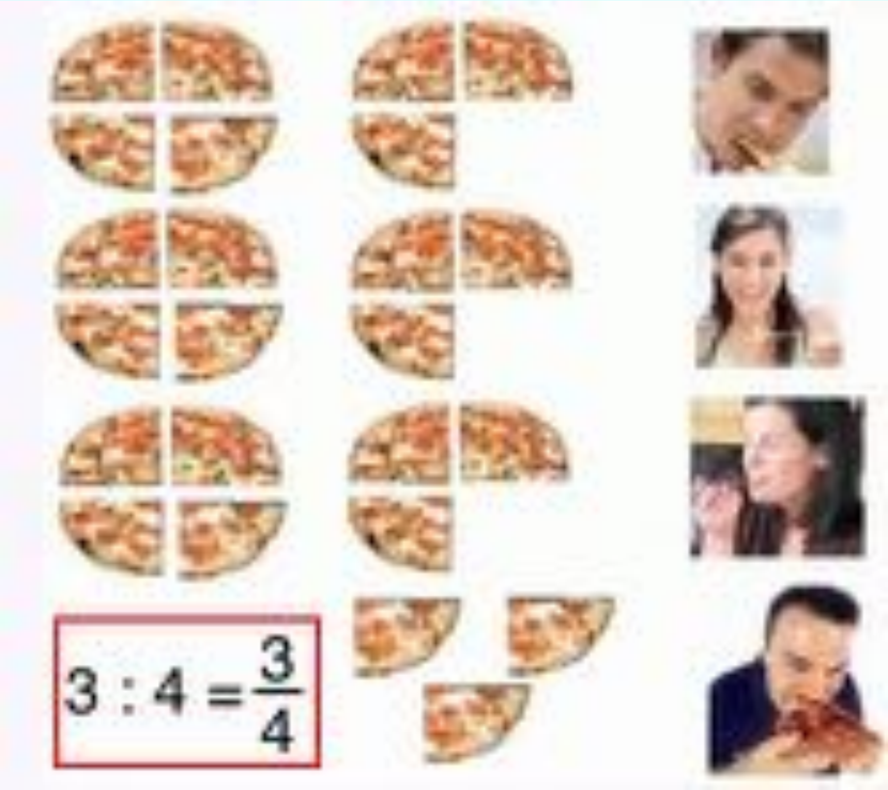
Attività

Esplorare frazioni e numeri razionali

Completa la scheda che ti guida nell'esplorazione

Che cosa hai trovato

A cosa servono le frazioni?



Divido 3 pizze fra 4 persone e voglio scrivere il risultato esatto della divisione 3 : 4.

A cosa servono le frazioni

Le frazioni servono a rappresentare il risultato esatto della divisione fra due numeri interi. Ecco un altro esempio.

Con i soli numeri interi:

5 : 3 = 1 con resto R = 2

Verifica della divisione: 5 = 3 × 1 + 2

Resto

***Con le frazioni*:**

$$5 : 3 = \frac{5}{3}$$

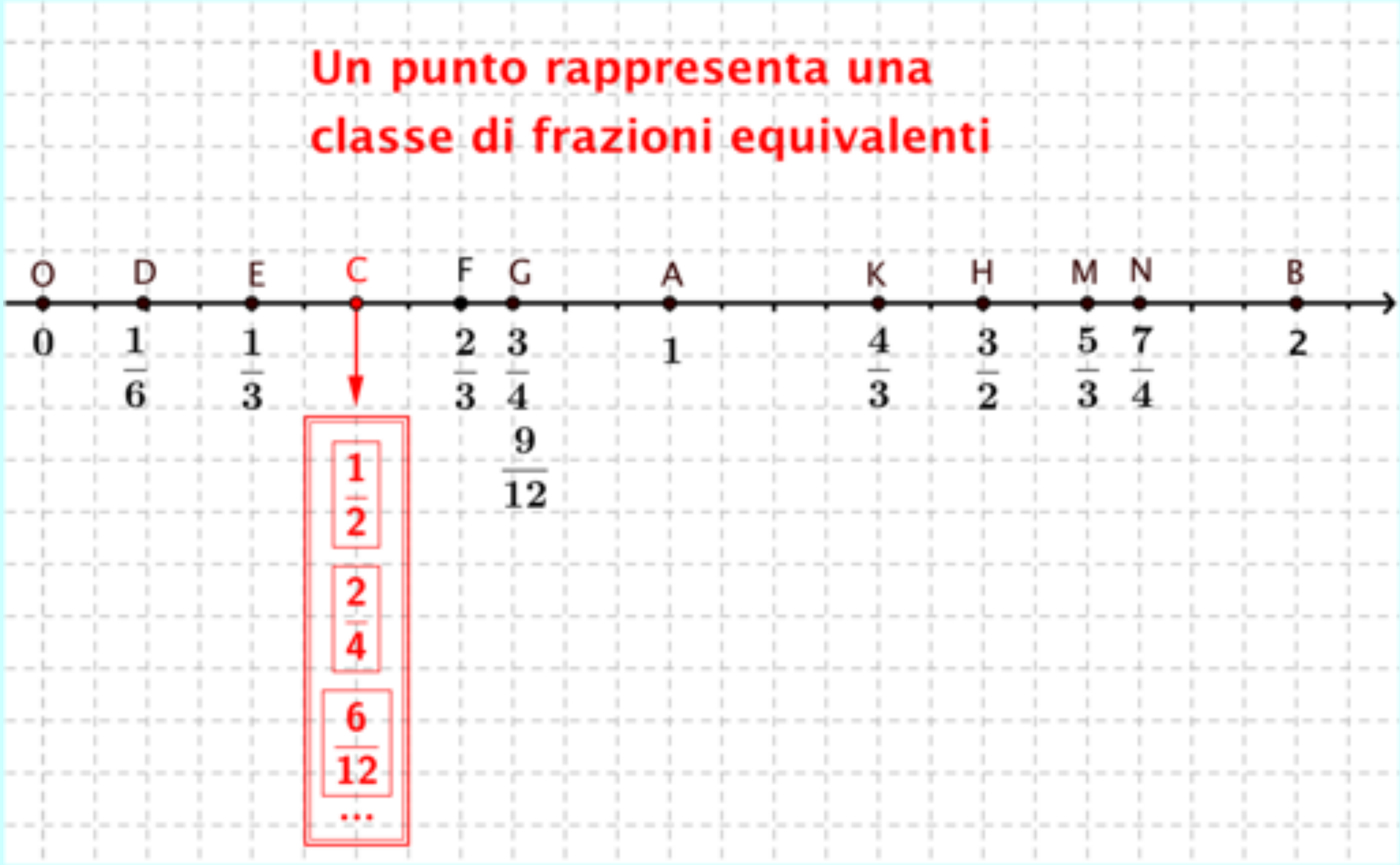
Quoziente esatto

Verifica della divisione:

$$5 = 3 \cdot \frac{5}{3}$$

Daniela Valenti, 2021

Rappresentare frazioni sulla retta



Daniela Valenti, 2021

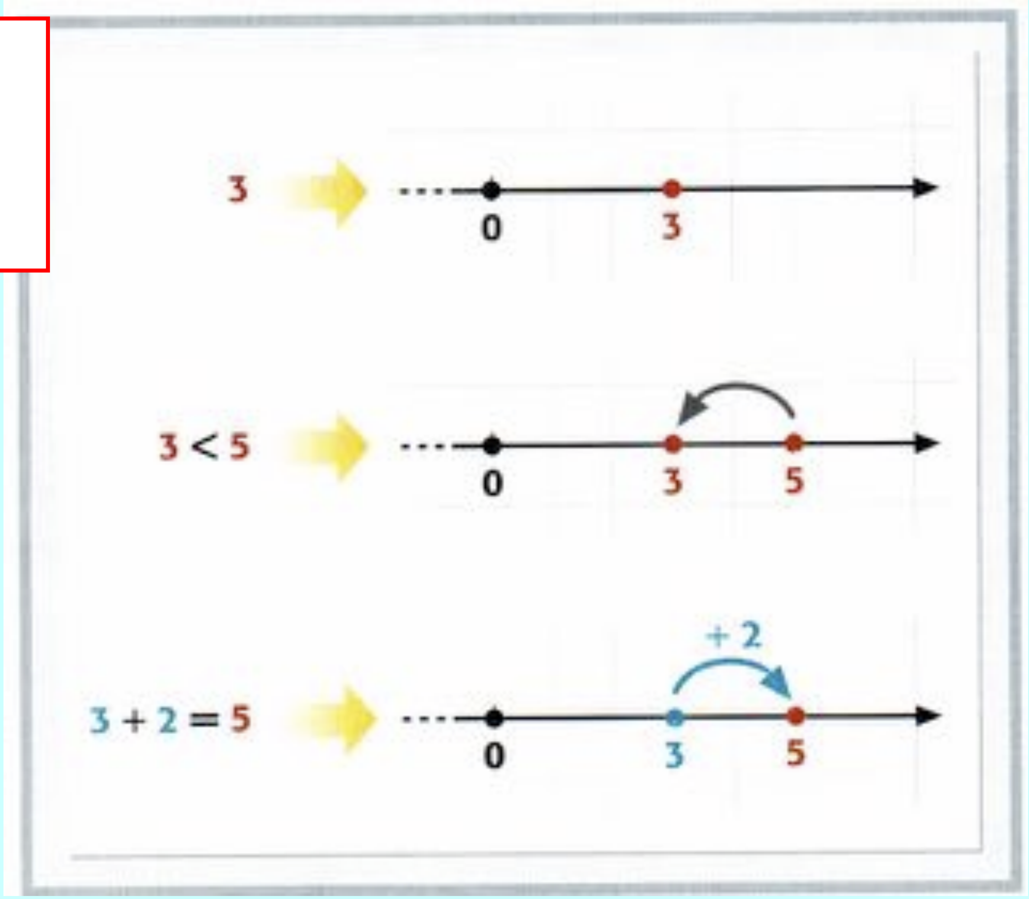
Che cos'è un numero?

Penso ai numeri naturali

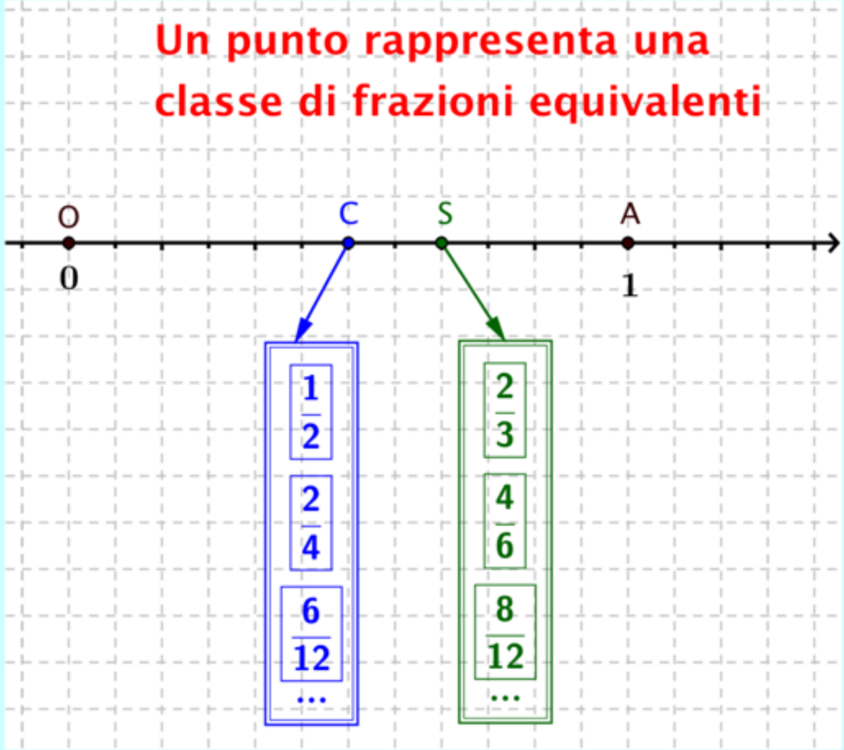
Un punto della retta rappresenta un numero naturale

Confronto un numero naturale con un altro

Addiziono un numero naturale con un altro



Che cos'è un numero?

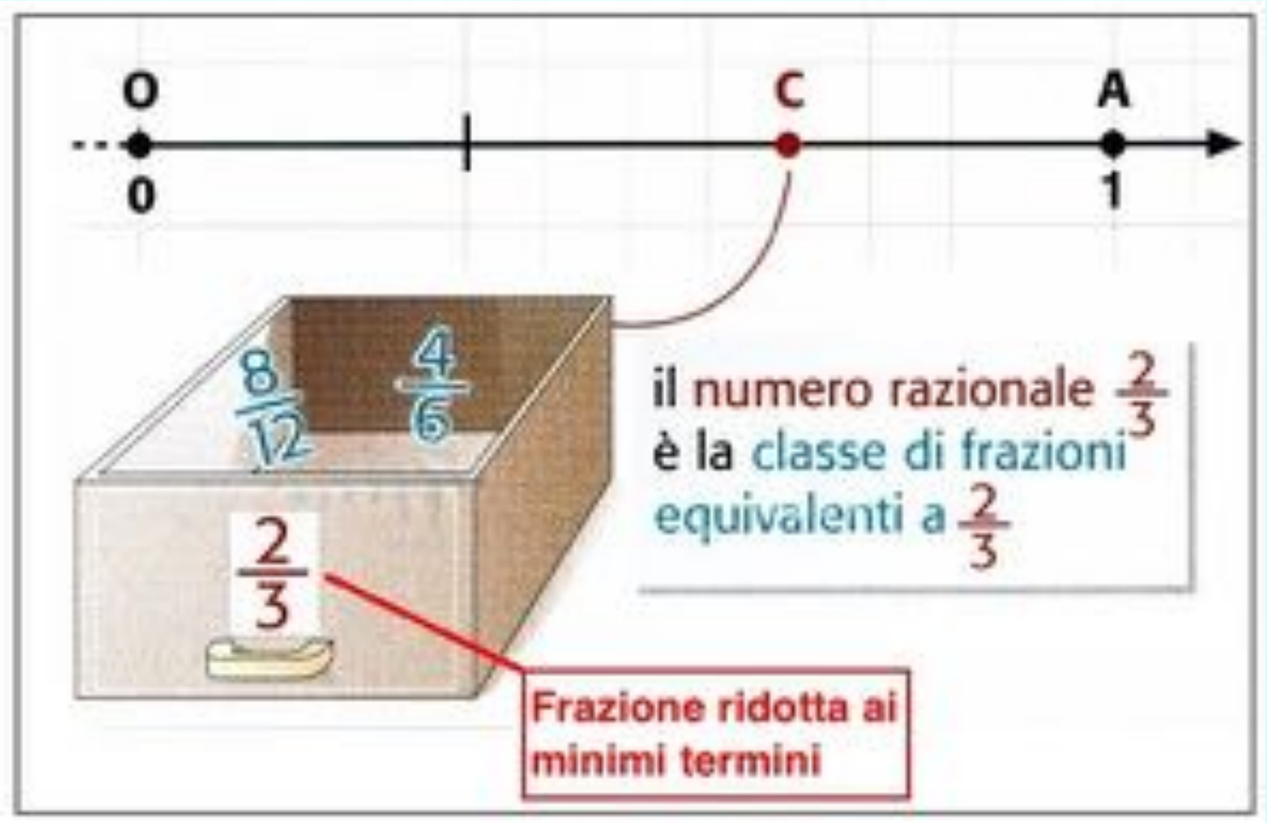


$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} \quad \text{perché} \quad \frac{6}{12} < \frac{8}{12}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{6}{12} + \frac{8}{12} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

Rappresentiamo sulla retta, confrontiamo e addizioniamo non singole frazioni, ma classi di frazioni equivalenti; questo porta a considerare come un **numero** non una singola frazione, ma una **classe di frazioni equivalenti**

Che cos’è un numero razionale?



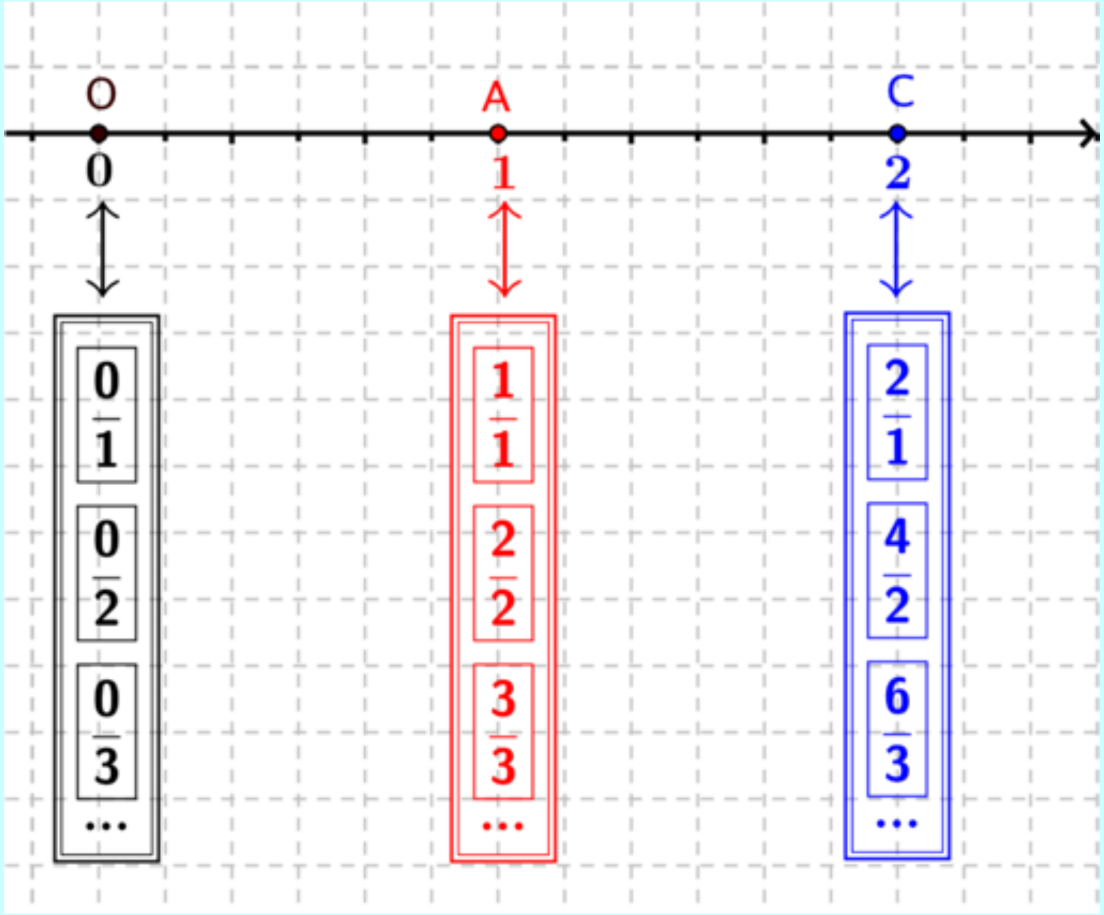
Abitualmente, per scrivere un numero razionale si sceglie la frazione ridotta ai minimi termini.

L'insieme Q dei *'numeri razionali'*

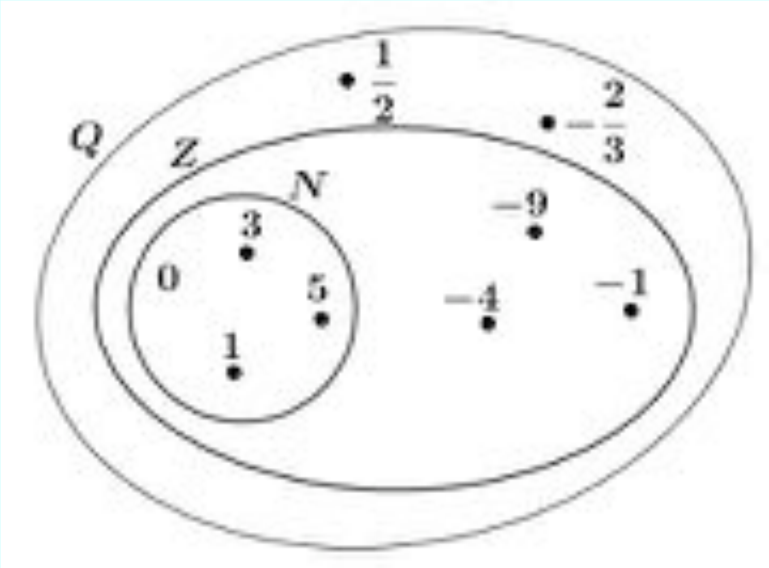
Razionale proviene dal latino '*ratio*', che si legge 'razio' e ha molti significati fra i quali '*rapporto*' o 'quoziente'.
In matematica, s'introduce l'insieme di tutti i numeri che si ottengono come quoziente di due interi e quindi si possono scrivere con una frazione: **è l'insieme dei numeri razionali e si indica con la lettera *Q*,** iniziale di **q**uoziente.

Daniela Valenti, 2021

I numeri naturali sono particolari numeri razionali



Un diagramma per rappresentare gli insiemi *N*, *Z* e *Q*



La figura mostra che:

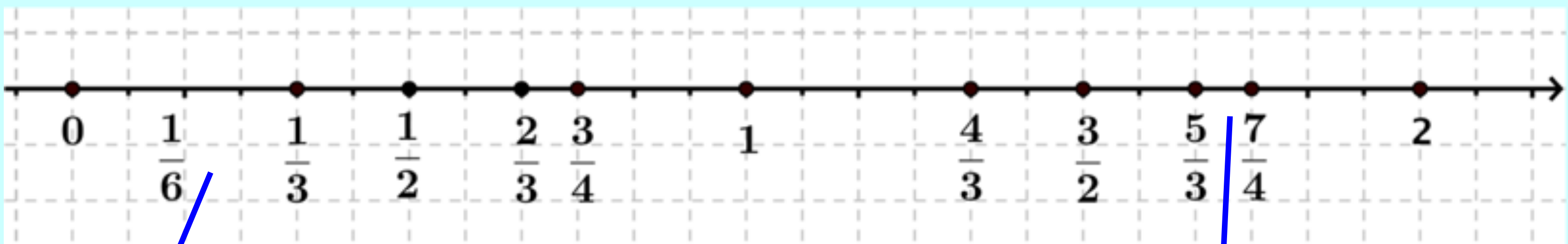
- **N è contenuto in Z**, cioè i numeri naturali sono particolari numeri interi;
- **Z è contenuto in Q**, cioè i numeri interi sono particolari numeri razionali.

L’insieme Q è *ordinato*

La rappresentazione sulla retta suggerisce:

l’insieme dei numeri razionali è ordinato

Scegli due numeri razionali; puoi sempre dire quale viene prima e quale dopo.



$\frac{1}{3}$ viene dopo $\frac{1}{6}$

$\frac{5}{3}$ viene prima di $\frac{7}{4}$

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{3} < \frac{7}{4}$$

Confrontare due numeri razionali senza rappresentarli sulla retta

Numero razionale $\frac{1}{2}$

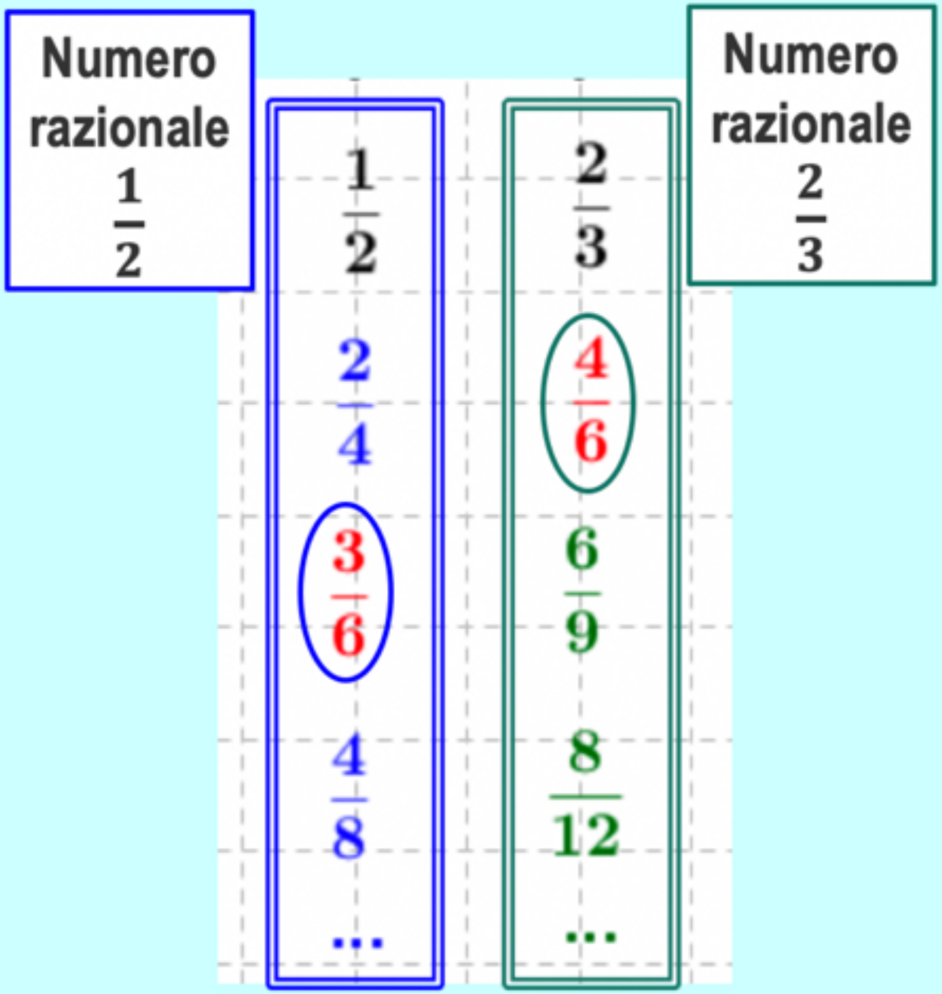
$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, ...

$\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, ...

Numero razionale $\frac{2}{3}$

$$\frac{4}{6} > \frac{3}{6} \rightarrow \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$$

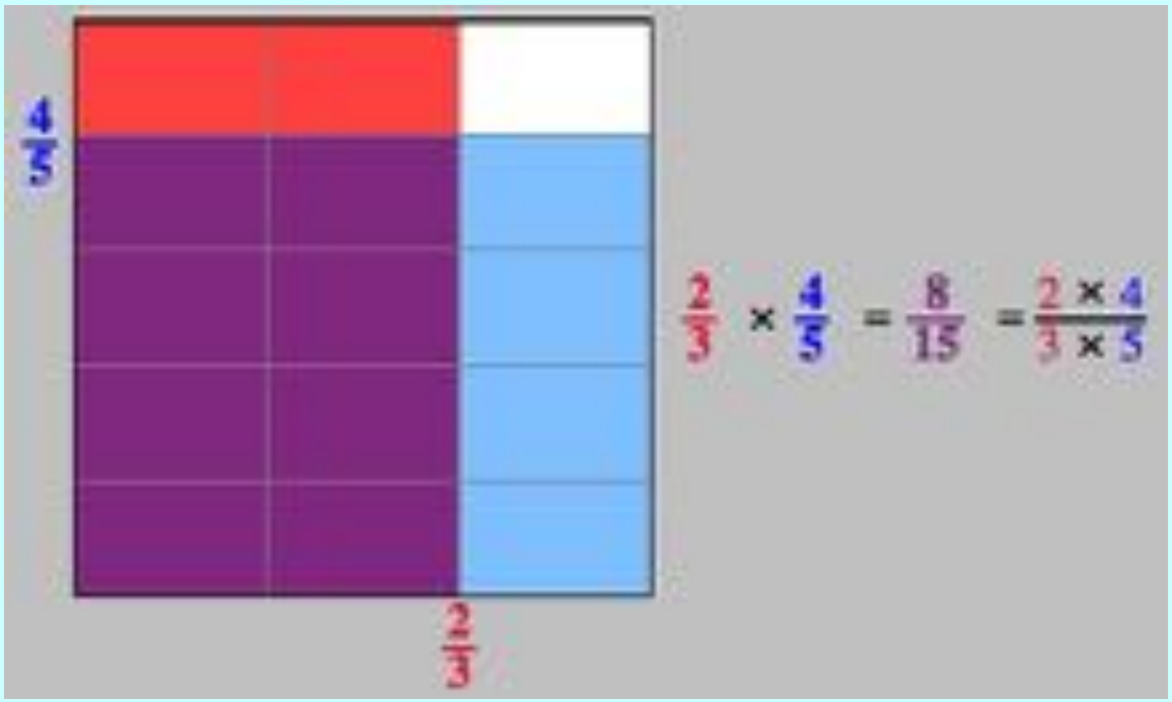
Addizionare due numeri razionali



$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{4}{6}+\frac{3}{6}=\frac{7}{6}$$

Moltiplicare due numeri razionali

Ecco come ‘vedere’ il prodotto di due numeri razionali



L'inverso di un numero razionale

a	4	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	1	0
Inverso di a $\frac{1}{a}$	$\frac{1}{4}$	5	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{1}=1$	*Trovo l'inverso x di 0?* ***NO***
$a\cdot\frac{1}{a}$	$4\cdot\frac{1}{4}=1$	$\frac{1}{5}\cdot 5=1$	$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1$	$1\cdot 1=1$	$0\cdot x=0$ *vera per qualunque x razionale*

Attenzione al significato dei simboli:

$$\text{Se } a=\frac{1}{5}\text{ , trovi } \frac{1}{a}=5$$

L'inverso è anche detto reciproco

Nell’insieme Q ‘scompare’ la divisione

Quando lavoro con i numeri razionali, la divisione diventa moltiplicazione per l’inverso.

Esempio

$$\left.\begin{array}{l} 5:2=\dfrac{5}{2} \\[2ex] 5\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2} \end{array}\right\rangle \quad 5:2=5\cdot\frac{1}{2}$$

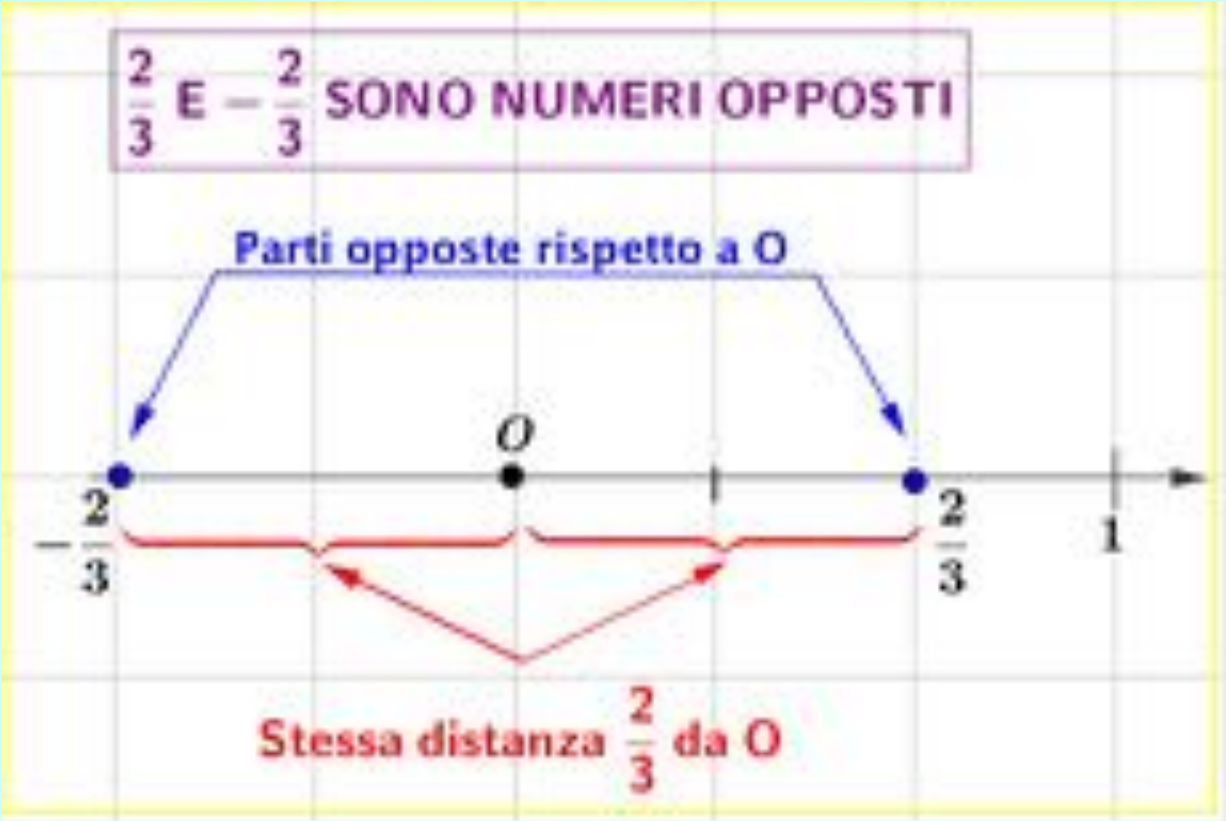
Anche nell'insieme Q non posso dividere per 0

Per dividere per *0*, scrivo, ad esempio

$$5 : 0 = 5 \cdot \frac{1}{0}$$

Ma il reciproco di *0* non esiste, perciò non posso dividere per *0*.

Numeri razionali opposti



Numeri razionali opposti

a	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	2	1	0
Opposto di a $-a$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{5}$	-2	-1	0
$-a+a=0$	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$	$\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{4}\right)=0$	$\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)=0$	$-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=0$	$-2+2=0$	$-1+1=0$	$0+0=0$

Attenzione al significato dei simboli: se *a* è negativo, −*a* è positivo.

Nell'insieme Q 'scompare' la sottrazione

Nell'insieme Q dei razionali, come nell'insieme Z degli interi, la sottrazione diventa addizione con l'opposto.

Esempio.

$$\frac{5}{3}-\frac{4}{5}=\frac{5}{3}+\left(-\frac{4}{5}\right)$$

Proprietà di addizione e moltiplicazione nell'insieme Q dei razionali

Proprietà	Addizione	Moltiplicazione
Commutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Associativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Elemento neutro	*0 è l'elemento neutro* $a + 0 = a$	*1 è l'elemento neutro* $a \cdot 1 = a$
Elemento assorbente	*L'addizione* ***non*** *ha elemento assorbente*	*0 è l'elemento assorbente* $a \cdot 0 = 0$
Opposto	*Dato* ***a****, si trova* ***–a*** *tale che* $-a + a = 0$	
Inverso (o reciproco)		*Dato* ***a diverso da 0****, si trova* $\frac{1}{a}$ *tale che* $\frac{1}{a} \cdot a = 1$
Distributiva	$a\,(b + c) = ab + ac$	

Daniela Valenti, 2021

Sono le stesse proprietà delle operazioni tra numeri interi

Ma l'inverso rende la divisione sempre possibile, escluso il caso della divisione per 0.