Grafico di funzioni esponenziali e logaritmiche. Esercizi

Funzioni esponenziali

Ricordo la funzione esponenziale elementare
$y = e^x$ **[$e \cong 2{,}71$ numero di Nepero]**

Il grafico

Dominio
Insieme R dei numeri reali

Derivate
$y' = e^x \quad y'' = e^x$

Asintoto orizzontale 'a sinistra'

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \Rightarrow y = 0$ asintoto per $x < 0$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \Rightarrow$ nessun asintoto per $x > 0$

Esercizio guidato

Completa il procedimento per studiare il grafico della funzione data nell'esercizio 1.

1. $y = xe^x$

a. *Prime caratteristiche della funzione*
Il dominio è ………………………..

b. *Asintoti*

- Il grafico non può avere un asintoto verticale perché………………….
- Determina l'equazione dell'eventuale asintoto d'equazione $y = mx + q$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \cdots} \dots\dots = \cdots \Rightarrow \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \cdots} \dots\dots = \cdots \Rightarrow m = \dots$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to -\infty} \dots\dots.. = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\dots\dots}$$

Applico il teorema di de l'Hopital

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\dots\dots} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\dots\dots} = \cdots$$

Il grafico ha un asintoto d'equazione ⋯⋯⋯⋯ solo per $x < 0$

c. *Segno di* $y = xe^x$
y ha lo stesso segno di x, perché ……………….

d. *Calcola y' e studiane il segno*
Calcola la derivata la regola di derivazione del prodotto di funzioni derivabili:

$$y = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$y = xe^x \Rightarrow y' = e^x + \cdots\cdots\cdots\cdots = e^x(\cdots\cdots\cdots\cdots)$$

y' ha lo stesso segno di ………….. perché ………………

e. *Calcola y'' e studiane il segno*
Applica di nuovo la regola di derivazione del prodotto di funzioni derivabili:
$y'' =$ ……………………………………………
y'' ha lo stesso segno di ………….. perché ………………

f. *Organizza lo schema per riassumere tutte le informazioni.*

g. *Calcola le coordinate dei punti notevoli, in cui valgono zero f'(x) o f''(x)*

h. *Indica sul piano cartesiano l'asintoto.*

i. *Traccia il grafico della funzione e indica il punto di massimo o minimo relativo e il flesso.*

Studia il grafico delle funzioni esponenziali assegnate negli esercizi da 2 a 14.

2. $y = xe^{-x}$

3. $y = e^{-x^2}$

4. $y = (1 - x)\, e^{x}$

5. $y = (x + 1)e^{-x}$

6. $y = 2xe^{-\frac{x}{3}}$

7. $y = 2xe^{1-x}$

8. $y = (x - 1)\, e^{2x}$

9. $y = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

10. $y = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

11. $y = x^2e^{x}$

12. $y = 3xe^{-2x^2}$

13. $y = \frac{e^{x}}{x+1}$

14. $y = \frac{1}{1+e^{-x}}$

Esercizio svolto

Funzione logistica

15. $y = \frac{K}{1+e^{a-rx}}$

Trovi questa funzione, a partire dalla fine del 1800, per studiare la crescita di una popolazione. In questo studio le lettere hanno il seguente significato:

- *la variabile* ***x*** *indica il tempo;*
- *la variabile* ***y*** *il numero di individui che compongono la popolazione;*
- *le costanti positive* ***K****,* ***a*** *ed* ***r*** *caratterizzano la popolazione esaminata e sono ottenute con rilevazioni statistiche.*
  Le costanti prendono anche il nome di parametri.

Ecco lo studio del grafico della funzione logistica.

Il dominio è l'insieme R dei numeri reali.

Asintoti orizzontali:

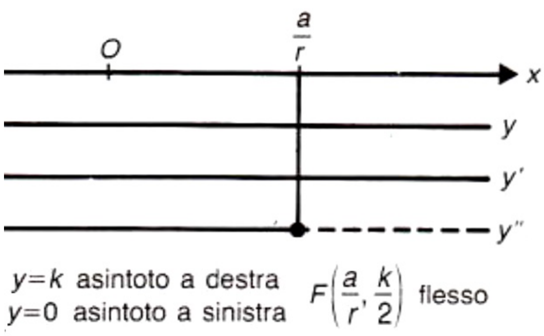
- *la retta di equazione $y = K$, per $x \to +\infty$*
- *la retta di equazione $y = 0$, per $x \to -\infty$*

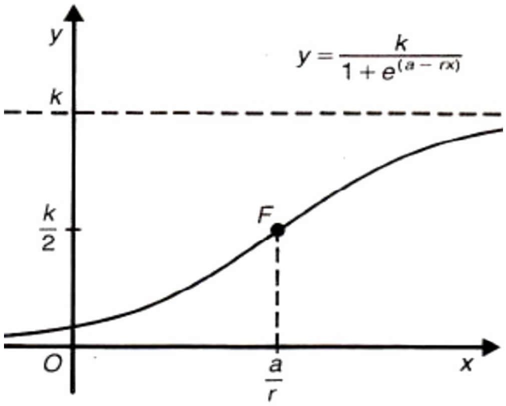
Segno della funzione e delle sue derivate:

$y = \frac{K}{1+e^{a-rx}}$ *e* $y' = Kr\ \frac{e^{a-rx}}{[1+e^{a-rx}]^2}$ *hanno segno positivo in tutto il dominio.*

$y'' = Kr^2\ \frac{e^{a-rx}}{[1+e^{a-rx}]^3}\ [e^{a-rx} - 1]$ *ha il segno di* $[e^{a-rx} - 1]$

$$e^{a-rx} - 1 \geq 0 \Rightarrow e^{a-rx} \geq 1 \Rightarrow a - rx \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{a}{r}$$





Il grafico suggerisce delle indicazioni sulla crescita di una popolazione descritta dalla funzione logistica:

- la popolazione tende a raggiungere il numero K di individui;

- si ha "un'inversione di tendenza" nella crescita, quando la popolazione raggiunge il valore $\frac{K}{2}$, che è la metà del valore asintotico K.

Problemi

Problema guidato

16. È data $f(x) = \frac{1}{1+ke^{-x}}$

a. Esponi il procedimento per determinare il valore del parametro reale non nullo k con la seguente informazione sul grafico di $f(x)$: la curva passa per il punto $P\left(0, \frac{1}{2}\right)$,

b. Dopo aver ottenuto $k = 1$, studia il grafico di $f(x)$.

a. La curva passa per $P\left(0, \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f(0) = \frac{1}{2}$

Calcolo $f(0) = \frac{1}{1+\cdots\cdots.}$

Deve essere $\frac{1}{1+\cdots\cdots.} = \frac{1}{2}$ da cui $1 + \cdots\cdots = 2$ e quindi $k = 1$

b. Hai studiato il grafico di questa funzione nell'esercizio 14.

17. È data $f(x) = kxe^{1-x}$

a. Esponi il procedimento per determinare il valore del parametro reale non nullo k con la seguente informazione sul grafico di $f(x)$: la curva passa per il punto $P(1, 2)$,

b. Dopo aver ottenuto $k = 2$, studia il grafico di $f(x)$.

18. È data $f(x) = (x + k)e^{2x}$

a. Esponi il procedimento per determinare il valore del parametro reale non nullo k con la seguente informazione sul grafico di $f(x)$: la curva passa per il punto $P(0, -1)$,

b. Dopo aver ottenuto $k = -1$, studia il grafico di $f(x)$.

Problema guidato

19. È data $f(x) = (k - x)e^x$

a. Esponi il procedimento per determinare il valore del parametro reale non nullo k con la seguente informazione sul grafico di $f(x)$: la curva ha un punto di massimo relativo di ascissa 0.

b. Dopo aver ottenuto $k = 1$, studia il grafico di $f(x)$.

a. La curva ha un punto di massimo relativo di ascissa 0 $\Leftrightarrow f'(0) = 0$

Calcolo $f'(x) = -e^x + \cdots\cdots\cdots\cdots \Longrightarrow f'(0) = \cdots\cdots\cdots$

Deve essere $f'(0) = 0$ *perciò* $\cdots\cdots\cdots = 0$ e quindi $k = 1$

b. Hai studiato il grafico di questa funzione nell'esercizio 4.

20. È data $f(x) = 2xe^{-\frac{x}{k}}$

a. Esponi il procedimento per determinare il valore del parametro reale non nullo k con la seguente informazione sul grafico di $f(x)$: la curva ha un punto di massimo relativo di ascissa 3.

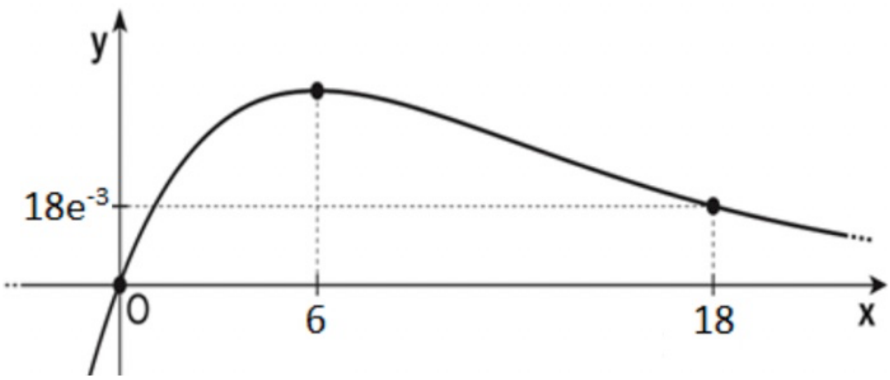
b. Dopo aver ottenuto $k = 3$, studia il grafico di $f(x)$.

21. È data $f(x) = x^2e^{kx}$

a. Esponi il procedimento per determinare il valore del parametro reale non nullo k con la seguente informazione sul grafico di $f(x)$: la curva ha un punto di massimo relativo di ascissa 4.

b. Dopo aver ottenuto$k = -\frac{1}{2}$, studia il grafico della funzione $f(x)$.

22. La figura qui sotto rappresenta il grafico di $f(x) = hxe^{-\frac{x}{k}}$, che ha un punto di massimo relativo di ascissa $x = 6$. A partire dai dati in figura determina i valori dei parametri reali non nulli h e k.



23. È data $f(x) = (h + kx)e^{2x}$

a. Esponi il procedimento per determinare i parametri reali non nulli h e k con le seguenti informazioni sul grafico di $f(x)$:
- la curva passa per **P** (1, 0);
- la retta tangente in **P** alla curva ha pendenza $m = e^2$.

b. Dopo aver ottenuto $h = -1$ e $k = 1$ studia il grafico della funzione $f(x)$.

Funzioni logaritmiche

Funzione logaritmica elementare

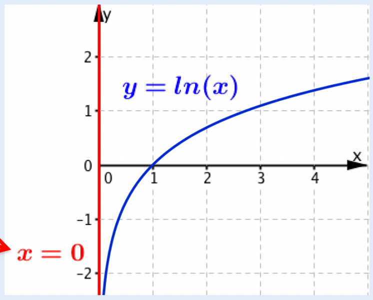
Ricordo la funzione logaritmo elementare
$y = ln(x)$ o $y = log_e(x)$ **[$e \cong 2{,}71$ numero di Nepero]**

Dominio: **l'insieme R^+ dei numeri reali positivi**

Derivate
$$y' = \frac{1}{x} \quad , \quad y'' = -\frac{1}{x^2}$$

Asintoto verticale
$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Grafico



Esercizio guidato

Completa il procedimento per studiare il grafico della funzione data nell'esercizio 24

24. $y = x + \ln(x)$

a. *Prime caratteristiche della funzione*
   Il dominio è ……………
b. *Asintoto verticale*
- Il grafico può avere un asintoto verticale perché ……………..
  Calcola $\lim_{x \to 0^+} [x + \ln(x)] = \cdots\cdots$
  Ottieni l'asintoto verticale di equazione ……………..

c. *Non ci sono metodi algebrici elementari per studiare il segno della funzione; perciò passa a calcolare la derivata y' e studiane il segno*
   Calcola la derivata la regola di derivazione della somma di funzioni derivabili:
   $$y = x + \ln(x) \Rightarrow y' = 1 + \cdots\cdots = \frac{\cdots\cdots}{x}$$
   y' ha sempre segno $\cdots\cdots\cdots$ perché ………………
d. *Calcola y'' e studiane il segno*
   $$y' = 1 + \cdots\cdots \Rightarrow y'' = 0 - \cdots\cdots$$
   y'' ha sempre segno …………… perché ………………
e. *Organizza lo schema per riassumere tutte le informazioni.*
f. *Indica sul piano cartesiano l'asintoto verticale.*
g. *Calcola le coordinate di almeno un punto A* (1, ……) *utile per il grafico.*
h. *Traccia il grafico della funzione.*

Studia il grafico delle funzioni logaritmiche assegnate negli esercizi da 25 a 36.

25. $y = x - \ln(x)$

26. $y = x^2 + 2\ln(x)$

27. $y = \frac{1}{x} + \ln(x)$

28. $y = \frac{1}{x} - \ln(x)$

29. $y = \frac{1}{x^2} - 2\ln(x)$

30. $y = \frac{1}{x^2} + 2\ln(x)$

31. $y = x \cdot \ln(x) - \frac{3}{2}x$

32. $y = \ln^2(x) + 2\ln(x)$

33. $y = \frac{\ln(x)}{x}$. Spiega perché la funzione ha asintoti d'equazione $x = 0$ e $y = 0$

34. $y = \frac{x}{\ln(x)}$. Spiega perché la funzione **non** ha asintoti d'equazione $x = 0$ e $y = 0$

35. $y = x \cdot \ln(x)$. Spiega perché la funzione **non** ha l'asintoto d'equazione $x = 0$.

36. $y = 3 + 2x \cdot \ln(x)$.

Problemi

37. È data $f(x) = k + 2x \cdot \ln(x)$

a. Esponi il procedimento per determinare il valore del parametro reale non nullo k con la seguente informazione sul grafico di f(x): la curva passa per il punto A (1, 3).

b. Dopo aver ottenuto $k = 3$, studia il grafico di $f(x)$.

38. È data $f(x) = kx \cdot \ln(x) - \frac{3}{2}x$

a. Esponi il procedimento per determinare il valore del parametro reale non nullo k con la seguente informazione sul grafico di $f(x)$: la curva ha un punto di minimo relativo di ascissa $\sqrt{e}$.

b. Dopo aver ottenuto $k = 1$, studia il grafico di $f(x)$.

39. È data $f(x) = \frac{k + \ln(x)}{x}$

a. Esponi il procedimento per determinare il valore del parametro reale non nullo k con la seguente informazione sul grafico di $f(x)$: la curva passa per il punto P $(e^{-1}, 0)$,

b. Dopo aver ottenuto $k = 1$, studia il grafico di $f(x)$.

40. È data $f(x) = hx^2 ln\left(\frac{x}{k}\right)$

a. Esponi il procedimento per determinare i valori dei parametri reali non nulli h e k con le seguenti informazioni sul grafico di $f(x)$: la curva ha la tangente nel punto A (1, 0) di equazione $y = 2x - 2$.

b. Dopo aver ottenuto $h = 2$ e $k = 1$, studia il grafico di $f(x)$.