Grafico di funzioni esponenziali e logaritmiche

Funzione esponenziale elementare

Ricordo la funzione esponenziale elementare

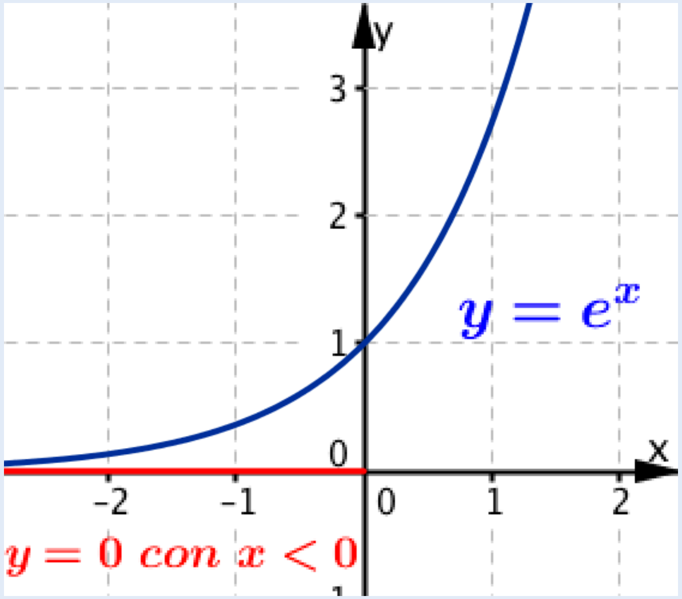
$y = e^x$ **[$e \cong$ 2,71 numero di Nepero]**

***Dominio*: l'insieme R dei numeri reali**

Derivate

$y' = e^x \qquad y'' = e^x$

Il grafico



Asintoto orizzontale 'a sinistra'

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \Rightarrow y = 0$ asintoto per $x < 0$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \Rightarrow$ nessun asintoto per $x > 0$

Stefano Volpe e Daniela Valenti, 2024

Altre funzioni esponenziali

Altre funzioni esponenziali si ottengono con l'algebra delle funzioni a partire dalle funzioni algebriche e dalla funzione esponenziale.

Ecco un esempio.

$$y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Per tracciare il grafico di questa funzione seguirò il procedimento già seguito con i polinomi, ma aggiungerò la ricerca del dominio e di un eventuale asintoto orizzontale.

Studio del grafico di funzione esponenziale

1. **Dominio**

   L'insieme R dei numeri reali

2. **Ricerca di eventuali simmetrie**

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$f(-x) = e^{-\frac{1}{2}(-x)^2} = f(x)$$

La funzione è pari, perciò la curva è simmetrica rispetto all'asse y.

Studio del grafico di funzione esponenziale

3. Ricerca di un asintoto orizzontale

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} e^{\overbrace{-\frac{1}{2}x^2}^{\to -\infty}} = 0$$

$$\text{Asintoto d'equazione } y = 0$$

Studio del grafico di funzione esponenziale

4a. Segno di y

$$\left.\begin{array}{l} y = e^{-\frac{1}{2}x^2} \text{ funzione composta} \\ y = e^z \text{ con } \quad z = -\frac{1}{2}x^2 \end{array}\right\} \boxed{y > 0 \text{ per qualunque } x \text{ reale}}$$

4b. Segno di y’

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dz} = e^z \\ \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1}{2}(2x) = -x \end{array}\right\} \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = -xe^z \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \boxed{y' = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}}$$

$$\boxed{y' \text{ ha il segno di} - x}$$

Studio del grafico di funzione esponenziale

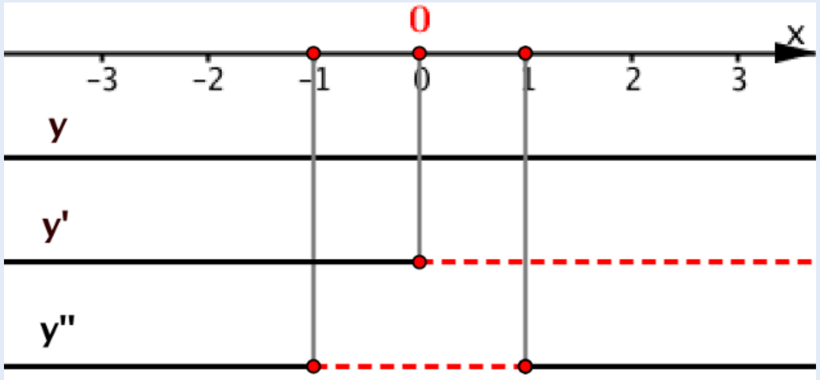
$$y' = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$$

4c. Segno di y” [derivata di un prodotto]

$$y'' = -1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + \left[-x\left(-x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)\right] = e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(x^2 - 1\right)$$

$$\boxed{y'' \text{ ha il segno di } \left(x^2 - 1\right)}$$

Schema riassuntivo, punti notevoli e grafico



$B(0,1)$ **Punto di massimo relativo**

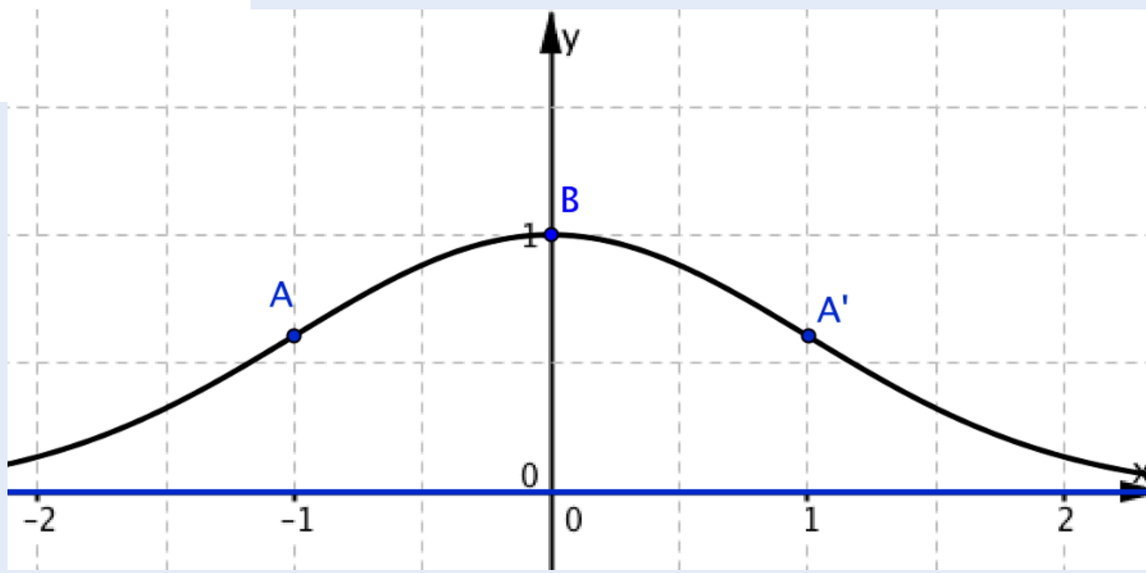
$A(-1, \frac{1}{\sqrt{e}})$ $A'(1, \frac{1}{\sqrt{e}})$ **Flessi**

y = 0 asintoto orizzontale

$y > 0$ per qualunque x reale

y' ha il segno di $-x$

y'' ha il segno di $\left(x^2 - 1\right)$



La curva di Gauss

La curva ottenuta è la *curva di Gauss* o *gaussiana.*
Introdotta dal matematico, fisico e astronomo tedesco Carl Gauss (1777 – 1885) per descrivere la distribuzione degli errori commessi nel misurare una grandezza più volte con la stessa cura e nelle stesse condizioni.
Ha notevole importanza in calcolo delle probabilità e nelle scienze sperimentali.

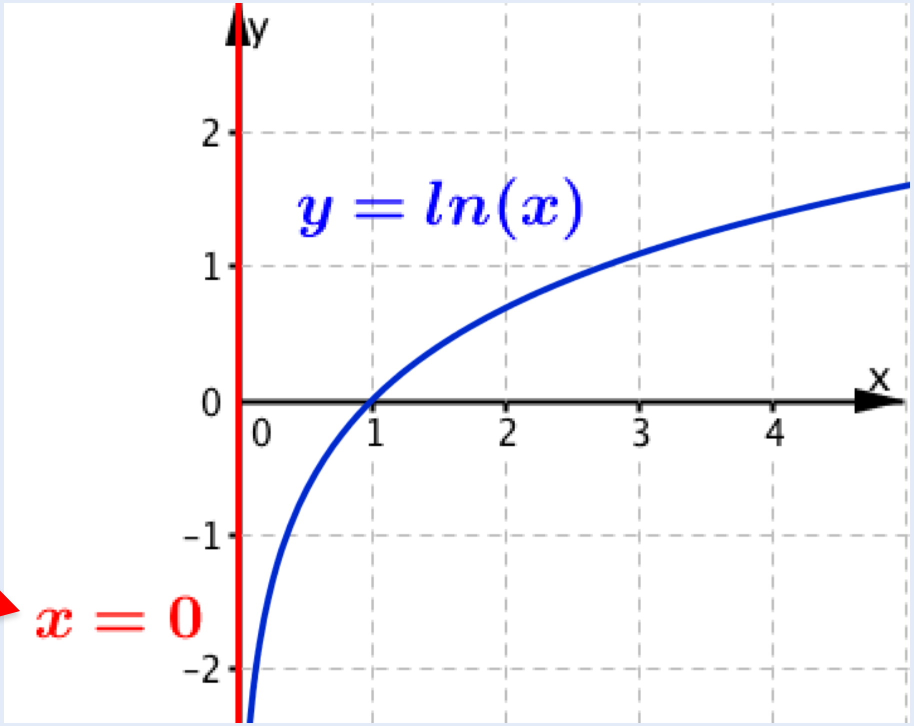
Funzione logaritmica elementare

Ricordo la funzione logaritmo elementare

$y = ln(x)$ o $y = log_e(x)$ **[*e* ≅ 2,71 numero di Nepero]**

***Dominio*: l'insieme R^+ dei numeri reali positivi**

Grafico



Derivate

$$y' = \frac{1}{x} \quad , \quad y'' = -\frac{1}{x^2}$$

Asintoto verticale

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Altre funzioni logaritmiche

Altre funzioni logaritmiche si ottengono con l'algebra delle funzioni a partire dalle funzioni algebriche e dalla funzione logaritmo.

Ecco un esempio.

$$y = x^2 - 2\ln(x)$$

Il procedimento per tracciare il grafico di questa funzione è lo stesso già seguito per i polinomi, con l'aggiunta della ricerca del dominio e di un eventuale asintoto verticale.

Attività

Completa la scheda di lavoro per tracciare il grafico della funzione logaritmica

Revisione dell'attività svolta

Quesiti 1 e 2

Completa il procedimento per tracciare il grafico di $y = x^2 - 2\ln(x)$.

1. Prime caratteristiche del grafico

- Qual è l'insieme di definizione della funzione?
  L'insieme R^+ dei numeri reali positivi
- Verifichi se la funzione è pari o dispari? Sì No
  Perché l'insieme di definizione è R^+ e non ci possono essere archi di curva simmetrici rispetto all'asse *y* o rispetto a O.

2. Determina l'equazione dell'eventuale asintoto verticale del grafico

$$\lim_{x \to 0^+} [\underbrace{x^2}_{0} - \underbrace{2ln(x)}_{-\infty}] = +\infty \Rightarrow \text{asintoto verticale d'equazione } x = 0$$

Quesiti 3 e 4

3. Non ci sono metodi algebrici elementari per studiare il segno della funzione; perciò passa a calcolare la derivata y' e studiane il segno.

$$y' = 2x - 2\left(\frac{1}{x}\right) = 2\left(x - \frac{1}{x}\right) = 2\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)$$

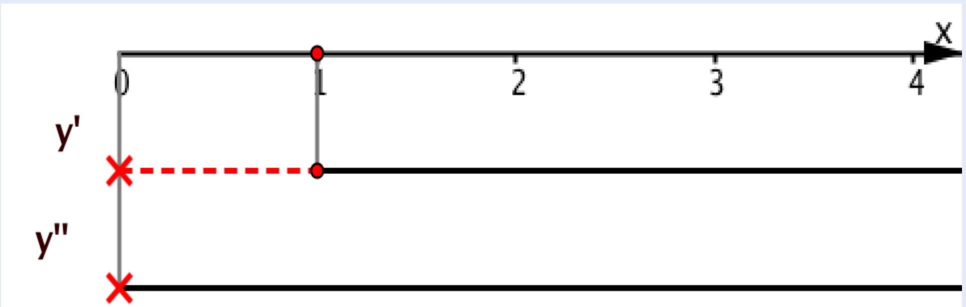
Nell'insieme di definizione trovo $x > 0$,
perciò y' ha lo stesso segno di $x^2 - 1$ con $x > 0$.

4. Calcola la derivata y'' e studiane il segno

$$y'' = 2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

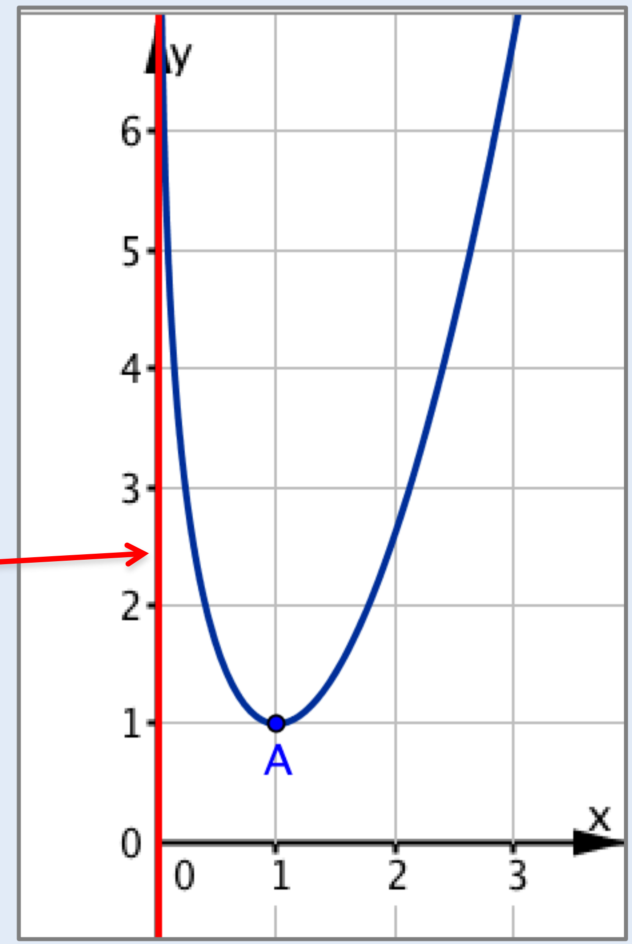
y'' ha sempre segno positivo perché somma di espressioni positive.

Quesiti 5, 6 e 7



A(1, 1) punto di minimo relativo

$x = 0$ asintoto verticale

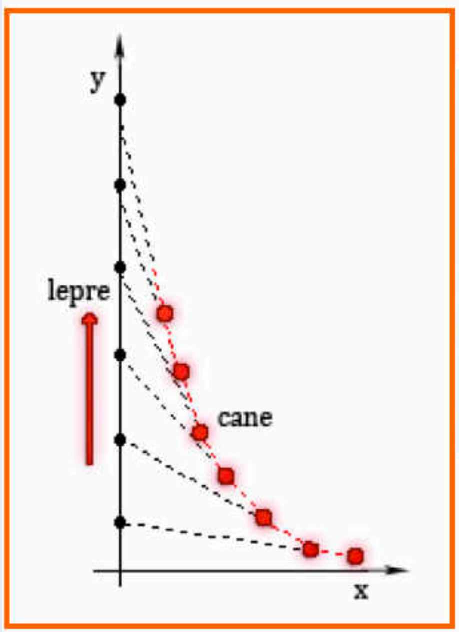


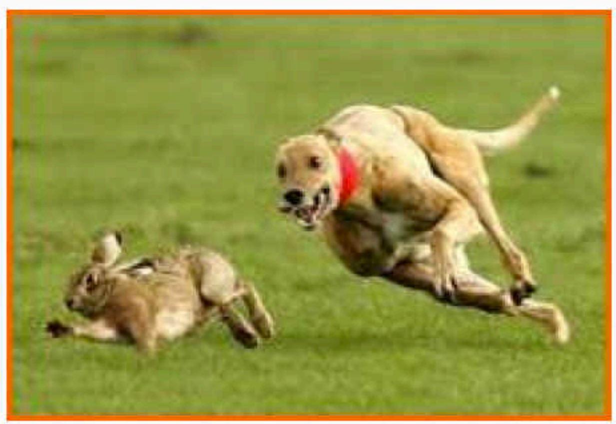
Curva d’inseguimento

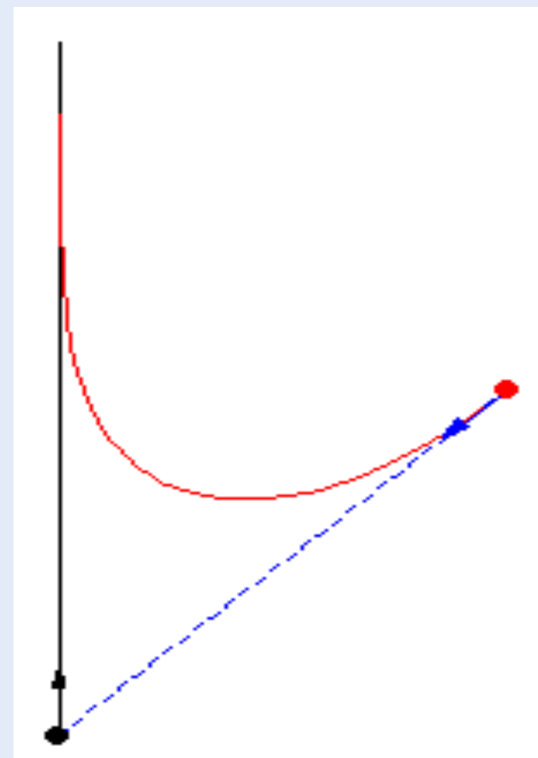
Curva studiata da vari matematici famosi, a partire dalla fine del 1600 con questa idea di ‘inseguimento’. Una lepre corre con velocità costante lungo l’asse y; il cane C descrive la curva d’inseguimento, quando:

- si muove con la stessa velocità della lepre;

- è sempre diretto verso la lepre.





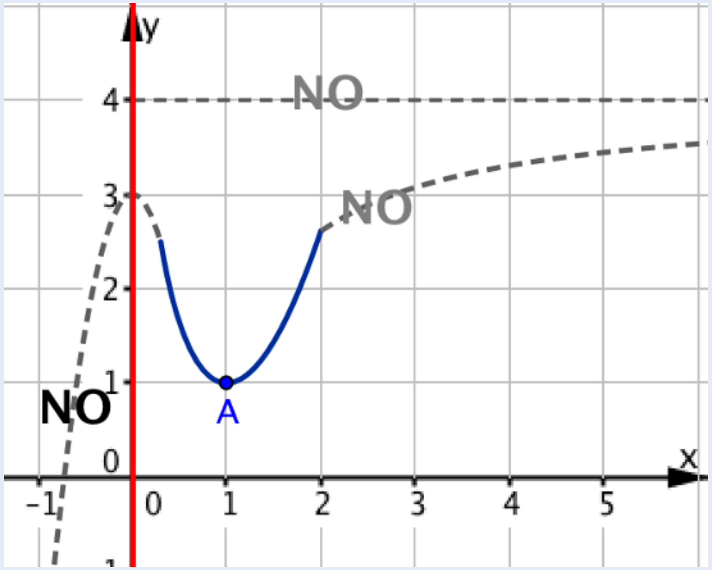


Riflessioni sul procedimento seguito

Per tracciare il grafico dell'ultima funzione:
- **non abbiamo studiato il segno di y;**
- **non abbiamo cercato un eventuale asintoto orizzontale.**

Anche senza queste due informazioni abbiamo ottenuto un grafico accurato: l'asintoto verticale, il punto A di minimo relativo e la concavità sempre verso l'alto garantiscono che la curva non può 'piegare verso il basso' per attraversare l'asse x o avvicinarsi a un asintoto orizzontale.

Così dal grafico ricaviamo che risulta $y > 0$ in tutto l'insieme R^+.



Pensare con le mani e con gli occhi

Tracciare il grafico di una funzione con carta e penna può diventare un'attività meccanica e ripetitiva; in questo caso il computer è più veloce e più accurato di qualunque studente.

Ma può anche diventare un'occasione per:

- **collegare e rivedere tanti concetti imparati lungo tutto l'arco scolastico;**
- **pensare con le mani e con gli occhi per trovare i procedimenti più efficaci.**

In questo secondo caso i grafici diventano uno strumento di crescita intellettuale per tutti.