

Funzioni e insiemi in matematica e nella sua didattica

Funzioni e insiemi in matematica

A partire dalla seconda metà del 1800 si sviluppa la ‘teoria degli insiemi’, con particolare attenzione anche agli insiemi numerici.



George Cantor



Giuseppe Peano

Funzioni e insiemi in matematica

Definizione 'insiemistica' di funzione

Dieudonné (1969)

«**Siano E ed F due insiemi**, distinti o no. Una relazione fra una variabile x di E e una variabile y di F è detta relazione funzionale di E verso F , se, qualunque sia x in E , esiste un elemento y di F , **e uno solo**, che stia nella relazione considerata con x .»



Jean Dieudonné
Francia 1906 - 1992

La ricerca del gruppo Bourbaki

La definizione 'insiemistica' di funzione è una parte del lavoro di ricerca del gruppo Bourbaki, di cui Dieudonné era parte attiva.



Obiettivo della ricerca del gruppo Bourbaki: risistemare tutta la matematica conosciuta basandola su un unico fondamento, la teoria degli insiemi.

Reazioni all'impostazione “bourbakista”

Il commento di Thom (1974)

«È caratteristico che, dall'immenso sforzo di sistemazione di Bourbaki non sia uscito alcun teorema nuovo di qualche importanza»

*Un eterno dilemma della matematica:
scoprire nuovi risultati o sistemare
logicamente i risultati noti?*

**Bourbaki o Thom?
Euclide o Archimede?**



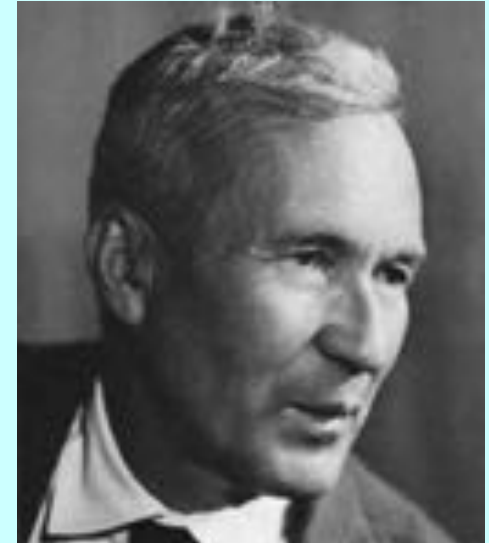
René Thom,
Francia 1923 - 2002

Definizione di funzione oggi condivisa

Una definizione più 'snella'

Kolmogorov (1974)

«Si può intendere una **funzione** come una legge arbitraria che, ad ogni x appartenente ad un insieme D (detto **dominio** della funzione), fa corrispondere una sola y appartenente ad un insieme C (detto **codominio** della funzione)»



Andrej Kolmogorov
Russia 1903 - 1987

*Definizione condivisa oggi
dalla comunità scientifica.*

Chiarezza sulla radice quadrata

Dal quadrato alla radice quadrata

Qual è la radice quadrata di 4?

2 -2 ± 2 ??

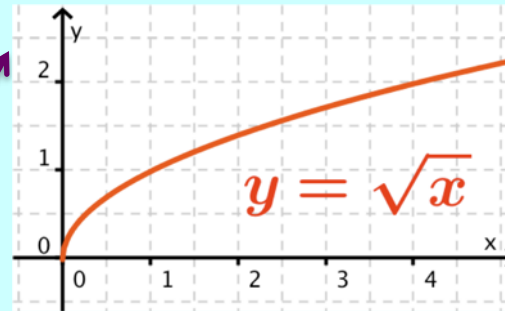
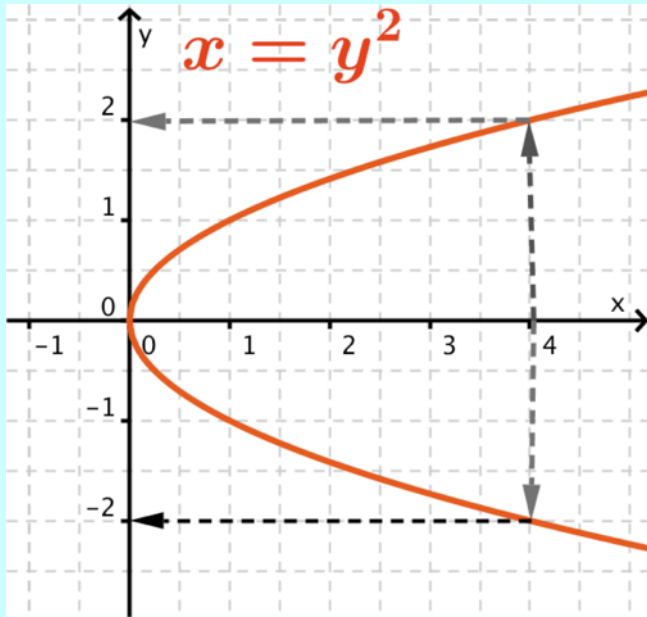
Sui libri ho trovato diverse formule:

$$\sqrt{4} = \pm 2 \quad \sqrt{4} = 2 \quad \pm \sqrt{4} = \pm 2$$

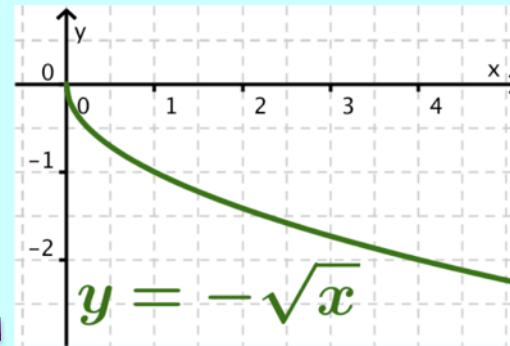
Queste formule sono tutte coerenti con la definizione di funzione condivisa oggi dalla comunità scientifica internazionale?

Coerenza con la più recente definizione di funzione

Per descrivere la curva d'equazione $x = y^2$ occorrono **due funzioni**



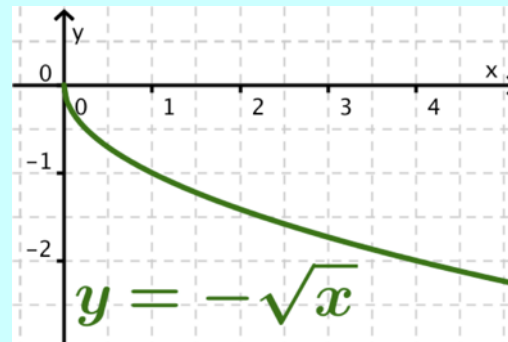
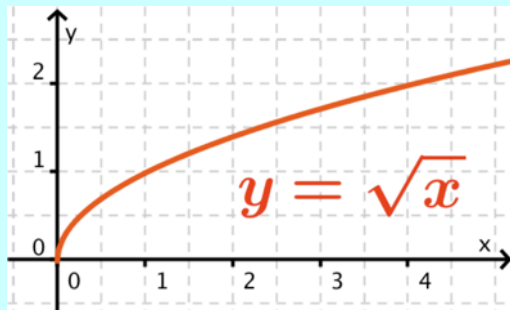
Dominio: insieme \mathbb{R}^+
Codominio: insieme \mathbb{R}^+



Dominio: insieme \mathbb{R}^+ ;
Codominio: insieme \mathbb{R}^-

Dominio e codominio indicati qui sopra sono sottintesi se ogni funzione è descritta dalla sola formula.

Definizioni e simboli *coerenti* con la più recente definizione di funzione



La radice quadrata di 4 è il numero positivo che, elevato al quadrato, dà come potenza 4.

Se risolvo l'equazione $x^2 = 4$ ottengo due soluzioni:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{4} = 2 \\ x = -\sqrt{4} = -2 \end{cases}$$

Scrivo

$$\sqrt{4} = 2 \quad -\sqrt{4} = -2 \quad \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$\text{NO } \sqrt{4} = \pm 2$$

Riflessioni sulla storia

La storia fa capire che

- Grafici e geometria analitica si basano su concetti e termini precedenti la definizione bourbakista del concetto di funzione.
- La definizione di funzione basata sugli insiemi è legata *solo* alla necessità di risistemare in modo coerente concetti e risultati che si sono sviluppati lungo molti secoli.
- Aver recepito questa definizione agevola una trattazione coerente delle equazioni di II grado (studenti di 16 – 17 anni)

DUNQUE

*La storia suggerisce di costruire con attenzione e gradualità il concetto di funzione **prima** di arrivare a definizioni formali.*

Osservazioni e domande didattiche

I ragazzi di 16 anni debbono assimilare la definizione insiemistica di funzione, perciò è bene anticiparla!

Nell'Europa e nell'Italia del Nord è importante per i ragazzi saper andare bene in bicicletta, perciò insegniamo ad andare in bicicletta ai bambini di 6 mesi?



Daniela Valenti, 2020



Domande didattiche

Introdurre il concetto di funzione basandosi sulla teoria degli insiemi anche a 11 – 14 anni è un percorso didatticamente conveniente?

B) Il punto di vista didattico internazionale

Per rispondere, uno sguardo a ciò che è successo nelle scuole di altri paesi del mondo in questi ultimi cinquanta anni.

La matematica bourbakista nella scuola secondaria

Dopo il Congresso di Royaumont (1959) la matematica bourbakista viene “paracadutata” nella scuola, in base a considerazioni di questo tipo:

- la matematica è il modello di una struttura deduttiva;**
- la matematica insegnata come struttura deduttiva è più facile da imparare.**

La matematica bourbakista introdotta nella scuola secondaria

In Belgio

I coniugi Papy
in antitesi a
L'école Décroly



In Francia

I programmi rinnovati
Gli IREM

Le esperienze si moltiplicano, finché
diventa ufficialmente chiaro che gli
esperimenti hanno **tutti** un esito disastroso.

La matematica bourbakista “*eliminata*” dalla scuola secondaria

H. Freudenthal (1987)

Fin dall’inizio gli insegnanti, ma anche i matematici, dovevano sapere che **la deduttività**, lungi dall’essere il punto di partenza, **deve essere la conclusione di ogni attività matematica.**

Attenzione!

Freudenthal **non propone di *eliminare* la deduttività**, ma di inserirla alla conclusione di un adeguato percorso didattico.

La matematica bourbakista “*eliminata*” dalla scuola secondaria

I programmi francesi del 1989 (età degli alunni 14-15 anni)

«... I simboli « \in \subseteq sono fuori programma così come tutte le nozioni sugli insiemi, le relazioni fra insiemi e la composizione di funzioni...»

I programmi francesi del 2007 (età degli alunni 16 anni)

«Qualunque definizione generale del concetto di funzione e la nozione di insieme di definizione sono fuori programma».

Discussioni e cambiamenti oggi in atto ...

Il punto di vista didattico internazionale

Dalle esperienze degli altri paesi possiamo ricavare un'importante indicazione:

Non è didatticamente conveniente iniziare ad introdurre il concetto di funzione con la definizione basata sulla teoria degli insiemi.

E l'Italia?

Non è stata “travolta dalla tempesta bourbakista” negli anni '60.

L'influenza di Emma Castelnuovo.

Nei programmi della scuola media unica (istituita nel 1963):

- **Uso occasionale e intuitivo degli insiemi per classificare.**
- **Geometria dinamica.**
- **Funzioni e grafici a partire dalla realtà.**
- **Alla fine della terza media operazioni fra insiemi e logica, analogie strutturali.**

E l'Italia?

Anche nei successivi programmi legati alla riforma Moratti (2003) troviamo menzionati gli insiemi solo alla conclusione della scuola secondaria di I grado come occasione di introduzione al pensiero razionale.

Tuttavia...



I testi universitari di matematica cominciano con teoria degli insiemi e definizione insiemistica di funzione.

Questa struttura si insinua nei testi 'classici' di scuola secondaria, che però lasciano inalterato il resto del testo, con notevoli contraddizioni.

E gli insiemi invadono anche i testi della primaria!

Nell'ultima presentazione:

**Panorama sulle funzioni nelle
Indicazioni e nelle recenti indagini a
livello nazionale.**