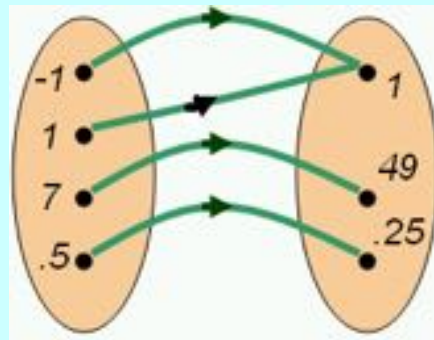


# **Evoluzione del concetto di funzione in matematica**

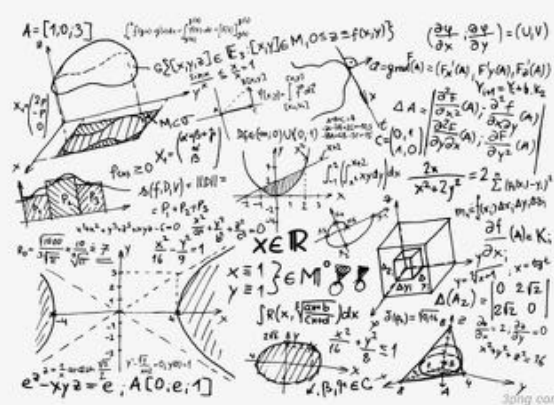
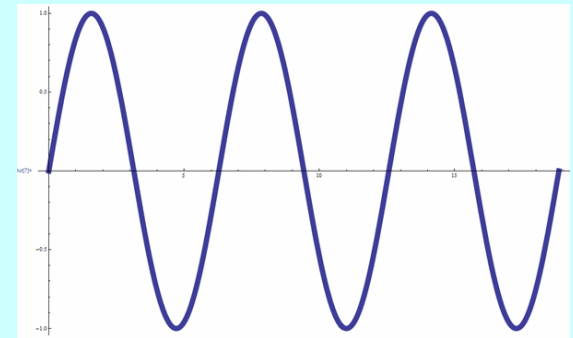
# FUNZIONI IN MATEMATICA

Qual è la prima immagine o idea che vi viene in mente?

| x  | $y = x^2 - x$ |
|----|---------------|
| 1  | 0             |
| 2  | 2             |
| 3  | 6             |
| 0  | 0             |
| -1 | 2             |
| -2 | 6             |



$f(x)$



Si insegnano le funzioni al liceo, non prima!

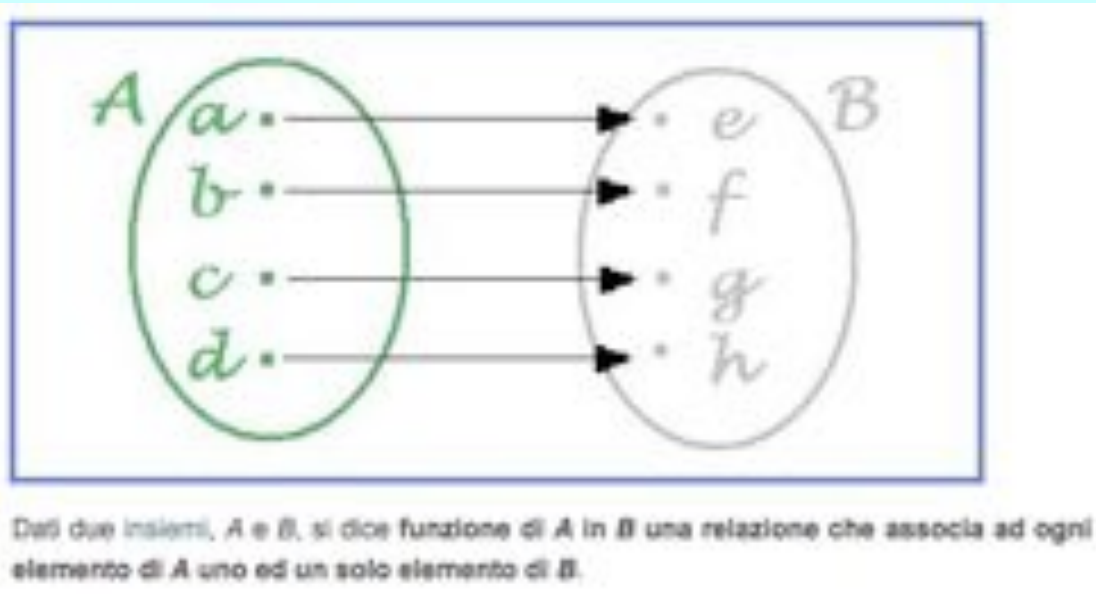
**Come e quando avete  
incontrato le funzioni nella  
vostra formazione?**

# Percorso didattico “comune”

*Molto probabilmente avete incontrato le funzioni così:*

- Elementi di teoria degli insiemi:
  - operazioni fra insiemi;
  - prodotto cartesiano fra due insiemi;
  - una relazione è sottoinsieme del prodotto cartesiano.
- Definizione di funzione come particolare relazione.

**E questo inizio si è  
ripetuto più volte ...**



# Percorso didattico “comune”

... *E poi*

- Elementi di geometria analitica non collegati al concetto di funzione introdotto all’inizio.
- Equazioni, disequazioni e sistemi solo con metodi algebrici, senza alcun collegamento con la geometria analitica.
- E infine derivate e studio di funzioni...

Centro della  
formazione:  
abilità di calcolo

**Si creano tanti ‘compartimenti stagni’**

# Riflessioni sul percorso

**Questo percorso è l'unico possibile?**

**È efficace per una larga parte degli studenti?**

**Contribuisce in modo significativo alla formazione globale degli studenti?**

**È obbligatorio?**

# Per trovare risposte efficaci

- A) **Panorama sull'evoluzione del concetto di funzione.**
- B) **Panorama sulle funzioni nella didattica della matematica degli ultimi 50 anni a *livello internazionale*.**
- C) **Panorama sulle funzioni nelle Indicazioni e nelle recenti indagini a *livello nazionale*.**

**I punti B e C nelle successive due presentazioni**

# **A) Panorama sull'evoluzione del concetto di funzione.**



# **Il concetto naturale di funzione**

***È legato al movimento: osservo come cambia una grandezza al variare del tempo.***

**Risale almeno al paleolitico e lo ritroviamo nello sviluppo del bambino.**



**Graffiti paleolitici a Lascaux,  
Eseguiti circa 17 500 anni fa.**

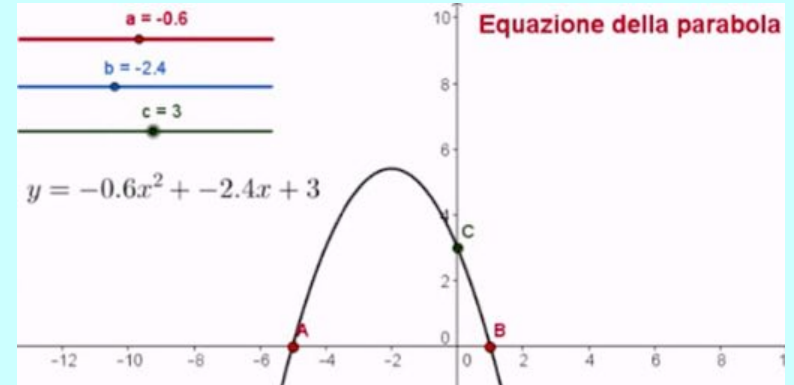


# Coltivare il concetto naturale di funzione

È importante coltivare questo concetto naturale e farlo evolvere durante lo sviluppo intellettuale.



| x  | $y = x^2 - x$ |
|----|---------------|
| 1  | 0             |
| 2  | 2             |
| 3  | 6             |
| 0  | 0             |
| -1 | 2             |
| -2 | 6             |



# Il concetto di funzione si evolve

## 1. L'antichità

- **Tavole dei quadrati e delle radici quadrate (astronomi babilonesi, 2000 a.C.)**
- **I luoghi geometrici e gli antichi greci: Euclide, Archimede.**
- ***Si trova lo studio di casi di dipendenza fra due quantità.***
- ***Non si trovano le nozioni “astratte” di quantità variabili e di funzione.***



# Il concetto di funzione si evolve

## 2. Il Medio Evo

Il movimento

- **Grafici per rappresentare i dati di un esperimento di fisica (Oresme, XIV secolo)**
- ***Si trovano solo casi concreti di dipendenza fra due quantità, definiti da una descrizione verbale o da un grafico.***



# Il concetto di funzione si evolve

## 3. Il Rinascimento

Il movimento



Galileo Galilei

### ➤ Galileo studia la caduta libera

*«Per esperienze ben cento volte replicate sempre s'incontrava, gli spazii passati esser tra di loro come i quadrati de i tempi, e questo in tutte le inclinazioni del piano, cioè del canale nel quale si faceva scender la palla»*

1632, *Dialogo sopra i due massimi sistemi*

**Legge matematica  
descritta 'a parole'**



# Il concetto di funzione si evolve

## 3. Il Rinascimento

- **Viète introduce una prima forma di calcolo letterale.**
- **Fermat e Cartesio “inventano” la geometria analitica, applicando l'algebra nuova alla geometria classica.**
- ***Le funzioni sono descritte per mezzo di formule ed equazioni***



Viète



Fermat



Cartesio

# Definizioni di funzione



Sir Isaac Newton (left) and Gottfried Wilhelm von Leibniz (right)

**Il movimento**

## 5. *Newton e Leibniz*

*Newton (1676)*

«Le curve sono descritte non dalla giustapposizione di parti, ma dal **movimento continuo dei punti** ... Questa genesi avviene spontaneamente e viene osservata tutti i giorni nel movimento continuo dei corpi».

*Leibniz (1673)*

«Chiamo **funzione** delle linee ottenute costruendo delle rette che corrispondono a un punto fisso e a dei punti di una curva data» ??

***Compare per la prima volta il termine «funzione», forse legato al verbo latino “fungor” che significa “eseguire, adempiere un compito”***



# Definizioni di funzione

Due definizioni con  
una 'piccola differenza'



## ***Dirichlet (1837)***

«Se una variabile  $y$  è collegata ad una variabile  $x$  in modo che qualsiasi sia il valore numerico assegnato a  $x$  c'è una legge secondo cui risulta determinato un unico valore di  $y$ , allora si dice che  $y$  è funzione della variabile indipendente  $x$ ».

## ***Weierstrass (1878)***

«Se una quantità variabile reale, che diremo  $y$ , è legata ad un'altra quantità variabile reale  $x$ , in guisa che, ad un certo valore di  $x$  corrispondano uno o più valori determinati per  $y$ , si dirà che  $y$  è funzione di  $x$  e si scriverà  $y = f(x)$  »

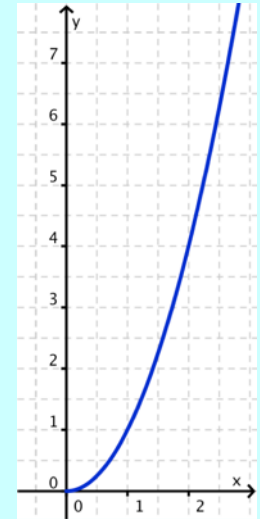
Maggiore diffusione fino  
alla prima metà del 1900



**La 'piccola differenza' ha tante conseguenze**

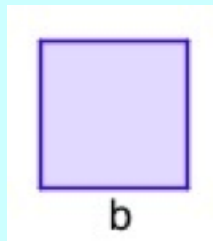
**Un esempio per capire**

# Due problemi sull'area del quadrato



Entra  $b = x$  ed esce  $S = y$

$$y = x^2$$



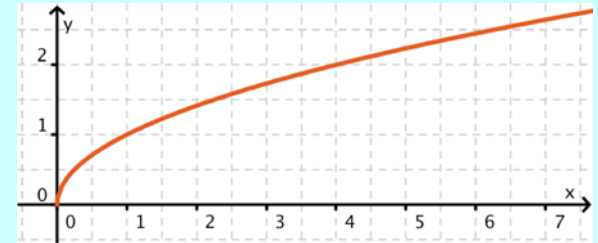
$$S = b^2$$

Entra  $S = x$  ed esce  $b = y$

$$x = y^2$$

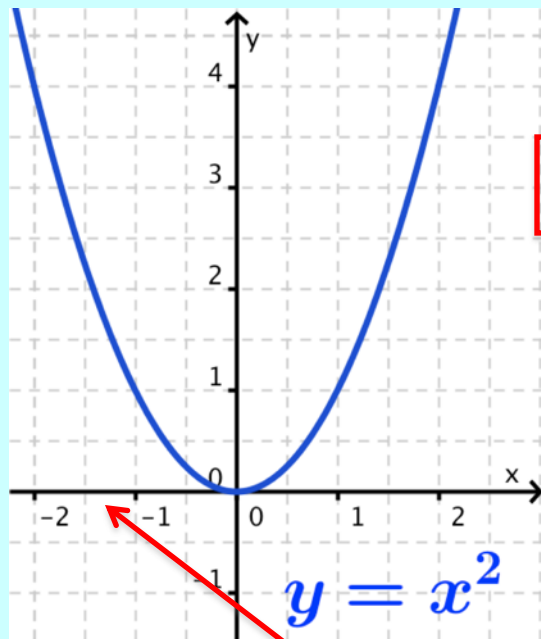
Si esplicita  $y$  con un simbolo diffuso in Europa a partire dalla fine del 1400.

$$y = \sqrt{x}$$

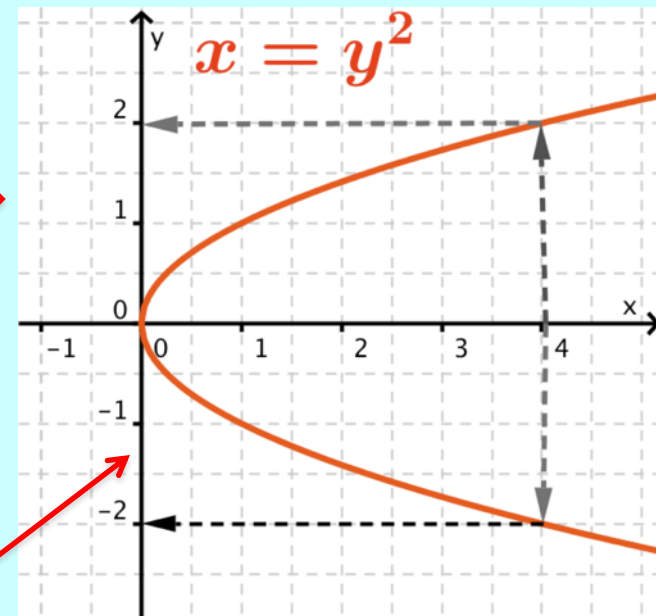


**Dal problema geometrico lato  $b$  e area  $S$  positivi**

# Dal quadrato alla geometria analitica



Scambio  $x$  con  $y$



Numeri negativi

## Problema storico.

Già gli antichi babilonesi calcolavano radici quadrate, ma solo durante il 1600 i matematici europei lavorarono stabilmente con i numeri negativi. Come accordare le 'vecchie' radici quadrate con i 'nuovi' numeri negativi?

# **La storia continua nella presentazione 'Funzioni e insiemi'**