Grafico di un quoziente di polinomi

Risposte e commenti all’attività

Quesito 1

Completa il procedimento per tracciare il grafico di

$$y=\frac{x^3}{x^2-2x+1} \Leftrightarrow f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$$

1. Prime caratteristiche del grafico

Qual è il dominio della funzione?

Insieme dei numeri reali escluso 1

– Qual è il grado della funzione? 3°

$$y=\frac{x^3}{x^2-2x+1} \Rightarrow x^3-x^2y+2xy-y=0$$

– La funzione è pari o dispari?

La funzione non è né pari né dispari

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2} \qquad f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x-1)^2} \qquad -f(x)=\frac{-x^3}{(x-1)^2}$$

Quesito 2

2. Determina le equazioni degli eventuali asintoti

Ricerca di asintoto verticale

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3}{x^2-2x+1}=\infty \Rightarrow \text{asintoto d'equazione } x=1$$

Ricerca di asintoto obliquo d'equazione $y = mx + q$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-2x+1}=1\Rightarrow\ m=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-2x+1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{x^2-2x+1}=2\Rightarrow\ q=2$$

Gli asintoti della curva hanno equazioni:

$$x=1 \quad \text{e} \quad y=x+2$$

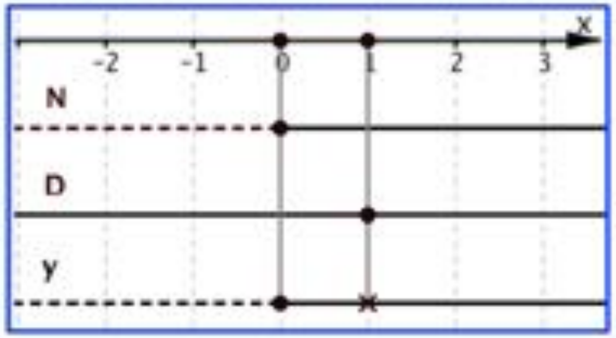
Quesiti 3, 4, 5

3. Completa lo studio del segno di y, anche nello schema a fianco.

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} = \frac{\text{N}}{\text{D}}$$

N ha il segno di x

$\text{D} = (x-1)^2$ è positivo per $x \neq 1$



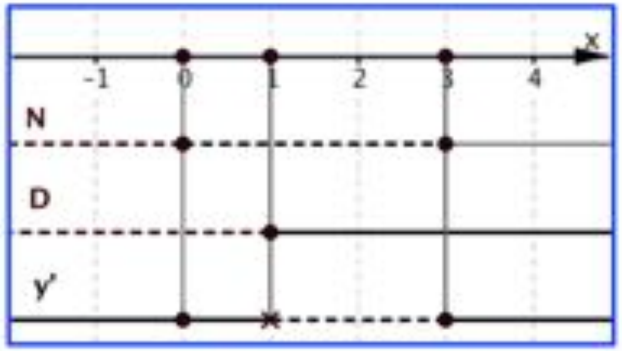
4. Calcola $y' = f'(x)$ e riassumi il segno nello schema a fianco

$$y' = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

N ha il segno di $(x-3)$

e vale 0 per per $x = 3$ o $x = 0$

D ha il segno di $(x-1)$



5. Calcola la derivata $y'' = f''(x)$

$$y'' = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - (x^3 - 3x^2)3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

y'' ha il segno di x.

Quesiti 6, 7, 8

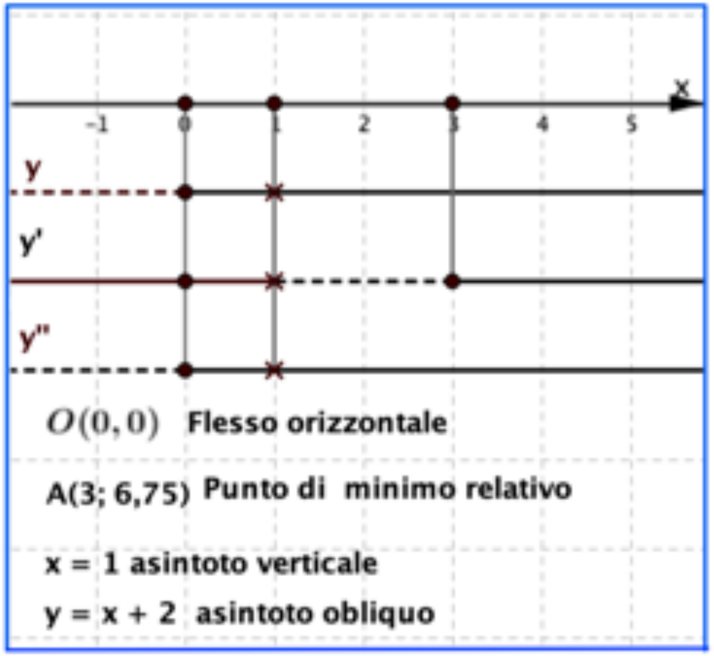
6. Riassumi in un unico schema (sotto a sinistra) il segno della funzione e delle sue derivate.

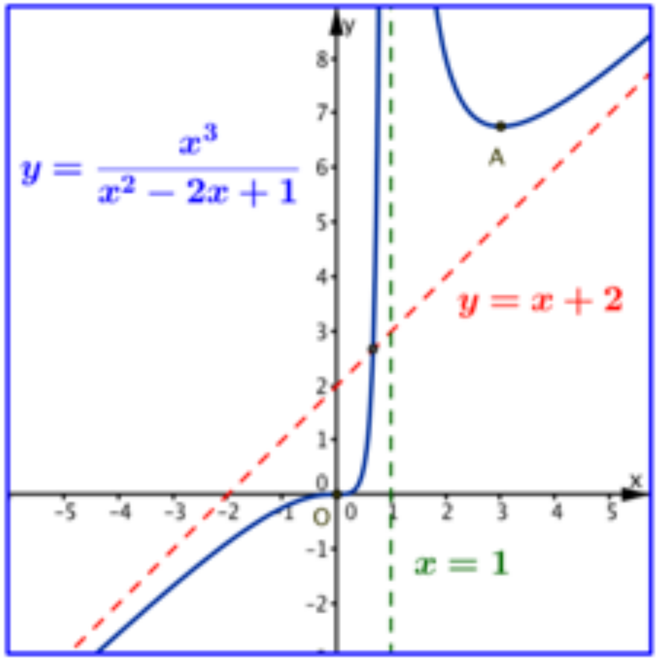
7. Elenca qui sotto i punti notevoli; determinane le ordinate e scrivi l'elenco dei punti sotto lo schema riassuntivo.

O(0; 0)   A(3; 6,75) $y_A = \frac{3^3}{(3-1)^2} = \frac{27}{4} = 6,75$

8. Nel piano cartesiano traccia il grafico della funzione e dei suoi asintoti, a partire da tutte le informazioni ottenute.

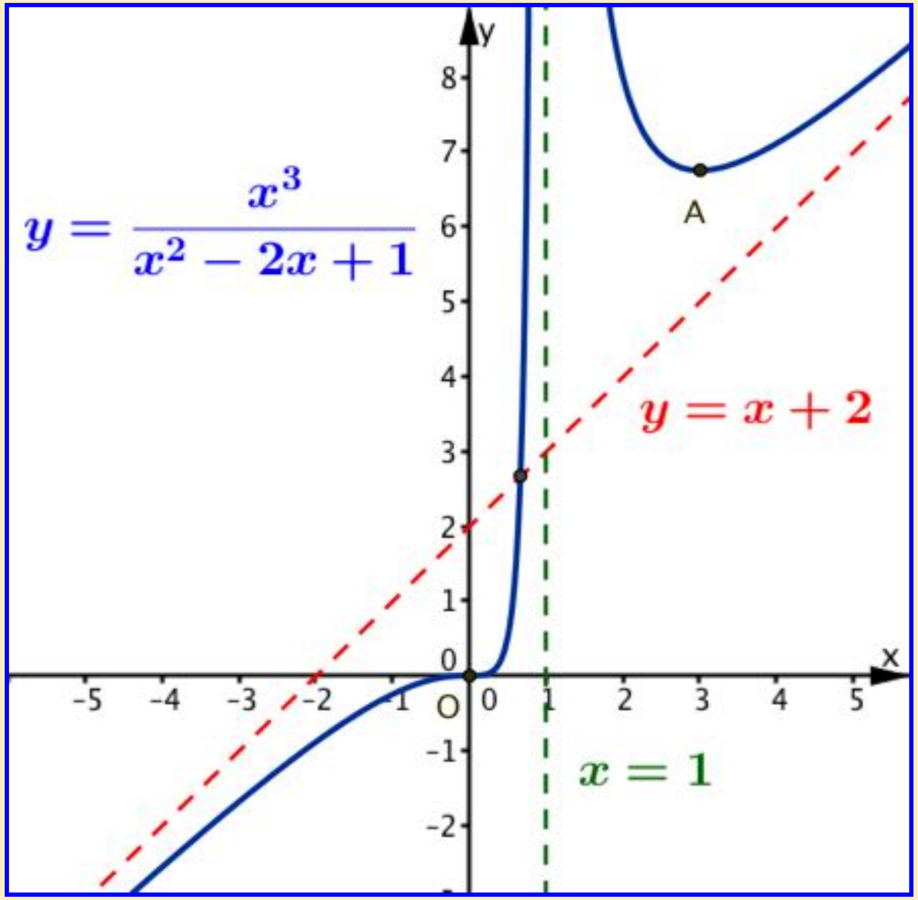
O **flesso**
con
***y'*(0) = 0**





Un’osservazione

La curva attraversa il suo asintoto obliquo, mentre non può attraversare il suo asintoto verticale, perché il numero 1 non fa parte del dominio della funzione.



Studiare il grafico di una funzione

Il procedimento completo qui seguito si può applicare per studiare il grafico di qualunque altra funzione.
Un'avvertenza: per calcolare gli asintoti obliqui, la funzione assegnata deve avere insieme di definizione illimitato. Questo si verifica sempre per i quozienti di polinomi, mentre ci sono altre funzioni che hanno un insieme di definizione limitato.
Qui sotto richiamo due esempi.